
FONDO PIZZOFALCONE

TRIGONOMÉTRIE.

TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,

PAR ANTOINE CAGNOLI,

TRADUITE DE L'ITALIEN PAR N. M. CHOMPRÉ.

SECONDE ÉDITION

CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.







A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57;
A LYON, chez MAIRE, Libraire;
A MARSEILLE, chez JEAN MOSSY, Libraire, rue de la Canebière, n° 22;
A GENÈVE, chez PASCHAUD, Libraire.

1808.

PRÉFACE.

Des changemens multipliés, des améliorations, des additions nombreuses et importantes, peuvent faire considérer cette seconde édition comme un Ouvrage en quelque sorte nouveau. Si ce Traité peut faciliter d'autant plus l'étude de la Trigonométrie; si, par la disposition des Tables et par les formules nombreuses qu'il renferme, il peut être d'un usage commode pour les Savans, j'aurai rempli le double but que je me suis proposé. J'espère que les Commençans me sauront gré d'avoir très-souvent sacrifié à la clarté l'élégance des démonstrations. Rien de plus facile sans doute à comprendre et à pratiquer que les substitutions, et ce moyen est presque le seul dont je me suis servi pour établir les propositions et résoudre les problèmes, en partant pour l'ordinaire d'une construction géométrique : car représenter une question par une figure, c'est soumettre cette question à l'esprit et aux yeux tout à-la-fois; et si d'ailleurs on fait, pour la résoudre, une heureuse application de l'analyse, il résulte de cette méthode mixte des démonstrations plus précises, des figures moins compliquées.

Quoique les Traités de Trigonométrie soient très-multipliés, celui-ci ne paraîtra peut-être pas tout-à-fait dépourvu d'utilité. Ce qui surtout m'a déterminé à le publier, ce sont des formules nouvelles, qui

donnent, sous des expressions très-simples, les différentielles finies des lignes trigonométriques. Parmi les usages nombreux et importans qu'on peut faire de ces formules, je me contenterai d'en indiquer ici deux principaux.

En premier lieu, si l'on emploie ces formules pour différentier une équation, on obtient une équation différentielle finie, c'est-à-dire mathématiquement rigoureuse et vraie, quelle que soit la grandeur des variations ou différences. D'où il résulte une nouvelle masse d'équations trigonométriques qui servent à résoudre autant de problèmes qu'il y a de diverses quantités dans ces équations, puisque chacune de ces quantités peut être seule inconnue. Je démontre par les exemples, qu'en effet cette classe d'équations donne une solution facile de bien des problèmes résolus jusqu'à présent par des voies beaucoup plus pénibles.

En second lieu, si on convertit ces mêmes équations en proportions, et qu'on les compare ainsi transformées avec les analogies différentielles infinitésimales, dont on fait un si grand usage dans les cas où les variations sont petites à la vérité, mais finies, et non pas infiniment petites; on parvient à connaître avec précision les quantités négligées dans les analogies infinitésimales, et l'on a un moyen facile de tenir compte de ces quantités quand elles sont d'une certaine importance. A l'aide de quelques exemples, je fais voir que les erreurs des analogies différentielles infinitésimales,

dans les applications journalières qu'on en fait, sont plus graves qu'on ne le croit communément.

Les analogies différentielles fondées sur l'hypothèse de deux parties constantes dans le triangle, peuvent encore s'appliquer avec autant de facilité que d'utilité aux cas où cinq parties et même où toutes les parties du triangle varient. Je donne à cet effet une méthode générale, à l'usage de laquelle concourt particulièrement l'emploi des signes + et — par lesquels j'ai eu soin d'indiquer dans la construction des analogies, si les variations des diverses parties du triangle se font en un même sens ou en sens contraires.

Pour ce qui regarde la résolution des triangles, principal objet de la Trigonométrie, mes recherches dans cette partie n'ont pas été non plus absolument infructueuses. Sans parler des formules nouvelles, que le Lecteur distinguera, j'ai cherché des solutions commodes pour les cas particuliers; lorsque, par exemple, au lieu de la valeur absolue de quelques parties du triangle, on ne connaît que leur somme ou leur différence; ou lorsqu'à raison de leur grandeur les sinus ou les cosinus ne peuvent donner avec précision, au moyen des Tables ordinaires, la valeur des arcs correspondans. J'épargne au Calculateur la considération de la perpendiculaire dans les triangles sphériques; et pourvu qu'on observe seulement les règles des signes pour les lignes trigonométriques dans les divers quarts du cercle, j'ai disposé les solutions de sorte qu'on ne peut se tromper en aucun cas sur l'es-

pèce de l'arc cherché ; c'est un point sur lequel des Auteurs célèbres ont donné des règles inexactes, ainsi qu'il me semble l'avoir démontré. J'ai aussi restreint les limites des cas douteux, autant qu'on peut le faire par la seule Trigonométrie. Enfin j'ai rapproché les triangles sphériques des triangles rectilignes, et cette comparaison, si je ne me trompe, curieuse autant que neuve, peut avoir encore son utilité.

Quant à la pratique de la Trigonométrie sur le terrein, j'expose avec détail ce qu'il y a de plus essentiel pour mettre l'Ingénieur ou le Géographe en état d'opérer avec exactitude.

La Trigonométrie fournit des moyens pour se servir commodément des logarithmes dans les additions et dans les soustractions, quels que soient les cas et les expressions. L'idée de ces moyens n'est pas absolument neuve; mais faute d'une méthode générale facile à pratiquer, telle que la méthode que je propose, on n'a point imaginé d'avoir recours à ces expédiens dans une infinité d'occasions où on peut en retirer un avantage réel.

De cette méthode générale découlent naturellement les solutions de toutes les équations du second et du troisième degré par le moyen de la Trigonométrie.

Et comme on parvient avec leur aide à la solution de celles du quatrième degré, je l'ai de même insérée dans la présente Édition. Toutes ces solutions sont développées de manière à ne laisser au Calculateur

d'autre peine que de substituer aux lettres les nombres convenables, et de faire les opérations arithmétiques qu'exigent les formules.

Je trouve aussi que le Calcul différentiel conduit aisément à la détermination de la valeur de l'inconnue, quel que soit le degré ou la nature d'une équation. Quoique le moyen que j'indique se présente comme de lui-même, je le crois nouveau, et mes Lecteurs jugeront si en l'employant ainsi que me l'ont suggéré mes formules différentielles trigonométriques, il ne mérite pas, tout bien comparé, la préférence sur toute autre méthode connue jusqu'à présent.

Et comme il est utile, dans les recherches de cette nature, de connaître d'abord les limites des racines réelles, j'expose dans cette seconde Edition une marche très-facile pour arriver à cette connaissance, et pour découvrir en même temps le nombre des racines imaginaires; ce à quoi l'on n'est parvenu jusqu'ici que par des moyens que leur extrême longueur rend impraticables, quelque ingénieux qu'ils soient d'ailleurs et dignes des grands Géomètres à qui ils sont dus.

Il m'a paru convenable d'insérer dans ce Traité les premiers principes du calcul différentiel, et de la méthode du retour des séries, attendu les applications continuelles que j'ai faites de ces principes. Je me suis attaché surtout à les expliquer avec clarté, parce qu'en général je suppose le Lecteur seulement initié dans les Mathématiques. Il peut entreprendre de parcourir cette

Trigonométrie, pourvu qu'il sache résoudre une équation, qu'il possède le calcul arithmétique, surtout pour les décimales, et qu'il connaisse les proportions, les progressions, les premières propositions de la Géométrie, l'usage et la théorie élémentaire des logarithmes.

Je n'omets pas dans cette Edition les formules trigonométriques impliquées d'imaginaires, parce que j'ai réussi à les construire d'une manière aussi claire qu'abrégée.

Elles servent, les unes à réduire les quantités exponentielles imaginaires à des sinus et cosinus d'arcs réels; d'autres, à convertir en arcs circulaires les logarithmes imaginaires; et d'autres à exprimer les sinus et cosinus des arcs multiples, qui, sous cette forme, sont susceptibles d'applications utiles.

Je donne encore aujourd'hui la démonstration directe (que j'ai publiée en 1796, dans le Tom. VII des Mémoires de la Société Italienne), par les voies trigonométriques les plus simples, des formules générales qui développent les sinus, cosinus et tangentes des arcs multiples, en séries des puissances des sinus, cosinus et tangentes des arcs simples, et réciproquement; formules qui, à l'exception d'une seule à laquelle Euler arrive par des moyens plus laborieux, n'avaient été construites qu'empiriquement, c'est-à-dire par induction.

Je parviens de même, avec les seules forces de la Trigonométrie, aux sommations connues tant des séries de puissance quelconque des sinus ou cosinus d'arcs

en progression arithmétique, que des séries des tangentes ou sécantes d'arcs en progression géométrique.

J'ai multiplié les applications aux problèmes de l'Astronomie, science dans laquelle la Trigonométrie joue le rôle principal, et les solutions que je donne de la plupart de ces problèmes sont neuves en général, ou pour la méthode, ou pour les résultats. C'est surtout ici qu'on aura lieu de reconnaître l'utilité du grand nombre de formules nouvelles contenues dans ce Traité.

Les Tables mises à la fin de l'Ouvrage ont déjà obtenu le suffrage des Mathématiciens. L'expérience a démontré qu'elles sont aussi exactes que commodes. Dans le cours de ce Traité, je me sers pour citer ces Tables, du chiffre romain; le chiffre arabe à la suite indique la formule. Mais l'usage du chiffre arabe seul, non accompagné de caractères romains, est de renvoyer aux articles de ce Traité, où se trouve chaque explication particulière.

Au moyen de formules expéditives qui font partie de celles que j'ai données, j'ai calculé les logarithmes de la table (BB), depuis le logarithme du nombre 1163. Pour être sûr de n'avoir commis aucune erreur dans leur calcul, j'ai formé tous les logarithmes des nombres intermédiaires, et j'ai pris jusqu'à la septième différence. Cette opération m'a fourni l'occasion de vérifier l'exactitude d'un grand nombre d'autres logarithmes de la même Table.

Je ne nomme point ici les Auteurs desquels j'ai

emprunté ce que j'ai jugé ne pouvoir être mieux. Il m'a paru plus à propos de leur faire hommage de ce qui leur appartient, dans le cours même de l'Ouvrage.

Je crois n'avoir omis que des méthodes compliquées et inutiles à la Trigonométrie ; ensorte que ce Traité peut être regardé comme complet. C'est ce dont on se convaincra en parcourant la Table des matières. A la suite de cette Table est la liste des numéros des articles nouveaux de cette Edition, pour la commodité de ceux qui, ayant la première, desireraient de les connaitre. (*)

(*) Comme cette seconde Édition française de la Trigonométrie de Cagnoli diffère, en plusieurs passages, de l'original italien, je crois devoir observer ici que l'Auteur m'a communiqué divers changemens ou additions, et que quelques autres modifications proviennent des observations de M. Delambre, cette nouvelle Édition ayant eu, comme la première, l'avantage de passer sous les yeux de cet habile et savant astronome, à mesure que les feuilles ont été livrées à l'impression. (*Note du Traducteur.*)

TABLE DES CHAPITRES

ET

DES MATIÈRES PRINCIPALES.

b

Numéros des articles nouveaux, insérés dans cette seconde Édition.

50 à 56; 62 à 71; 74 à 78; 96, 97; 120, 121; 140; 155; 172*; 173, 174; 217; 245; 248 à 251; 270, 271; 282, 283; 286; 288; 304 à 312; 314 à 319; 353 à 357; 360; 364 à 366; 371; 379 à 385; 391; 401; 403 à 411; 416 à 418; 437; 445 à 480; 484 à 489; 491; 493 à 497; 500 à 528; 548; 568; 586; 589; 591 à 600; 607; 613 à 615; 618; 620, 621; 624; 635, 636; 649; 662; 677 à 679; 682, 683; 686; 689; 716; 801; 842; 843*; 846 à 938; 941; 949; 972, 973; 1008; 1041; 1074; 1083; 1087; 1091; 1098; 1101, 1102; 1107; 1112; 1118; 1122; 1124; 1129; 1139; 1145 à 1149; 1157 à 1162; 1174; 1175; 1215; 1235; 1307; 1313; 1360; 1366; 1377; 1394; 1422; 1426; 1449, 1450; 1452; 1466; 1474; 1479; 1491 à 1494; 1506; 1534, 1535; 1543 à 1549; 1551; 1556; 1561 à 1585; 1590 à 1593; 1599, 1600; 1602; 1606; 1618, 1619; 1660; 1710, 1711; 1713.

Fautes essentielles à corriger.

ARTICLES.	LIGNES.		CORRECTIONS.
105......	4........	(34),	(34)
499......	5........	tang.^{5}A	tang. 5 A
527......	1........	cot. $\frac{}{2^n}$	cot. $\frac{A}{2^n}$
566......	7........	dnc	donc
603......	1........	formule	*ajoutez*..... (et cette remarque s'applique aussi aux deux solutions suivantes) *et supprimez cette phrase à la fin de l'article.*
717......	3........	l'Ouvrage (324)	les Tables trigonométriques
797......	16........	(700)	(727)
818......	3........	méthode	méthode ,
958......	3........	(n sin. a)	(n sin. a),
1068......	2........	sa	cette
	5........	il	le demi-arc
1403......	2........	constant	constans
1489......	5........	$\frac{}{64}$	$\frac{43}{64}$
1490......	3........	R°	R°
1511 *et* 1512	....	(K)	(J)
1529 *et suiv.*	....	⊙	✶
1563......	6........	une	un
1580......	3........	la 49°	49°
1581......	10........	doit guider	servira

AVIS AU RELIEUR.

Les 8 planches des Figures doivent être placées à la fin du Volume.

Les Tables numérotées depuis I jusqu'à IX, se placeront de même à la fin, avant les Planches.

TRIGONOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions et Notions préliminaires.



1. **Trigonométrie**, mot tiré du Grec, signifie *mesure des triangles*. Étant données quelques parties d'un triangle, la Trigonométrie enseigne les moyens de *trouver la valeur* de chacune des autres. Cette opération s'appelle *résolution des triangles*. Les parties que la Trigonométrie considère dans le triangle sont les angles et les côtés. La mesure des surfaces renfermées entre les côtés des triangles, est du ressort de la Géométrie plutôt que de la Trigonométrie.

2. Il est aisé de concevoir combien la Trigonométrie est une science utile et même agréable; puisqu'au moyen de ses calculs on mesure, avec autant d'exactitude que de facilité, les distances accessibles et inaccessibles : par exemple, la largeur d'un fossé, d'un fleuve, d'un lac; la hauteur d'un clocher, d'une montagne; les dimensions d'un bastion, d'un retranchement; les distances respectives des lieux; enfin celles des astres et leurs divers mouvemens dans l'immensité de l'espace.

3. Le triangle formé par des lignes droites appartient à la Trigonométrie *plane* ou *rectiligne*. Si les côtés sont des arcs de cercle considérés ou décrits sur la surface d'une sphère, la résolution du triangle est alors l'objet de la Trigonométrie *sphérique*.

4. Je suppose le lecteur instruit de la division du cercle adoptée par les géomètres, en 360 *parties* ou *degrés* égaux; de celle de chaque degré en 60 *minutes* ou *minutes premières*, de chaque minute première en 60 *secondes*, de chaque seconde en 60 *tierces*, et ainsi de suite. Pour abréger, si l'on veut désigner, par exemple, un arc de six degrés vingt-sept minutes quarante-huit secondes, on écrit $6^\circ\ 27'\ 48''$.

5. La Trigonométrie fait usage de quelques lignes auxquelles on a attribué les dénominations suivantes.

Fig. 1. Étant donné un arc tel que BD, moindre que de 90°, terminé par les rayons CB, CD: si de l'une des extrémités de cet arc, du point B, par exemple, on mène la perpendiculaire BA sur le rayon CD; BA s'appelle le *sinus*, AC le *cosinus* et AD le *sinus verse* de l'arc BD ou de l'angle ACB. La perpendiculaire est donc le sinus; la partie du rayon comprise entre cette perpendiculaire et le centre est le cosinus; et la portion du rayon qui reste entre la perpendiculaire et l'arc, c'est-à-dire la différence entre le rayon et le cosinus, est le sinus verse, qu'on nomme aussi la *flèche*.

6. Comme la valeur d'un angle est la même que celle de l'arc qui le mesure, nous emploierons indifféremment l'un ou l'autre : or (3) l'arc appartient à la Trigonométrie sphérique, et l'angle formé par deux lignes droites à la Trigonométrie plane; tout ce qne nous dirons des *lignes trigonométriques* convient donc également à ces deux espèces de Trigonométrie. Aussi avons-nous jugé inutile de diviser cet ouvrage en deux parties.

7. Des définitions précédentes il résulte que si BE est perpendiculaire à CF, BE sera le sinus, CE le cosinus, EF le sinus verse de l'arc BF. Supposons que BF soit le complément à 90° de l'arc BD, ou, ce qui revient au même, que ACE soit un angle droit; BE sera parallèle et égale à AC, CE sera parallèle et égale à AB; c'est-à-dire que le sinus de BF = le cosinus de BD = le cosinus de (90° — BF), et que le cosinus de BF = le sinus de BD = le sinus de (90° — BF). Donc *le sinus d'un angle est égal au cosinus du complément de cet angle, et le cosinus est égal au sinus du complément.* D'où il suit que le sinus de 45° = le cosinus de 45°. Ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'alors le triangle auquel ces deux lignes appartiennent est isoscèle et rectangle.

8. EF se nomme le *cosinus verse* de BD, et AD le *cosinus verse* de BF. Le cosinus verse n'est que la différence entre le sinus et le rayon.

9. Si la perpendiculaire (5) était menée de l'autre extrémité D sur le rayon CB, il en naîtrait un triangle égal absolument à ABC; puisqu'il anrait de même un angle droit, que l'angle C serait commun, et l'hypoténuse BC de l'un, égale à l'hypoténuse CD de l'autre. Donc la nouvelle perpendiculaire serait égale à BA, et diviserait BC en deux parties respectivement égales à AC et à AD. Les résultats sont donc les mêmes, quelle que soit celle des deux extrémités d'un arc, d'où l'on fasse partir la perpendiculaire.

10. Si de l'extrémité D de l'arc BD, on élève une perpendiculaire DG sur le rayon CD, jusqu'à la rencontre d'un autre rayon CB prolongé, la perpendiculaire DG se nomme la *tangente*, et le rayon prolongé CG la *sécante*, de l'arc BD.

11. La droite FH étant de même la tangente et CH la sécante de BF complément de BD, la première se nomme *cotangente* et la seconde *cosécante* de l'angle ACB. Par la même raison DG est la cotangente, et CG la cosécante de BF.

12. Pour abréger, on écrit R au lieu de *rayon*, sin. au lien de *sinus*, cos. pour *cosinus*; tang., cot., séc., coséc., au lieu de *tangente*, *cotangente*, *sécante*, *cosécante*; enfin sin. v. et cos. v., pour *sinus verse* et *cosinus verse*. Par exemple, sin. BD signifie le sinus de l'arc BD, et sin. BCD le sinus de l'angle BCD.

13. Nous écrirons aussi log. au lieu de *logarithme*, ∞ au lieu de l'*infini*; $a > b$ signifie a plus grand que b, et $a < b$ signifie a moins grand que b.

14. Enfin nous emploierons le signe δ (181), pour indiquer la variation (192), finie ou infinitésimale, d'une grandeur; l'abréviation *compl.* pour signifier le complément arithmétique (420); et le signe $\backsim$, emprunté de Gardiner, pour exprimer la *différence positive* entre deux quantités, c'est-à-dire pour indiquer que la plus petite doit être soustraite de la plus grande. Par exemple, $a \backsim b$ signifie $a - b$ quand on a $a > b$, et $b - a$ quand on a $a < b$. Ainsi $a \backsim b$ se prononcera *la différence positive* de a et de b, et $a \overset{+}{\backsim} b$, *la somme* ou *la différence positive* de a et de b.

15. Enfin je désigne souvent un angle par une seule lettre, lors

même que son sommet est commun à d'autres angles. Mais alors dans la figure je place entre les deux côtés de cet angle la lettre par laquelle je le désigne. Par exemple, fig. 1, l'angle C est la même chose que l'angle ACB.

16. Nous prévenons les Commençans que nous ferons un usage continuel des transformations suivantes, dont il serait trop long, et trop ennuyeux pour ceux qui sont plus avancés, de donner à chaque fois le développement. Si quelques lecteurs ne connaissent pas assez l'algèbre pour entendre ces transformations et se les être rendu familières, la meilleure voie pour y parvenir promptement, et pour vérifier la justesse de ces transformations, est de substituer aux lettres des nombres à volonté.

17. On ne change pas la valeur d'un rapport géométrique, lorsqu'on le multiplie ou qu'on le divise par une même quantité. Ainsi en général, $a : b :: 1 : \frac{b}{a} :: \frac{a}{b} : 1 :: am : bm :: \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$.

18. Toute fraction est un rapport géométrique. Ainsi $\frac{a}{b}$ est la même chose que $a : b$. De ces deux manières d'écrire, quelques Auteurs préfèrent la dernière.

De là il suit que la règle donnée pour les rapports convient à toute fraction.

19. Les proportions géométriques admettent toutes les transformations qui n'altèrent pas l'égalité entre le produit des termes moyens et celui des extrêmes. Ainsi la proportion $a : b :: c : d$ peut éprouver les changemens suivans :

$$a+b : a-b :: c+d : c-d$$
$$a \pm b : a :: c \pm d : c$$
$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$
$$a : a \pm b :: c : c \pm d$$
$$b : a \pm b :: d : c \pm d.$$

20. Le signe double $\pm$ signifie que si l'on adopte le signe $+$ dans le premier rapport d'une proportion, il faut aussi, dans le second rapport, prendre le signe positif. Il en est de même du signe négatif.

En général, dans les équations et les proportions, lorsqu'on

trouve répété le signe double $\pm$, ou $\mp$, il indique que si l'on prend le signe supérieur dans l'un des termes, il faut prendre de même le signe supérieur pour chacun des autres termes. On en doit dire autant du signe inférieur.

21. La proportion fondamentale $a : b :: c : d$, pouvant se changer en celle-ci, $a : c :: b : d$, il en résulte que les transformations ci-dessus (19), ont encore lieu en mettant c au lieu de b, et b au lieu de c.

22. Nous avons supposé le premier terme plus grand que le second, et parconséquent le troisième plus grand que le quatrième. Quand le contraire aura lieu, comme dans cette proportion, $2 : 4 :: 3 : 6$, on renversera la proportion, et on écrira $6 : 3 :: 4 : 2$; alors en la comparant avec la proportion générale $a : b :: c : d$, c'est-à-dire en faisant $a = 6$, $b = 3$, etc., on la trouvera susceptible de toutes les transformations indiquées ci-dessus.

23. Enfin si deux proportions ont ou les deux moyens, ou les deux extrêmes communs; si on a, par exemple, $a : b :: c : d$, et $a : m :: n : d$, alors $bc = mn$, et parconséquent $b : m :: n : c$, ou $m : b :: c : n$.

24. Si l'on multiplie ou qu'on divise deux proportions l'une par l'autre, terme à terme, les produits ou les quotiens sont encore en proportion. En combinant de ces deux manières l'analogie $m : n :: p : q$, avec l'analogie (19) $a : b :: c : d$, on aura

$$am : bn :: cp : dq, \text{ et } \frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q}, \text{ ou bien } \frac{m}{a} : \frac{n}{b} :: \frac{p}{c} : \frac{q}{d}.$$

Par la même raison, on aura $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$, et parconséquent $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$.

25. Multiplier ou diviser une équation par une même quantité, ajouter une même quantité à chacun de ses membres, ou l'en soustraire, n'altère point l'équation. Soit $ad = bc$; on aura $amd = bmc$, et $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$, et $ad + m = bc + m$, et $ad - n = bc - n$.

26. Pour introduire un facteur sous le signe radical, il faut l'élever à la puissance indiquée par l'exposant du radical, et le multiplier par tous les termes contenus sous le radical. Réciproquement, si l'on veut faire sortir une quantité contenue sous le radical, il faut diviser par cette quantité tous les termes sous le

radical, et faire précéder le radical par la racine de cette même quantité. Par exemple, $\frac{a}{b}\sqrt{m^2+n^2} = \frac{1}{b}\sqrt{a^2m^2+a^2n^2}$ $= a\sqrt{\frac{m^2+n^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2m^2+a^2n^2}{b^2}} = \frac{an}{b}\sqrt{\frac{m^2}{n^2}+1} = \frac{am}{b}$ $\sqrt{1+\frac{n^2}{m^2}}$.

27. Si la quantité à faire sortir était un diviseur, on multiplierait l'expression sous le radical, au lieu de la diviser. Ainsi $\sqrt{m^2+\frac{n^2}{r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{m^2r^2+n^2}$.

28. J'ai vu des Commençans arrêtés à de certaines transformations, parcequ'ils s'efforcent de les concevoir, au lieu de penser à les vérifier. Je suppose, par exemple, que nous ayons substitué ab à la quantité $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; en effectuant les quarrés qui ne sont qu'indiqués, et faisant la soustraction, on reconnaîtra qu'en effet cette expression composée se réduit à ab. On reconnaîtra de même que a^2+b^2 est la même chose que $2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. En pareil cas, il faut faire les opérations indiquées dans une expression, quand on veut la vérifier et l'entendre.

CHAPITRE II.

Valeur relative des lignes trigonométriques.

Fig. 1. 29. LORSQUE BCD $= 45°$, le triangle rectangle CDG est isoscèle, et DG $=$ CD. Donc tang. $45° = R =$ cot. $45°$, (11).

30. Mais nous verrons (49) que tang. 90° est infinie, tandis que l'arc de 90° n'est que le double de l'arc de 45°. On peut donc observer déjà l'extrême disproportion entre la marche des angles et celle de leurs tangentes.

31. D'après la définition donnée (5), il est clair que le sinus

d'un arc n'est que la moitié de la corde de l'arc double ; on sait d'ailleurs que la corde de 60° est égale au rayon : donc $\sin. 30° = \frac{R}{2}$.

32. Mais nous verrons (49) que $\sin. 90° = R$; (d'où le rayon prend aussi le nom de *sinus droit*, *sinus total*). Qu'on observe donc encore que *les sinus ne croissent pas dans la même proportion que les arcs.*

33. En supposant toujours DCF = 90°, les triangles semblables BCA, GCD, FCH donnent les proportions suivantes :

$$AC : AB :: CD : GD, \quad GD : CD :: CF : FH,$$
$$AC : BC :: CD : CG, \quad AB : BC :: CF : CH.$$

En substituant les dénominations trigonométriques, on aura, pour un arc quelconque BD, que nous désignerons généralement par A, les proportions qui suivent :

34. $\text{Cos.} A : \sin. A :: R : \text{tang.} A = \frac{R \times \sin. A}{\cos. A}$.

35. $\text{Tang.} A : R :: R : \cot. A = \frac{RR}{\text{tang.} A} = \frac{R \times \cos. A}{\sin. A}$, (34).

36. $\text{Cos.} A : R :: R : \text{séc.} A = \frac{RR}{\cos. A}$.

37. $\text{Sin.} A : R :: R : \text{coséc.} A = \frac{RR}{\sin. A}$.

38. L'expression générale R du rayon suffit pour faire voir que les équations trigonométriques sont vraies, quelle que soit la grandeur du cercle dans lequel on les considère. *La valeur du rayon est donc arbitraire*, pourvu qu'une fois fixée, on la conserve constamment la même ; autrement toutes les lignes trigonométriques varieraient avec le rayon. Si au lieu de BC on prend pour rayon CG, et qu'on décrive l'arc GQ, le sinus de l'angle C ne sera plus BA, mais GD. Or BA : BC :: GD : CG. On trouvera la même chose pour toute autre ligne. Donc *le rapport entre une ligne trigonométrique quelconque et le rayon, est constant*, puisqu'on a toujours (18), $\frac{BA}{BC} = \frac{GD}{GC}$.

39. Donc en général, soit L une ligne trigonométrique pour

un rayon donné R ; soit L' la même pour un autre rayon R' ; on aura toujours R : L :: R': $L' = \frac{LR'}{R} = LR'$, si on fait $R = 1$, valeur qu'on assigne communément au rayon, et avec grande raison, parceque cette valeur simplifie beaucoup les calculs et les expressions. Nous verrons par la suite comment, une valeur étant une fois donnée au rayon, on trouve la valeur de toute ligne trigonométrique relativement au rayon.

40. Observons dans les équations (35, 36, 37), qu'étant donnée la valeur du rayon, celle de la cotangente dépend de celle de la tangente, celle de la sécante de celle du cosinus, et celle de la cosécante de celle du sinus, et réciproquement.

41. De là il est facile de comprendre pourquoi dans la Trigonométrie on ne fait presque jamais usage de la sécante ni de la cosécante ; c'est qu'il est toujours aisé de leur substituer le cosinus et le sinus par le moyen des équations ci-dessus (36, 37). On pourrait de même supprimer l'usage des cotangentes ; mais on verra que souvent elles se trouvent commodes dans la pratique.

42. Par la propriété si connue de l'hypoténuse, les triangles
Fig. 1. rectangles CAB, CDG, CFH donnent les équations suivantes : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = CD^2 = CG^2 - DG^2 = CF^2 = CH^2 - FH^2$; ou bien $R^2 = \sin.^2A + \cos.^2A = \text{séc.}^2A - \text{tang.}^2A = \text{coséc.}^2A - \cot.^2A$.

43. Donc $\text{séc.}A = \sqrt{(R^2 + \text{tang.}^2A)} = \frac{RR}{\cos. A}$, (36).

44. Et $\text{coséc.}A = \sqrt{(R^2 + \cot.^2A)} = \frac{RR}{\sin. A}$, (37).

45. Substituons, dans l'analogie (34), la valeur de cos. A tirée de la seconde équation (43) ; nous aurons $\sin. A = \frac{R \times \text{tang.} A}{\sqrt{(RR + \text{tang}^2.A)}}$.

46. Et mettant de même dans l'équation $\cot. A = \frac{R \times \cos. A}{\sin. A}$, (35), la valeur de sin. A prise dans la seconde équation (44), nous aurons $\cos. A = \frac{R \times \cot. A}{\sqrt{(RR + \cot.^2A)}}$.

47. De même en mettant alternativement dans l'analogie (34), les valeurs de sin. A et de cos. A tirées de l'équation $R^2 = \sin^2 A$

$+\cos.^2 A$, (42), on a les équations suivantes :

$$\text{tang. } A = \frac{R \times \sin. A}{\sqrt{(RR - \sin.^2 A)}} = \frac{R\sqrt{(RR - \cos.^2 A)}}{\cos. A}.$$

48. Si l'angle C croît, et devient, par exemple, MCD, on voit que le sinus ML, la tangente DK et la sécante CK deviennent aussi plus grandes qu'elles n'étaient pour l'angle BCD; et qu'au contraire le cosinus CL, la cotangente FI et la cosécante CI diminuent. Fig. 1.

49. Si l'angle augmente de manière qu'il soit de 90°, il est évident, à l'inspection de la figure, que le sinus et la cosécante deviennent égaux au rayon, avec lequel ils se confondent; que le cosinus et la cotangente se réduisent à zéro; enfin que la tangente et la sécante sont alors infinies, puisque, devenues parallèles entre elles, elles ne peuvent plus se rencontrer (10).

50. Considérons maintenant l'angle obtus. Soit cet angle DCO. Dans ce cas, la perpendiculaire (5) abaissée du point O, tombe sur le prolongement CP du rayon DC, et l'autre perpendiculaire (10) élevée au point D, ne peut rencontrer l'autre rayon OC, s'il n'est prolongé dans la direction CU.

51. Donc, suivant les définitions (5), OP est le sinus et CP le cosinus de l'arc DFO. Et ces lignes OP, CP sont aussi, toujours d'après les mêmes définitions, le sinus et le cosinus de l'arc TO, qui est le *supplément* de l'arc DFO, puisqu'ils forment ensemble la demi-circonférence.

52. La tangente de l'angle DCO est DU; la sécante est CU, (10). Or DU est aussi la tangente, et CU la sécante, de l'angle DCZ, supplément de l'angle DCO.

53. *Le complément de l'angle obtus* DCO est son excès FCO sur l'angle droit. Donc (11), FN est la cotangente, et CN la cosécante de l'arc DFO. Mais ces mêmes lignes sont aussi cotangente et cosécante de l'angle TCO, supplément de l'angle DCO.

54. On peut conclure en général, que *les lignes trigonométriques d'un arc et celles de son supplément sont égales entre elles*, en exceptant néanmoins le sinus verse, comme on le verra (120). Je dis *égales*, et non *identiques*, parcequ'un même arc, par exemple DFO, a deux supplémens TO, DZ; et encore parceque les lignes de même nom sont doubles (9) pour un même arc.

55. De cette égalité, de cette double dépendance des lignes trigonométriques, semble résulter l'inconvénient très-grave de ne pouvoir reconnaître si une ligne trigonométrique donnée appartient à l'angle aigu, ou bien à son supplément. Mais nous verrons bientôt comment les Géomètres sont parvenus à lever l'incertitude à cet égard, au moins pour la plupart des lignes trigonométriques.

56. Observons à présent quels changemens éprouvent ces lignes, à mesure que l'angle augmente. Celles qui croissaient avec cet angle, lorsqu'il était aigu, décroissent quand il est obtus. Celles qui au contraire diminuaient dans le premier cas, augmentent dans le second : conséquences nécessaires de l'égalité énoncée (54).

Fig. 1. 57. Par l'inspection de la figure, et d'après ce que nous avons dit, il est facile de comprendre que si l'arc croît jusqu'à devenir de 180°, comme DFT, le sinus et la tangente deviennent nuls, la cotangente et la cosécante infinies, le cosinus et la sécante égaux au rayon.

58. En Astronomie, les longitudes et les ascensions droites des astres se comptent de 0° jusqu'à 360°. On a donc besoin des lignes trigonométriques, même dans le troisième et dans le dernier quart du cercle. En négligeant, pour abréger, ce qui concerne la sécante et la cosécante (41), et recourant aux définitions (5, 10), on reconnaîtra sans peine qu'un arc plus grand que de 180°, comme DFTS, a RS pour sinus, CR pour cosinus, et pour tangente la ligne DK, à laquelle correspond pour cotangente la ligne FI, (48).

59. Lorsque l'arc est exactement de 270°, le sinus devient égal au rayon, la tangente infinie ; le cosinus et la cotangente se réduisent à zéro.

60. Dans le dernier quart du cercle, c'est-à-dire, lorsqu'un arc quelconque, comme DFTVZ, embrassera plus des trois quarts du cercle, le sinus sera la perpendiculaire abaissée du point Z sur le rayon CD ; le cosinus, la partie de ce rayon comprise entre le centre et la perpendiculaire ; la tangente sera DU, la sécante CU ; et à ces deux lignes correspondent (52, 53) FN pour cotangente, et CN pour cosécante.

61. Enfin lorsque l'arc devient de 360°, il arrive au point où il avait pris naissance. Le sinus et la tangente deviennent alors nuls, le cosinus égal au rayon, et la cotangente infinie.

62. On voit que dans un même cercle chaque ligne trigono-

métrique se retrouve d'une même grandeur quatre fois, c'est-à-dire dans chaque quart du cercle. Examinons comment on parvient, ainsi que nous l'avons dit (55), à distinguer les lignes trigonométriques d'un quart de cercle, de celles du même nom dans un autre quart du même cercle.

63. Dans la théorie des courbes, CA se nomme l'*abscisse*, ligne qui a son origine au centre; AB est l'*ordonnée*. Le rapport entre ces deux droites est ce qu'on appelle l'*équation de la courbe*. Ainsi l'*équation du cercle* est (42), $AB^2 = BC^2 - AC^2$; puisque, quel que soit (38) le rayon BC, cette équation donne la valeur de toute ordonnée AB correspondante à une abscisse quelconque CA. De chacun des points, en nombre infini, de l'*axe* CD, supposez qu'on élève les ordonnées correspondantes; les points extrêmes B de ces ordonnées formeront la courbe DBF. Une courbe quelconque s'appelle *le lieu géométrique* de l'équation qui sert ainsi à engendrer cette courbe.

64. Cela posé, pour que l'équation serve à décrire la courbe entière, exprimons-la comme il suit : $AB = \pm \sqrt{(BC^2 - AC^2)}$. Tout quarré a deux racines égales, l'une positive, et l'autre négative. L'équation fournit donc, pour chaque abscisse CA, deux ordonnées égales, l'une positive, l'autre négative. Toutes deux doivent être perpendiculaires à l'axe, au même point A, où se termine l'abscisse; elles ne peuvent donc se trouver que des deux côtés opposés de l'axe; par exemple, comme les ordonnées LM, LY. Ordinairement les ordonnées positives se prennent en dessus, telles que seraient AB, LM; et par conséquent les ordonnées inférieures, telles que LY, sont négatives.

Mais tout cela ne sert encore qu'à engendrer la demi-circonférence FDV. Pour former l'autre demi-circonférence FTV, distinguons de même les abscisses en positives et négatives, puisque leur origine au centre constitue des lignes en sens différent, du demi-axe CD au demi-axe CT, mais égales entre elles, prises deux à deux. Prenons à la droite du centre les positives, comme CA; on aura à gauche les négatives, telles que CP. Et en substituant la valeur négative des abscisses dans l'équation, on en déduira toutes les ordonnées, telles que PO et RS, qui engendrent la demi-circonférence FTV.

Fig. 1. 65. Quoique l'équation du cercle ne paraisse pas différer, soit qu'on prenne les abscisses comme positives, ou qu'on les emploie comme négatives, puisque $PO^2 = CO^2 - (-CP)^2 = CO^2 - CP^2$, forme qui est la même que celle de l'autre équation $AB^2 = BC^2 - AC^2$; cela n'arrive pas néanmoins pour toutes les courbes: mais c'est ce qui a lieu nécessairement dans la génération de celles qui ont une circonférence terminée, et divisée en deux parties égales et semblables.

66. De la théorie précédente appliquée aux lignes trigonométriques, il résulte que, dans DBF pris pour premier quart du cercle, les sinus et les cosinus sont positifs; dans le second FOT, les sinus sont positifs, les cosinus négatifs; les uns et les autres sont négatifs dans le troisième TSV; enfin, dans le quatrième VYD, le sinus est négatif, et le cosinus positif.

67. C'est du sinus et du cosinus que se déduisent les règles pour les signes des autres lignes trigonométriques. En effet on a d'abord (34), tang. $A = \frac{R \times \sin. A}{\cos. A}$. Donc, dans le premier et le troisième quart du cercle, où sin. A et cos. A ont le même signe, la tangente est positive; elle est négative dans le second et le quatrième, où sin. A et cos. A ont des signes différens.

68. Des équations (35, 36, 37), on conclura de même que la cotangente a toujours le signe de la tangente, la sécante celui du cosinus, et la cosécante celui du sinus.

69. Quelques Auteurs établissent la diversité des signes pour les lignes de même dénomination, sur leur position diamétralement opposée, comme celle des lignes CA et CP, ou DG et DU. Mais il n'est pas toujours vrai que des lignes de direction contraire aient des signes différens (*D'Alembert*, *Opuscules*, tom. VIII, pag. 271 et suiv.), ni que la différence du signe n'appartienne pas à des lignes ayant leur divergence d'un même côté, (271).

70. D'autres, que j'ai suivis dans la première édition de cet Ouvrage, ont considéré les signes comme devant changer au point où une ligne passe ou par zéro, ou par l'infini. Par exemple, le cosinus CA s'anéantit au point C, avant de devenir successivement CP; et la tangente DG passe par l'infini quand l'arc DB devient DF, avant de devenir DO. Mais des exemples donnés par Euler (*Calc. différent.* 98 à 101), il suit qu'à la vérité une quantité ne peut

changer de signe, à moins qu'elle ne passe par zéro ou par l'infini, mais qu'il n'est pas vrai de même que le signe change toujours dans ce passage.

71. J'ai donc eu recours à l'équation de la courbe, comme à un fondement solide et sans objection.

72. La table suivante servira de récapitulation pour ce que nous venons de dire, et sera plus commode à consulter dans la pratique. On verra, par cette table, dans quels points les trois lignes trigonométriques les plus usitées sont égales à zéro, à l'infini, ou au rayon; le rayon y est exprimé par l'unité (39). La cotangente, la sécante et la cosécante sont omises (41) : on reconnaîtra leur valeur dans ces mêmes points, au moyen des équations (35, 36, 37); et leur signe dans quelque point que ce soit, par la règle (68). En désignant une ligne égale à zéro ou à l'infini, je lui conserve le signe qu'elle avait avant d'arriver à ce terme; quoiqu'on ne puisse dire quel signe convient en pareil cas.

73. *Table des Signes des lignes trigonométriques dans les quatre quarts du Cercle.*

Arc.	Sinus.	Cosinus.	Tang.
A 0° ou à 360°	-0	$+1$	-0
Depuis 0° jusqu'à 90°	$+$	$+$	$+$
à 90°	$+1$	$+0$	$+\infty$
Depuis 90° jusqu'à 180°	$+$	$-$	$-$
à 180°	$+0$	-1	-0
Depuis 180° jusqu'à 270°	$-$	$-$	$+$
à 270°	-1	-0	$+\infty$
Depuis 270° jusqu'à 360°	$-$	$+$	$-$

74. J'appelle *arc négatif* l'arc décrit par une opération en sens contraire, relativement à l'arc que je considère comme positif. DB, DZ seront, par exemple, l'un positif, l'autre négatif, si leur origine est au point D, c'est-à-dire, si l'on est parti de ce point pour décrire l'un et l'autre. De là il suit que si on prend pour positifs les quarts de cercle décrits comme nous l'avons dit ci-dessus, de D en F, en T, en V et en D; les quarts décrits au contraire de D en V, en T, en F et en D, seront négatifs.

75. Par conséquent les signes des lignes trigonométriques pour un arc dans le premier quart de cercle négatif, seront ceux des mêmes lignes dans le quatrième quart positif. Donc *pour un arc négatif, moindre que de 90°, le sinus et la tangente sont négatifs, et le cosinus est positif.* Ce que j'exprime ainsi :

$\sin. -A = -\sin. A$, $\text{tang.} -A = -\text{tang.} A$, $\cos. -A = +\cos. A$.

76. En comparant le second quart de cercle négatif au troisième positif, on trouvera $\sin. -A = -\sin. A$, $\text{tang.} -A = +\text{tang.} A$, $\cos. -A = -\cos. A$. On voit que l'angle obtus négatif change le signe du cosinus et de la tangente de l'angle aigu, et non le signe du sinus; ce que nous avons trouvé avoir lieu de même pour les angles obtus positifs (66, 67).

77. Posons donc ce principe général, d'une grande utilité : *Toutes les formules trigonométriques doivent être construites pour les arcs positifs, et qui n'excèdent pas* 90°; puisqu'elles serviront également pour les arcs plus grands et pour les arcs négatifs, en changeant seulement les signes des lignes trigonométriques, conformément à la table (73), ou aux règles (75, 76).

78. Nous démontrerons rigoureusement (290) la théorie précédente des arcs négatifs. En attendant, nous nous en prévaudrons pour abréger les transformations analytiques; ce à quoi cette théorie contribue souvent d'une manière efficace. Cependant nous aurons soin d'en montrer la vérité *à posteriori*, par quelques exemples qui pourront guider pour les autres cas.

79. En faisant $R = 1$, on a (31), $\sin. 30° = \frac{1}{2}$; mais (42), $\cos.^2 30° = R^2 - \sin.^2 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$: donc $\cos. 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, (27).

80. De même, puisqu'on a (42), $R^2 = \sin.^2 45° + \cos.^2 45° = 2 \sin.^2 45° = 1$, (7), on aura $\sin. 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

81. C'est à-peu-près en suivant les principes qui nous ont fait trouver la valeur du sinus et du cosinus de 30° et de 45°, que les géomètres ont calculé, par le moyen d'autres formules que nous verrons en leur lieu, la valeur du sinus, de la tangente et de la sécante de tout arc depuis 0° jusqu'à 90°, (62), de degré en degré, et même de minute en minute. Les tables qui contiennent ces valeurs donnent donc le rapport *constant* (38) qui règne entre le rayon du cercle et chacune des lignes trigonométriques.

CHAPITRE III.

Idée préliminaire de la résolution des triangles rectilignes.

82. Les Commençans sont ordinairement rebutés dans l'étude des sciences par les difficultés que leur présente d'abord une longue théorie élémentaire, dont ils n'apperçoivent pas encore l'utilité pratique. Ce chapitre sera consacré à leur faire pressentir les usages et les applications de la Trigonométrie.

Puisque AB est le sinus et AC le cosinus de l'arc BD décrit d'un rayon BC, on a évidemment les analogies suivantes : Fig. 1.

$$BC : AB :: R : \sin. C, \quad BC : AC :: R : \cos. C.$$

Mais dans tout triangle rectangle, on peut concevoir que l'hypoténuse décrive un arc tel que BD, qui rencontre un des côtés prolongé tel que (CA + AD). Donc *dans tout triangle rectangle, l'hypoténuse est au rayon comme un côté est au sinus de l'angle opposé*, ou bien, *comme un côté est au cosinus de l'angle adjacent.*

83. On croirait, au premier coup-d'œil, qu'on ne peut tirer aucun fruit de ces proportions qui semblent contenir un cercle vicieux, comme cette analogie 2 : 1 :: 2 : 1 ; puisqu'elles ne sont absolument que la répétition des définitions données (5). Mais qu'on se rappelle que le rapport R : sin. C (il en faut dire autant du rapport R : cos. C) est un rapport *constant* (38), quelle que soit la grandeur de l'hypoténuse qui représente ici le rayon, pourvu seulement que l'angle C ne change point. On a de même, par exemple, GC : GD :: R : sin. C. L'art de la Trigonométrie consiste donc en ce que la connaissance de l'un des angles aigus dans un triangle rectangle, suffit pour faire connaître le rapport qui existe entre l'hypoténuse et chacun des côtés. De là il résulte que si, outre l'angle, on connaît la valeur absolue de l'un des côtés, la Trigonométrie donne, pour ainsi dire d'un trait de plume, la valeur absolue de l'hypoténuse, et *vice versâ* : ce qu'on verra clairement dans les exemples suivans.

Fig. 1. 84. Supposons que CL soit une distance de trois lieues déjà connue, et qu'on desire de connaître la distance CM qu'on ne peut mesurer avec la toise, parcequ'une rivière ou quelque autre obstacle s'y oppose. Pour y parvenir sans abandonner le point C, et sans fatigue, que l'on mesure de combien de degrés est l'angle MCL; ce qui est très-facile, comme nous le verrons en son lieu : supposons que cet angle se trouve de 60°; alors cos. MCL = cos. 60° = (7) sin. 30° = $\frac{1}{2}$ R, (31). On aura par conséquent (82), MC : CL :: R : cos. MCL :: R : $\frac{1}{2}$ R :: 1 : $\frac{1}{2}$, (17). Donc la distance MC est double de CL, ou MC = 6 lieues.

85. De même, en supposant MCL de 60°, si la distance connue était CD, que l'on eût, par exemple, CD = 9 lieues, on trouverait 18 lieues pour la valeur de CK.

86. Si l'angle mesuré est C et de 36° 52′, que la distance connue, désignée par AC, soit de six lieues, et que l'on cherche BC; puisqu'on a par les tables (81), R : cos. 36° 52′ :: 1 : 0,8, on aura, (82), BC : AC :: R : cos. C :: 1 : 0,8. Parconséquent BC $= \frac{AC}{0,8} = \frac{6}{0,8} = 7,5$. Donc la distance BC est de 7 lieues et $\frac{1}{2}$.

87. Si au lieu de AC la distance connue était CD, de 9 lieues, et CG la distance cherchée, on aurait CG : CD :: 1 : 0,8, ou CG $= \frac{CD}{0,8} = \frac{9}{0,8} = 11,25$. Donc CG = 11 lieues $\frac{1}{4}$.

Ces exemples suffiront pour donner une idée de la résolution des triangles rectangles.

Fig. 2 et 3. 88. Si on a un triangle obliquangle, comme ABC, il est à présent facile de le résoudre, en le convertissant en deux triangles rectangles BCD, ACD, par le moyen de la perpendiculaire CD, menée de l'un quelconque des angles, comme C, sur le côté opposé AB prolongé, s'il est nécessaire, comme dans la figure 3. On a alors (82), R : sin. B :: BC : CD, et R : sin. A :: AC : CD.

Donc(23)

BC : AC :: sin. A : sin. B.

89. Si on réfléchit que (fig. 3), sin. A = sin. CAD = sin. CAB, (54), et que les fig. 2 et 3, dans lesquelles nous n'avons fixé ni la grandeur des angles ni celle des côtés, représentent dès-lors tout triangle

obliquangle, quel qu'il soit (ce qu'on doit remarquer une fois pour toutes), on conclura de la dernière proportion cette règle générale : *les côtés d'un triangle rectiligne sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

90. Cette règle s'étend évidemment aux triangles rectangles ; puisque, par exemple, dans la proportion R : sin. A :: AC : CD, R est le sinus (32) de l'angle droit D opposé à l'hypoténuse AC.

91. Il est aisé de reconnaître par cette même règle et par celle qui a été donnée (32), que, quoique le plus grand côté soit toujours opposé au plus grand angle, et *vice versâ*, les côtés ne sont cependant pas en proportion avec les angles opposés. Il était donc nécessaire, pour résoudre les triangles, de recourir aux lignes trigonométriques.

92. Exemple de la résolution du triangle obliquangle. Soit connue la distance BC, de 1000 mètres, et par le moyen d'instrumens convenables, et dont nous parlerons dans la suite, soient déterminés A de 53° 8', et B de 31° 20'. On a dans les tables sin. 53° 8' $= 0{,}8$; et sin. 31° 20' $= 0{,}52$. Donc (88), $AC = \frac{BC \times \sin. B}{\sin. A} = \frac{1000 \times 0{,}52}{0{,}8} = \frac{520}{0{,}8} = 650$. Ainsi, sans mesurer en effet (ou en mètres) la distance AC, la Trigonométrie fait connaître qu'elle est de 650 mètres. Fig. 7.

Ce n'est au surplus qu'un essai que nous donnons de la solution d'un seul cas de la Trigonométrie rectiligne obliquangle. Nous verrons par la suite comment on peut résoudre tous les cas, toutes les combinaisons.

CHAPITRE IV.

Valeurs relatives des lignes trigonométriques appartenantes à la somme ou à la différence de deux arcs.

93. **Problème.** *Connaissant les sinus et les cosinus de deux arcs, trouver les sinus et les cosinus de la somme et de la différence de ces deux arcs.*

De ce que dans tout triangle rectiligne la somme de deux angles
Fig. 2. est toujours le supplément du troisième, c'est-à-dire, de ce que dans un triangle ABC, par exemple, $A+B=180°-ACB$, il suit (54) que $\sin.ACB=\sin.(A+B)$. Cela posé, la solution du problème est facile par la seule Trigonométrie, et nous n'aurons recours, pour trouver cette solution, ni aux triangles semblables, ni à des figures compliquées.

94. En effet (89), $AC : \sin.B :: AB : \sin.ACB=\frac{AB\times\sin.B}{AC}=\sin.(A+B)$. Mais en supposant qu'on mène CD perpendiculaire sur le côté AB, on a (82), $BC : CD :: R : \sin.B=\frac{R\times CD}{BC}$. En substituant cette valeur de sin. B dans l'équation précédente (nous ferons à l'avenir ces substitutions sans en prévenir, parcequ'elles se présentent d'elles-mêmes), on aura $\sin.(A+B)=\frac{R\times CD\times AB}{AC\times BC}$. Or $AB=BD+AD$. Donc $\sin.(A+B)=\frac{R\times CD\times BD}{AC\times BC}+\frac{R\times CD\times AD}{AC\times BC}$. Mais (82), $\frac{CD}{AC}=\frac{\sin.A}{R}$, $\frac{BD}{BC}=\frac{\cos.B}{R}$, $\frac{CD}{BC}=\frac{\sin.B}{R}$, et $\frac{AD}{AC}=\frac{\cos.A}{R}$. Donc $\sin.(A+B)=\frac{\sin.A\cos.B+\cos.A\sin.B}{R}$.

95. Si on applique cette solution à la fig. 3, on observera que
Fig. 3. $AB=BD-AD$; que $ACB=180°-CAB-B=CAD-B$, et que dans ce cas-ci l'angle CAD correspond à l'angle A employé dans les équations $\frac{CD}{AC}=\frac{\sin.A}{R}$ et $\frac{AD}{AC}=\frac{\cos.A}{R}$. En faisant les changemens qui résultent de ces remarques, la démonstration précédente donnera

$$\sin.(A-B)=\frac{\sin.A\cos.B-\cos.A\sin.B}{R}.$$

96. Mais cette formule se trouve en un instant, seulement en faisant B négatif dans la formule précédente. Car alors $\sin.(A+B)$ devient $\sin.(A-B)$, et sin. B se change en $-\sin.B$, (75); résultat aussi prompt qu'évident, et que nous avons fait pressentir (78).

97. Faisons maintenant $A=90°-C$; nous aurons $\sin.(A-B)=\sin.(90°-C-B)=\cos.(C+B)$, (7); $\sin.A=\cos.C$, et

cos. A = sin. C. Donc de la formule (95) se déduit celle-ci : cos. (C + B) = (cos. C cos. B — sin. C sin. B) : R, (18).

98. Mais A et C sont des expressions également indéterminées, susceptibles chacune de toutes les valeurs possibles. On peut donc écrire A au lieu de C dans la dernière équation, pour conserver l'uniformité des lettres, et on aura l'équation qui suit :

99. $$\cos.(A+B) = \frac{\cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B}{R}.$$

100. Faisons B négatif dans cette formule ; nous aurons aussitôt (75),

$$\cos.(A-B) = \frac{\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B}{R}.$$

101. La solution de ce problème a produit quatre équations qui sont d'un usage infini dans la Trigonométrie. Il serait hors de propos de les citer continuellement : pour nous en dispenser, nous recommanderons de faire ensorte de les retenir ; ce qui est très-facile, puisqu'en substance elles se réduisent à deux, et que c'est la seule différence des signes, qui de ces deux équations en forme quatre.

102. Il est facile de voir que les mêmes équations servent à développer les valeurs des sinus et des cosinus de la somme et de la différence d'un nombre d'arcs quelconque. Par exemple, $\sin.(A+B+C) = \sin.(A+\overline{B+C}) = \sin. A \cos.(B+C) + \cos. A \sin.(B+C) = \sin. A \cos. B \cos. C - \sin. A \sin. B \sin. C + \cos. A \sin. B \cos C + \cos. A \cos. B \sin. C$. De même, $\sin.(A-B+C) = \sin.(A-\overline{B-C}) = \sin. A \cos.(B-C) - \cos. A \sin.(B-C) = \sin. A \cos. B \cos. C + \sin. A \sin. B \sin. C - \cos. A \sin. B \cos. C + \cos. A \cos. B \sin. C$.

103. A l'avenir nous emploierons constamment 1 au lieu de R, (39). Dans les cas où le rayon diffère de celui des tables, comme il arrive par exemple dans la résolution des équations du 3e degré ; voici la règle pour l'introduire convenablement dans une formule trigonométrique quelconque.

104. Dans chacune des proportions et équations fondamentales que nous avons vues jusqu'ici, et desquelles se déduisent les plus composées, on a pu remarquer que chaque terme contient un nombre

égal de facteurs. Par exemple, dans les équations (42), chaque terme est de deux *dimensions*, c'est-à-dire formé du produit de deux facteurs, puisque $BC^2 = BC \times BC$, $AB^2 = AB \times AB$, et ainsi des autres. De même, en multipliant par $AC \times BC$, on a (94), $AC \times BC \times \sin.(A+B) = R \times CD \times BD + R \times CD \times AD$; ce qui donne trois dimensions pour chaque terme. On appelle *équation homogène* ou de *dimensions égales* celle qui renferme dans chaque terme un nombre égal de facteurs algébriques ou géométriques, (sans avoir d'ailleurs égard aux coefficiens numériques). Si on conservait la lettre R dans toutes les opérations trigonométriques, on trouverait, dans chaque formule, tous les termes d'égale dimension. Il sera donc facile de les rendre tels, au besoin, en joignant à chacun d'eux le facteur R élevé à la puissance convenable pour les rendre homogènes. Par exemple, en nommant x, y, deux lignes trigonométriques, soit une équation de cette forme, $4x^3 = 3x - y + 2$, dans laquelle x^3 est de trois dimensions, x et y d'une seule, et 2 sans aucune dimension; pour introduire régulièrement le rayon dans cette équation, il faut écrire $4x^3 = 3R^2x - R^2y + 2R^3$. Telle eût été l'équation en elle-même, si l'on n'en eût pas d'abord fait disparaître R en y substituant l'unité.

105. On ne connaîtra que peu à peu, et dans le cours de la Trigonométrie, l'utilité des formules multipliées que nous allons donner.

$\text{Tang.}(A+B) = (34), \frac{\sin.(A+B)}{\cos.(A+B)} = \frac{\sin. A \cos. B + \cos. A \sin. B}{\cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B}$. En divisant tous les termes de cette dernière fraction (17), d'abord par cos. A cos. B, et ensuite par sin. A sin. B, on aura

$$\text{tang.}(A+B) = \frac{\text{tang. } A + \text{tang. } B}{1 - \text{tang. } A \text{ tang. } B} = \frac{\cot. B + \cot. A}{\cot. B \cot. A - 1}.$$

106. En procédant de la même manière sur les valeurs de $\frac{\sin.(A-B)}{\cos.(A-B)}$, (95,100), (ou encore en faisant B négatif (75) dans la formule que nous venons de donner), on trouvera

$$\text{tang.}(A-B) = \frac{\text{tang. } A - \text{tang. } B}{1 + \text{tang. } A \text{ tang. } B} = \frac{\cot. B - \cot. A}{\cot. B \cot. A + 1}.$$

107. Par de semblables opérations, on aura

$$\frac{\sin.(A+B)}{\sin.(A-B)}=\frac{\text{tang.}A+\text{tang.}B}{\text{tang.}A-\text{tang.}B}=\frac{\cot.B+\cot.A}{\cot.B-\cot.A}.$$

108. En divisant de même d'abord par sin. B cos. A, et ensuite par sin. A cos. B, les valeurs de $\frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A-B)}$, (99, 100), on aura

$$\frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A-B)}=\frac{\cot.B-\text{tang}.A}{\cot.B+\text{tang}.A}=\frac{\cot.A-\text{tang}.B}{\cot.A+\text{tang}.B}.$$

109. Soit maintenant (98), B = A. Les trois formules (94, 99, 105) se convertiront en celles qui suivent :

110. $\text{Sin}.2A=2\sin.A\cos.A.$

111. $\text{Cos}.2A=\cos.^2A-\sin.^2A.$

112. $\text{Tang}.2A=\frac{2\,\text{tang}.A}{1-\text{tang}.^2A}=\frac{2\cot.A}{\cot.^2A-1}.$

113. Dans ces trois équations, l'arc employé dans le premier membre est double de l'arc que contient le second membre. Donc elles peuvent encore s'écrire comme il suit :

114. $\text{Sin}.A=2\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}A.$

115. $\text{Cos}.A=\cos.^2\tfrac{1}{2}A-\sin.^2\tfrac{1}{2}A.$

116. $\text{Tang}.A=\frac{2\,\text{tang}.\frac{1}{2}A}{1-\text{tang}.^2\frac{1}{2}A}=\frac{2\cot.\frac{1}{2}A}{\cot.^2\frac{1}{2}A-1}.$

117. En substituant alternativement, dans l'équation (115), les valeurs (42) de $\cos.^2\tfrac{1}{2}A$ et de $\sin.^2\tfrac{1}{2}A$, on a encore

$$\cos.A=1-2\sin.^2\tfrac{1}{2}A=2\cos.^2\tfrac{1}{2}A-1.$$

118. De là il suit que $2\sin.^2\tfrac{1}{2}A=1-\cos.A=\sin.\text{v}.A$, (5).

119. Les deux premières de ces expressions sont celles qu'on emploie au lieu du *sinus verse*, dont peu d'Auteurs font usage dans la Trigonométrie.

120. Il convient néanmoins de faire observer ici l'exception annoncée (54). Si A est obtus, cos. A est négatif (66); donc alors sin. v. A = 1 + cos. (180° — A), comme on le verra (121). Donc sin. v. DFO = DC + CP = DP.

121. Pour faire disparaître toute erreur, toute incertitude dans des cas semblables, voici le moyen de mettre la vérité en évidence, et de se diriger avec sureté pour les opérations analytiques en usant des signes convenables. Soit *a* le supplément de A, ou

$A = 180° - a$; on aura (118), sin. v. $A = 1 - \cos. A = 1 - \cos.(180° - a)$. Mais (100), $\cos.(180° - a) = \cos. 180° \cos. a + \sin. 180° \sin. a = -\cos. a$, (73). Donc $1 - \cos.(180° - a) = 1 + \cos. a = 1 + \cos.(180° - A)$, comme nous l'avons dit (120).

122. Si l'on divise par tang. $\frac{1}{2}$ A, le numérateur et le dénominateur du second membre de la première équation (116), et qu'on se souvienne que $\frac{1}{\text{tang.}} = \text{cot.}$, (35), on aura

$$\text{tang. } A = \frac{2}{\text{cot. } \frac{1}{2} A - \text{tang. } \frac{1}{2} A}.$$

123. De là se déduit $\text{cot. } \frac{1}{2} A - \text{tang. } \frac{1}{2} A = \frac{2}{\text{tang. } A} = 2 \text{ cot. } A.$

Donc $$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \text{cot. } \frac{1}{2} A - 2 \text{ cot. } A.$$

124. $1 - \cos. A = (118)\ 2 \sin. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} A = (114)\ \sin. \frac{1}{2} A \times \frac{\sin. A}{\cos. \frac{1}{2} A} = \sin. A \text{ tang. } \frac{1}{2} A$, (34). Donc

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{\sin. A}.$$

125. $1 + \cos. A = (117)\ 2 \cos. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = \cos. \frac{1}{2} A \times \frac{\sin. A}{\sin. \frac{1}{2} A} = \frac{\sin. A}{\text{tang. } \frac{1}{2} A}$. Donc on a aussi

$$\text{tang. } \frac{1}{2} A = \frac{\sin. A}{1 + \cos. A}.$$

126. Les deux précédentes formules, multipliées l'une par l'autre, donnent

$$\text{tang.}^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{1 + \cos. A}.$$

127. $\text{Sin. } A = (114)\ 2 \sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = (34)\ 2 \cos.^2 \frac{1}{2} A \text{ tang. } \frac{1}{2} A$ Donc (43),

$$\sin. A = \frac{2 \text{ tang. } \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A}.$$

128. En divisant cette équation par la première donnée (116), on aura (34),

$$\cos. A = \frac{1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A}{1 + \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A}.$$

129. En multipliant cette fraction (17, 18) par cot. $\frac{1}{2}$ A, et se souvenant toujours que cot. $\times$ tang. $= 1$, (35), on trouvera

$$\cos. A = \frac{\cot. \frac{1}{2} A - \text{tang}. \frac{1}{2} A}{\cot. \frac{1}{2} A + \text{tang}. \frac{1}{2} A}.$$

130. En multipliant cette équation par l'équation (122), il en résulte

$$\sin. A = \frac{2}{\cot. \frac{1}{2} A + \text{tang}. \frac{1}{2} A}.$$

131. En substituant dans cette dernière équation la valeur (123) de tang. $\frac{1}{2}$ A, et divisant la fraction par 2, on aura

$$\sin. A = \frac{1}{\cot. \frac{1}{2} A - \cot. A}.$$

132. En substituant la valeur de cot. $\frac{1}{2}$ A prise dans l'équation (123), on aura

$$\sin. A = \frac{1}{\cot. A + \text{tang}. \frac{1}{2} A}.$$

133. Tang. $\frac{1}{2}$ A $=(124) \frac{1 - \cos. A}{\sin. A} = \frac{1 - \cos. A}{\text{tang}. A \cos. A}$. Donc tang. $\frac{1}{2}$ A $\times$ tang. A $= \frac{1 - \cos. A}{\cos. A} = \frac{1}{\cos. A} - 1$. Donc $\frac{1}{\cos. A} = 1 +$ tang. $\frac{1}{2}$ A $\times$ tang. A, et par conséquent

$$\cos. A = \frac{1}{1 + \text{tang}. \frac{1}{2} A \,\text{tang}. A}.$$

134. Le produit des deux formules (94, 95) est $\sin. (A + B) \sin. (A - B) = \sin.^2 A \cos.^2 B - \cos^2 A \sin.^2 B = (42) \sin.^2 A - \sin.^2 B (\sin.^2 A + \cos.^2 A) = \sin.^2 A - \sin.^2 B = \cos.^2 B - \cos.^2 A$. Donc

$$\sin.^2 A - \sin.^2 B = \sin. (A + B) \sin. (A - B) = \cos.^2 B - \cos.^2 A.$$

135. Les formules (99, 100) donnent de la même manière

$$\cos.^2 A - \sin.^2 B = \cos. (A + B) \cos. (A - B) = \cos.^2 B - \sin.^2 A.$$

136. Des quatre formules citées naissent encore évidemment les quatre formules suivantes :

$$\sin. (A + B) + \sin. (A - B) = 2 \sin. A \cos. B.$$

137. $\sin. (A + B) - \sin. (A - B) = 2 \cos. A \sin. B.$

138. $\cos. (A + B) + \cos. (A - B) = 2 \cos. A \cos. B.$

139. $\cos. (A - B) - \cos. (A + B) = 2 \sin. A \sin. B.$

140. Soit maintenant $(A+B)=a$, $(A-B)=b$; d'où résulte $A=\frac{a+b}{2}$ et $B=\frac{a-b}{2}$. En substituant ces valeurs, la formule (136) devient $\sin. a+\sin. b=2\sin.\frac{a+b}{2}\cos.\frac{a-b}{2}$. Mettons dans cette équation A au lieu de a, B au lieu de b, (98), nous aurons

$$\sin. A+\sin. B=2\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(A-B).$$

141. En traitant de même les équations (137, 138, 139), on trouvera les trois équations qui suivent :

$$\sin. A-\sin. B=2\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)\cos.\tfrac{1}{2}(A+B).$$

142. $\cos. A+\cos. B=2\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(A-B).$

143. $\cos. B-\cos. A=2\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)\sin.\tfrac{1}{2}(A-B).$

144. En faisant encore attention que $\frac{\sin.}{\cos.}=\text{tang.}$, et que $\frac{\cos.}{\sin.}=$ cot., (34, 35), on aura (140, 141),

$$\frac{\sin. A+\sin. B}{\sin. A-\sin. B}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)\cot.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

145. De même (142, 143),

$$\frac{\cos. B+\cos. A}{\cos. B-\cos. A}=\cot.\tfrac{1}{2}(A+B)\cot.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\cot.\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

On trouve de la même manière les deux formules suivantes :

146. $\frac{\sin. A+\sin. B}{\cos. A+\cos. B}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos. B-\cos. A}{\sin. A-\sin. B}.$

147. $\frac{\sin. A+\sin. B}{\cos. B-\cos. A}=\cot.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\cos. A+\cos. B}{\sin. A-\sin. B}.$

148. $\text{Tang.} A+\text{tang.} B=\frac{\sin. A}{\cos. A}+\frac{\sin. B}{\cos. B}=\frac{\sin. A\cos. B+\sin. B\cos. A}{\cos. A\cos. B}.$

Donc

$$\text{tang.} A+\text{tang.} B=\frac{\sin.(A+B)}{\cos. A\cos. B}.$$

Par une opération semblable, on aura les trois formules suivantes.

149. $\text{Cot.} A+\cot. B=\frac{\sin.(A+B)}{\sin. A\sin. B}.$

150. $\text{Tang.} A-\text{tang.} B=\frac{\sin.(A-B)}{\cos. A\cos. B}.$

151. $\text{Cot. B} - \text{cot. A} = \frac{\text{sin.}(A-B)}{\text{sin. A sin. B}}$.

152. En multipliant l'une par l'autre les deux formules (148, 150), on a

$$\text{tang.}^2 A - \text{tang.}^2 B = \frac{\text{sin.}(A+B)\,\text{sin.}(A-B)}{\text{cos.}^2 A\,\text{cos.}^2 B}.$$

153. Le produit des deux autres (149, 151), donne aussi

$$\text{cot.}^2 B - \text{cot.}^2 A = \frac{\text{sin.}(A+B)\,\text{sin.}(A-B)}{\text{sin.}^2 A\,\text{sin.}^2 B}.$$

154. On a pu observer que par les résultats des calculs, c'est toujours le cosinus du plus grand arc (que nous avons constamment désigné par A), qui se trouve devoir être soustrait du cosinus de l'arc moindre B. Il en est de même des cotangentes. C'est une suite de la nature de ces lignes trigonométriques (48).

155. Si $A = 90°$, des équations (146, 147) on déduit (73, 35),

$$\text{tang.}(45° \pm \tfrac{1}{2}B) = \frac{1 \pm \text{sin. B}}{\text{cos. B}} = \frac{\text{cos. B}}{1 \mp \text{sin. B}}.$$

156. Si $A = 60°$, qu'on se rappelle que $\text{cos. } 60° = \frac{1}{2}$, (84); et des formules (137, 138), on tirera les deux suivantes.

157. $\text{Sin.}(60°+B) - \text{sin.}(60°-B) = \text{sin. B}$.
158. $\text{Cos.}(60°+B) + \text{cos.}(60°-B) = \text{cos. B}$.

159. Maintenant soit $A = 45°$. Au lieu de A, écrivons cette valeur dans les formules (94, 95, 105, 106), et nous aurons les quatre formules qui suivent :

160. $\text{Sin.}(45°+B) = \frac{\text{cos. B} + \text{sin. B}}{\sqrt{2}}$, (80), $= \text{cos.}(45°-B)$, (7).

161. $\text{Cos.}(45°+B) = \frac{\text{cos. B} - \text{sin. B}}{\sqrt{2}} = \text{sin.}(45°-B)$.

162. $\text{Tang.}(45°+B) = \frac{1+\text{tang. B}}{1-\text{tang. B}}$, (29).

163. $\text{Tang.}(45°-B) = \frac{1-\text{tang. B}}{1+\text{tang. B}}$.

164. Les deux dernières équations peuvent s'exprimer en une seule, qui sera (20),

$$\text{tang.}(45° \pm B) = \frac{1 \pm \text{tang. B}}{1 \mp \text{tang. B}}.$$

4

165. $\text{Tang.}(45^\circ+B)-\text{tang.}(45^\circ-B)=\frac{1+\text{tang.}B}{1-\text{tang.}B}-\frac{1-\text{tang.}B}{1+\text{tang.}B}$ $=\frac{4\,\text{tang.}B}{1-\text{tang.}^2B}$, en réduisant au même dénominateur. Donc (112),

$$\text{tang.}\,2B=\frac{\text{tang.}(45^\circ+B)-\text{tang.}(45^\circ-B)}{2}.$$

166. En élevant au quarré la première équation (160), nous trouverons $2\sin.^2(45^\circ+B)=\cos.^2B+\sin.^2B+2\sin.B\cos.B=1+\sin.2B$, (42, 110). Donc (113),

$$1+\sin.B=2\sin.^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)=2\cos.^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}B).$$

167. Faisons B négatif, et cette équation donnera

$$1-\sin.B=2\sin.^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)=2\cos.^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}B).$$

Ce sont les expressions qui s'emploient au lieu de *cosinus verse* (8).

168. Donc $\frac{1+\sin.B}{1-\sin.B}=\text{tang.}^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)$, et de même $\frac{1-\sin.B}{1+\sin.B}=$ $\text{tang.}^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)$.

169. En traitant sin. B comme une quantité inconnue, et résolvant séparément ces deux dernières équations, on trouvera

$$\sin.B=\frac{\text{tang.}^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)-1}{\text{tang.}^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)+1}=\frac{1-\text{tang.}^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)}{1+\text{tang.}^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)}.$$

170. En multipliant l'avant-dernière fraction par cot. $(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)$, o na

$$\sin.B=\frac{\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)-\cot.(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)+\cot.(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)}=\frac{\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)-\text{tang.}(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)+\text{tang.}(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)}.$$

171. En divisant l'équation formée de la première et de la dernière de ces trois quantités égales, par l'équation (165) exprimée comme il suit, $\text{tang.}B=\frac{\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)-\text{tang.}(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)}{2}$, on aura (34),

$$\cos.B=\frac{2}{\text{tang.}(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)+\text{tang.}(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)}=\frac{2}{\cot.(45^\circ-\tfrac{1}{2}B)+\cot.(45^\circ+\tfrac{1}{2}B)}.$$

172. Transposez les membres de la première équation (161); puis multipliez-la par la seconde (160); le produit sera $(\cos.^2B-\sin.^2B):2=\cos.(45^\circ+B)\cos.(45^\circ-B)$. Donc (115),

$$\cos.2B=2\cos.(45^\circ+B)\cos.(45^\circ-B).$$

172.* Si on suppose $A=30^\circ$, la formule (137) donne (79),

$$\sin.(30^\circ+B)-\sin.(30^\circ-B)=\sin.B\sqrt{3}.$$

La formule (138) donne de même

$$\cos.(30^\circ + B) + \cos.(30^\circ - B) = \cos. B\sqrt{3}.$$

173. Enfin, si $A + B + C = 180^\circ$, alors (67), $\text{tang. } C = -\text{tang. } (A + B) = \frac{\text{tang. } A + \text{tang. } B}{\text{tang. } A \text{ tang. } B - 1}$, (105). Des deux membres extrêmes on tire

$$\text{tang. } A + \text{tang. } B + \text{tang. } C = \text{tang. } A \text{ tang. } B \text{ tang. } C.$$

174. Cette formule nous donne un résultat curieux; c'est qu'il existe une infinité de solutions pour ce problème : *trouver trois quantités telles que leur somme soit égale à leur produit.*

175. Nous avons rassemblé en deux tables I, et II, rejetées à la fin de cet Ouvrage, les formules que nous jugeons les plus utiles; ensorte que les Lecteurs pourront les avoir sous les yeux, et qu'elles formeront une espèce de répertoire pour les Savans. Nous avons substitué dans la table I la lettre A à la lettre B pour celles des formules qui, dans le texte même de l'Ouvrage, ne contiennent que cette lettre B. Nous avertissons au surplus les Commençans, que rien n'est plus facile que de multiplier à l'infini les formules trigonométriques, et que nous en avons supprimé un grand nombre comme inutiles, en comparaison de celles que nous avons données dans les deux tables, qui contiennent, à ce qu'il nous semble, la collection des formules de ce genre la plus complète qui ait encore paru.

176. Ayant donné les valeurs de sin. A, cos. A, etc., et de sin. (A + B), cos. (A + B), etc., nous avons cru inutile de dresser d'autres tables pour les valeurs de $\sin. \frac{1}{2} A$, $\sin. 2A$, $\cos. \frac{1}{2} A$, $\cos. 2 A$, $\sin. \frac{1}{2}(A + B)$, etc. Il sera facile de les avoir au besoin, en opérant comme nous l'avons déjà fait plus d'une fois : il ne s'agit que de mettre, au lieu de A ou de B, tel multiple ou sous-multiple que l'on voudra de A ou de B.

177. Pour avoir la valeur d'une cotangente, on renversera les formules de la tangente, en substituant le numérateur au dénominateur, et *vice versâ*. Par exemple, (I. 58e), $\text{cot. } A = \frac{\text{cot. } \frac{1}{2} A - \text{tang. } \frac{1}{2} A}{2}$. On en fera de même des formules du cosinus pour avoir la sécante, et de celles du sinus pour avoir la cosécante.

Tout cela est une conséquence évidente des analogies (35, 36, 37). L'unité est toujours le dénominateur sous-entendu, s'il n'y en a pas un autre exprimé.

178. Il est à propos d'apprendre et de retenir les formules (I. 1e, 3e, 16e, 18e, 22e, 31e, 32e) dont on fait un usage continuel. A l'avenir nous épargnerons davantage les renvois, parceque le lecteur pourra recourir aux tables, quand il voudra vérifier les formules que nous emploierons, et qu'il ne se sera pas rappelées.

CHAPITRE V.

Expressions des arcs en parties du rayon, et des lignes trigonométriques par les puissances des arcs; Elémens du Calcul différentiel, etc.

179. LA ligne droite et l'arc de cercle semblent hétérogènes. Jusqu'à présent, et probablement il en sera long-temps de même, on a inutilement cherché une mesure rigoureuse qui leur fût commune. Si l'on suppose que la circonférence d'un cercle se redresse et s'étende en forme de ligne droite, et qu'on demande combien de fois cette ligne contient le diamètre, on ne peut répondre à cette question que par approximation. Mais comme cette approximation peut se pousser à l'infini, il en résulte que ce qu'il y a de défectueux dans la solution du problème rend bien les opérations plus compliquées et plus longues, mais non pas trompeuses ni erronées. On parvient à cette solution approchée, par des moyens ingénieux, tirés des rapports des lignes trigonométriques, au calcul desquelles cette recherche est réciproquement très-utile. En y procédant, nous nous servirons à dessein du calcul différentiel et intégral, pour donner à ceux de nos lecteurs qui ne connaissent pas ce calcul, une idée de la plus belle invention qui ait été faite en Mathématiques. Les premiers élémens de ce calcul ne contiennent aucune difficulté, et sont d'un merveilleux secours dans bien des cas, comme nous le verrons dans le cours de cet ouvrage.

180. *Les grandeurs constantes* sont celles qui restent toujours

les mêmes, tandis que les *variables* changent. Dans le cercle, par exemple, tandis que les lignes trigonométriques changent de grandeur à mesure que l'arc varie, le rayon demeure constant. Nous indiquerons, selon l'usage, les grandeurs *variables* par les dernières lettres de l'alphabet, z, y, x, etc.; et les *constantes* ou invariables par les premières a, b, c, etc.

181. Cela posé, si dans cette équation, $x = ay$, on suppose que x augmente d'une quantité δx (j'entends par δx, (14), la variation, la différence, ou la *différentielle* de la grandeur x), il faudra aussi que y augmente d'une quantité δy, telle qu'il est nécessaire qu'elle soit pour que l'équation subsiste. On aura donc $x + \delta x = a(y + \delta y) = ay + a\delta y$. En supprimant les quantités égales x et ay, il reste $\delta x = a\delta y$.

182. Soit $x = 6$, $a = 2$, $y = 3$, et soit $\delta x = 4$. On aura $\delta y = \frac{\delta x}{a} = \frac{4}{2} = 2$. En effet, quand $x = 6 + 4 = 10$, il faut que $y = 3 + 2 = 5$, puisque la constante $a = 2$ ne doit pas changer.

183. L'opération que nous venons de faire (181) s'appelle *différentier, prendre les différences* ou *les différentielles*. En effet l'équation primitive $x = ay$ est disparue, et la nouvelle $\delta x = a\delta y$ contient seulement les variations des termes de la première.

184. Si l'on avait plus de deux variables, comme dans l'équation $bx + mz = u - any + c$, en faisant varier les variables, et procédant absolument comme on a fait (181), on aura $b(x + \delta x) + m(z + \delta z) = u + \delta u - an(y + \delta y) + c$. En effectuant les multiplications, et supprimant l'équation primitive, il restera $b\delta x + m\delta z = \delta u - an\delta y$.

185. Qu'on observe que la constante isolée c disparaît entièrement, parceque *la différentielle ou variation d'une quantité constante est évidemment zéro.*

186. On abrège ces opérations par la règle suivante, déduite de leurs résultats. *Pour différentier une équation, il faut, au lieu de chaque variable*, (ou du produit (195) de plusieurs variables), *écrire sa différentielle multipliée par tous les facteurs constans de cette variable, et supprimer les constantes isolées.*

187. Par exemple, dans l'équation (184), $bx + mz = u - any + c$, écrivez $\delta x \times b$, au lieu de bx; $\delta z \times m$ au lieu de mz; $\delta u \times 1$ au

lieu de u; $-\delta y \times an$ au lieu de $-any$; et supprimez c : vous aurez immédiatement, et sans passer par les opérations intermédiaires, l'équation différentielle cherchée $b\delta x + m\delta z = \delta u - an\delta y$.

188. *L'objet de la différentiation est de découvrir les rapports entre les changemens des grandeurs variables.* Par exemple, l'équation $\delta x = a\delta y$ donne $\frac{\delta x}{\delta y} = a$.

189. Mais la primitive $x = ay$ donne de même $\frac{x}{y} = a$; donc *lorsque le rapport* (18) *entre deux variables est constant, leurs variations*, quelque grandes qu'elles soient, *conservent ce même rapport.*

190. Soit à présent $xy = b$. Dans ce cas, puisque le produit des deux variables doit toujours être égal à la constante b, quelle que soit la grandeur de leurs variations, il est clair que si l'une croît, l'autre doit diminuer. Cependant on donne toujours aux différentielles les signes de leurs variables; ce sont les résultats du calcul qui indiquent si les variations se font en sens contraire.

191. On aura donc $(x + \delta x)(y + \delta y) = b$; ou $xy + y\delta x + \delta y(x + \delta x) = b$; et, en supprimant les quantités égales, $y\delta x + \delta y(x + \delta x) = 0$. On voit que ce résultat démontre que l'une des deux variations est négative, puisque les termes du premier membre de l'équation se détruisent réciproquement.

192. Supposons maintenant que δx, δy, δz, etc., sont des quantités infiniment petites, des fractions plus voisines de zéro qu'il n'est possible de l'imaginer. *La grandeur infinie*, soit infiniment grande, soit infiniment petite, est celle dont on ne peut assigner la valeur en nombres; parcequ'aucun nombre n'est assez grand ou assez petit. Toute quantité qui se peut exprimer par des nombres est donc une *grandeur finie*, puisqu'elle a une valeur finie, laquelle peut s'exprimer par des chiffres qui ont un terme, ou dont le nombre est déterminé et ne s'étend pas à l'infini.

193. Cela posé, nous pouvons, dans la dernière équation, écrire x au lieu de $(x + \delta x)$; car la différence entre ces deux expressions étant infiniment petite, l'erreur qui résultera de cette substitution dans le produit par δy, sera infiniment petite, en comparaison de δy; c'est-à-dire que δy sera un infiniment grand en comparaison

de l'erreur commise, qui ne sera qu'une partie infiniment petite d'un infiniment petit, comme on pourra s'en faire une idée par les exemples numériques que nous en donnerons tout-à-l'heure. Nous ferons voir dans la suite (209, 275), que cette erreur apparente ne nuit en aucune manière à l'exactitude mathématique du calcul.

La dernière équation devient donc $y\partial x + x\partial y = 0$. La quantité négligée est $\partial x\partial y$; c'est ce qu'on appelle un infiniment petit du *second ordre*, tel que seraient les quarrés $(\partial x)^2$, $(\partial y)^2$, $(\partial z)^2$, etc.

194. Pour faire concevoir que l'infiniment petit du second ordre peut se négliger sans erreur, quand on cherche le rapport entre des infiniment petits du premier ordre, tels que ∂x, ∂y, etc.; soit $\partial x = \frac{5}{10000000}$ et $\partial y = \frac{2}{10000000}$; on aura $\partial x\partial y = \frac{10}{100000000000000}$. On voit quelle est l'extrême petitesse de la dernière fraction, en comparaison de l'une ou de l'autre des précédentes. Qu'on imagine donc, s'il est possible, quelle serait cette disproportion, si dans les valeurs que nous venons de donner à ∂x et à ∂y, le nombre des zéros était infini pour chacun des dénominateurs ; ce qui est nécessaire pour que ∂x et ∂y aient une valeur infiniment petite, comme on l'a supposé. On reconnaîtra de même qu'un infiniment petit du second ordre est infiniment grand relativement à un infiniment petit du troisième ordre, et ainsi de suite.

195. En reprenant l'équation $y\partial x + x\partial y = 0$, j'observe que le premier membre contient la variation de xy, (191), et le second celle de b, (185). Donc *pour différentier le produit de plusieurs variables, on doit prendre la différentielle de chacune d'elles séparément, en considérant les autres variables comme des facteurs constans* (186), *et écrire, au lieu du produit, la somme de ces différentielles.*

196. En effet, pour différentier xy, si on prend la différentielle de x, en regardant y comme constanto, on a $y\partial x$, (186); et si on prend la différentielle de y, en regardant x comme constante, on a $x\partial y$. La somme de ces deux différentielles, $y\partial x + x\partial y$, est précisément celle que nous avons déjà trouvée.

197. Si on avait $xyz = c + mu$, les différentielles du premier membre seraient $xy\partial z + xz\partial y + yz\partial x$, et celle du second

membre, $m\mathfrak{d}u$; ce qui se trouvera également, si l'on fait l'opération en détail, par les méthodes que l'on a vues, en écrivant $(x+\mathfrak{d}x)(y+\mathfrak{d}y)(z+\mathfrak{d}z)=c+m(u+\mathfrak{d}u)$. Car cette équation est la même que celle-ci : $xyz+xy\mathfrak{d}z+y\mathfrak{d}x\times(z+\mathfrak{d}z)+\mathfrak{d}y(x+\mathfrak{d}x)(z+\mathfrak{d}z)=c+mu+m\mathfrak{d}u$. En retranchant l'équation primitive $xyz=c+mu$, et mettant x au lieu de $x+\mathfrak{d}x$, et z au lieu de $z+\mathfrak{d}z$, comme nous avons fait (193), il restera $xy\mathfrak{d}z+yz\mathfrak{d}x+xz\mathfrak{d}y=m\mathfrak{d}u$.

198. La règle donnée (195) sert aussi à différentier les puissances des variables. Si l'on veut, par exemple, différentier x^2; en considérant cette quantité sous cette forme, xx, et traitant ce produit comme s'il était composé de deux variables différentes, les différentielles seront $x\mathfrak{d}x+x\mathfrak{d}x$, ou $2x\mathfrak{d}x$.

199. On trouvera de même que les différentielles de x^3 se réduisent à $3x^2\mathfrak{d}x$, et qu'en général *la différentielle de* x^m *est* $mx^{m-1}\mathfrak{d}x$, ou que $\mathfrak{d}(x^m)=mx^{m-1}\mathfrak{d}x$.

200. D'après cela, il est facile de différentier les expressions affectées du signe radical, en les écrivant comme des quantités élevées aux puissances fractionnaires correspondantes. Étant donné, par exemple, $\sqrt{(a+bx)}$, qu'on écrive $(a+bx)^{\frac{1}{2}}$; et comparant cette expression à l'expression générale x^m, on aura $m=\frac{1}{2}$, et $a+bx$ au lieu de x; donc mx^{m-1} deviendra $\frac{1}{2}(a+bx)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}(a+bx)^{-\frac{1}{2}}$. Il reste à multiplier cette expression par $\mathfrak{d}x$, (198), c'est-à-dire, dans le cas dont il s'agit, par $\mathfrak{d}(a+bx)=b\mathfrak{d}x$, (186); donc $\mathfrak{d}\sqrt{(a+bx)}=\frac{1}{2}b\mathfrak{d}x(a+bx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{b\mathfrak{d}x}{2\sqrt{(a+bx)}}$.

201. La même expression générale (199) donne le moyen de différentier les variables qui se présentent sous la forme de fraction. Si on avait $\frac{x}{y}=a$, il serait plus court et plus simple de ne différentier l'équation qu'après l'avoir convertie en celle-ci, $x=ay$, (181). Mais dans les équations composées de plusieurs termes, cette opération n'est pas toujours commode à pratiquer. En pareil cas, au lieu de $\frac{x}{y}$, on écrit l'équivalent, xy^{-1}. Les différentielles de ce produit sont (195), $x\mathfrak{d}(y^{-1})+y^{-1}\mathfrak{d}x=$

$x\partial(y^{-1})+\frac{\partial x}{y}$. Or, si l'on compare l'expression $\partial(y^{-1})$ avec l'expression générale $\partial(x^m)$, on a $m=-1$, $m-1=-2$, y au lieu de x, et ∂y au lieu de ∂x. Donc $\partial(y^{-1})=-1\times y^{-2}\partial y$ $=-\frac{\partial y}{y^2}$; donc $x\partial(y^{-1})=-\frac{x\partial y}{y^2}$; donc enfin $\partial\frac{x}{y}=\frac{\partial x}{y}-\frac{x\partial y}{y^2}=\frac{y\partial x-x\partial y}{y^2}$.

202. D'où il suit que *pour différentier une fraction composée de variables, il faut multiplier le dénominateur par les différentielles du numérateur, soustraire de ce produit les différentielles du dénominateur multipliées par le numérateur, et diviser le reste par le quarré du dénominateur.*

203. Démontrons l'exactitude de cette opération, en la comparant avec celle que l'on a vue (181). Dans cette dernière, l'équation $x=ay$ a donné, pour les différentielles, $\partial x=a\partial y$; mais tout-à-l'heure, la même équation exprimée sous cette forme, $\frac{x}{y}=a$, nous a donné $\frac{y\partial x-x\partial y}{y^2}=0$, (o étant (185) la différentielle de a); il faut prouver que les deux équations différentielles sont les mêmes sous des formes différentes. Or, si l'on multiplie la dernière par y^2, on aura $y\partial x-x\partial y=0\times y^2=0$; et par conséquent $y\partial x=x\partial y$, et $\partial x=\frac{x}{y}\times\partial y$; mais par l'équation primitive, $\frac{x}{y}=a$; donc $\frac{x}{y}\times\partial y=a\partial y$; donc la seconde équation différentielle se réduit à la première $\partial x=a\partial y$.

204. La règle que nous venons de donner (202) mène donc à un résultat rigoureux dans le cas cité, quelle que soit d'ailleurs la grandeur des variations. Mais on doit observer qu'il n'en sera pas de même pour les variations finies, toutes les fois que l'équation à différentier contiendra explicitement ou implicitement quelque produit de plusieurs variables prises avec des exposans positifs. Par exemple $\frac{z}{y}=x$ contient implicitement le produit yx, et dès-lors, sous quelque forme que l'on mette l'équation pour la différentier, la quantité $\partial y\partial x$ sera toujours négligée, (193). Et j'observe, en passant, que c'est en cela que consiste l'imperfection de la règle arithmétique de double fausse position.

5

205. Tels sont les élémens du calcul différentiel; nous les avons exposés avec plus d'étendue qu'on n'a coutume de le faire, pour en faciliter l'intelligence aux Commençans. Avec ces règles on peut différentier toute expression algébrique. Mais l'*intégration* ne s'étend pas de même à toutes sortes d'expressions. Quoique pour *intégrer*, les règles se réduisent, pour ainsi dire, à une seule, l'exécution en est ordinairement difficile et souvent impossible.

206. L'*intégration* est l'opération inverse de la différentiation. Des quantités variables étant données, on trouve, en différentiant, les rapports entre leurs changemens; au contraire, en intégrant, on a pour but de remonter de ces changemens à la connaissance des grandeurs variables auxquelles ils appartiennent. Si donc la différentielle de x est ∂x, l'intégrale de ∂x est x; et si la différentielle de x^m est $mx^{m-1}\partial x$, (199), l'intégrale de $mx^{m-1}\partial x$ est x^m.

207. D'où se tire la règle suivante pour intégrer cette espèce de différentielles. *Augmentez d'une unité l'exposant de la variable, et divisez par le produit de l'exposant ainsi augmenté et de la différentielle.* Dans l'expression $mx^{m-1}\partial x$, l'exposant $m-1$, accru d'une unité, devient m. On a donc $mx^m\partial x$; et en divisant par $m\partial x$, conformément à la seconde partie de la règle, l'intégration est complète, et donne x^m.

208. De plus, *si la différentielle est multipliée ou divisée par quelques constantes, on conservera, en intégrant, les constantes dans leur place.* Car il est clair que si la différentielle de ay est $a\partial y$, (183), l'intégrale de $a\partial y$ doit être ay.

209. En différentiant un produit quelconque de variables, par exemple, xy, nous avons négligé, (193), l'infiniment petit du second ordre $\partial x\partial y$. Or si, en intégrant les différentielles infinitésimales du premier ordre, nous les considérons comme complètes, c'est-à-dire, si nous regardons comme nulles à leur égard celles du second ordre qui ont été négligées, l'erreur commise dans la différentiation sera compensée dans l'intégration. Donc si nous assignons xy pour l'intégrale de $y\partial x+x\partial y$, quoique cette expression différentielle ne soit pas complète, et qu'il y manque le terme $\partial x\partial y$, il est évident que l'intégration sera très-exacte.

210. Ce que nous avons dit dn calcul intégral suffit pour l'intelligence de ce Traité. Nous ajouterons seulement, pour donner au Lecteur quelque idée de la nature de ce calcul, qu'il serait en général facile d'intégrer, si les opérations ne présentaient presque toujours des différentielles incomplètes ou enveloppées dans des expressions embarrassantes. Il est impossible, par exemple, d'intégrer $y\partial x$, parcequ'il n'existe aucune quantité algébrique dont la différentiation puisse donner pour seul résultat $y\partial x$. En un mot, quelle que soit l'expression différentielle qu'on vent intégrer, il faut en tronver une qui ne soit point affectée de différentielles, et qui soit telle qu'en la différentiant elle produise exactement la différentielle proposée; ce sera l'intégrale cherchée. Telle est la principale règle, et c'est en cela que consiste tout l'art du calcul intégral; mais *hoc opus*, *hic labor est*.

211. Les expressions employées jusqu'ici étant de la plus grande généralité, il s'ensuit que toutes les règles du calcul différentiel et intégral doivent pouvoir s'appliquer aux lignes trigonométriques.

Voyons d'abord comment la valeur de leurs différentielles, de quelque grandeur qu'elles soient, se déduit très-rigoureusement de quelques formules de la Table II, qui, je crois, n'ont pas encore été employées de cette manière, et qui, par ces transformations, deviennent de la plus grande utilité.

212. Puisque l'équation (II. 23e), $\sin. A - \sin. B = 2\sin. \frac{1}{2}(A-B) \times \cos. \frac{1}{2}(A+B)$, suppose $A > B$, on pourra désigner par ∂B, à la manière du calcul différentiel, l'accroissement qu'il serait nécessaire de donner à l'angle B pour qu'il devînt égal à l'angle A; et de même par $\partial \sin. B$, la différence à ajouter à sin. B, pour qu'il fût égal à sin. A. On aura donc $A = B + \partial B$, et $\sin. A = \sin. B + \partial \sin. B$. En substituant ces valeurs, l'équation devient

$$\partial \sin. B = 2\sin. \tfrac{1}{2}\partial B \cos. (B + \tfrac{1}{2}\partial B).$$

En opérant d'une manière analogue sur les équations (II. 24e, 25e, 26e), et se rappelant que lorsqu'un arc B augmente, son cosinus et sa cotangente diminuent (48), on aura les trois équations suivantes :

213. $-\mathfrak{d}\ \text{cos.}\,B = 2\ \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B\ \text{sin.}\,(B + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B)$.

214. $\mathfrak{d}\ \text{tang.}\,B = \dfrac{\text{sin.}\,\mathfrak{d}B}{\text{cos.}\,B\ \text{cos.}\,(B + \mathfrak{d}B)}$.

215. $-\mathfrak{d}\ \text{cot.}\,B = \dfrac{\text{sin.}\,\mathfrak{d}B}{\text{sin.}\,B\ \text{sin.}\,(B + \mathfrak{d}B)}$.

216. Observons que les quatro équations que nous venons de donner sont de la plus rigoureuse vérité, quelle que soit la grandeur de $\mathfrak{d}B$, puisque nous n'avons négligé aucune quantité en les composant, et qu'elles ne sont autre chose que les quatre formules (II. 23e à 26e), présentées sous une autre forme. On pourra comparer ces équations avec celles qui ont été données par Euler (*Calculi differ. Pars prior*, 21), et dans lesquelles il exprime les différences finies des sinus et des cosinus, par des séries infinies des puissances de la variation de l'arc.

217. Observons encore que, pour une variation déterminée $\mathfrak{d}B$ de l'arc, les variations du sinus et de la cotangente sont d'autant plus grandes, et celles du cosinus et de la tangente d'autant plus petites que l'arc est plus petit. Car dans la formule (212) le facteur cos. $(B + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B)$ est beaucoup plus grand; dans la formule (215), le diviseur est beaucoup plus petit; et dans les deux autres (213, 214), c'est le contraire.

218. Quant aux différentielles des sécantes et des cosécantes, on les trouvera (1385, 1407); jusques-là elles nous sont inutiles.

219. En reprenant l'équation (212), si on développe (99) l'expression cos. $(B + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B)$, on aura $\mathfrak{d}\ \text{sin.}\,B = 2\ \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B\ (\text{cos.}\,B\ \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B - \text{sin.}\,B\ \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B) = 2\ \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B\ \text{cos.}\,B\ \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B - 2\ \text{sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B\ \text{sin.}\,B = \text{sin.}\,\mathfrak{d}B\ \text{cos.}\,B - 2\ \text{sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}B\ \text{sin.}\,B = \text{sin.}\,\mathfrak{d}B\ \text{cos.}\,B - \text{sin.}\,B\,(1 - \text{cos.}\,\mathfrak{d}B)$, (I. 6e, 22e).

220. Supposons à présent que $\mathfrak{d}B$ soit un arc infiniment petit, c'est-à-dire l'arc le plus voisin de zéro qu'il soit possible (192); il est facile alors de comprendre, en imaginant, si l'on veut, un arc infiniment petit dans la figure 1, que le sinus de cet arc infiniment petit sera aussi près qu'il est possible, de se confondre avec l'arc même; et que le cosinus de cet arc sera de même infiniment près de se confondre avec le rayon. Employons donc $\mathfrak{d}B$ au lieu de sin. $\mathfrak{d}B$, et R ou 1 au lieu de cos. $\mathfrak{d}B$; (nous verrons bientôt

(277, 289) que les quantités négligées par cette supposition, ne sont que des infiniment petits du second ordre ou du troisième, etc.); l'équation ϑ sin. B = sin. ϑB cos. B — sin. B (1 — cos. ϑB) deviendra

$$\vartheta \sin. B = \vartheta B \cos. B.$$

221. Avec les mêmes substitutions, l'équation (213) se réduit à celle-ci :

$$-\vartheta \cos. B = \vartheta B \sin. B.$$

222. Enfin, si l'on écrit B au lieu de (B + ϑB), (193), dans les formules (214, 215), on aura les deux suivantes :

223. $$\vartheta \text{ tang. } B = \frac{\vartheta B}{\cos.^2 B},$$

224. $$-\vartheta \text{ cot. } B = \frac{\vartheta B}{\sin.^2 B},$$

225. On a par ces quatre équations les différentielles infinitésimales des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, telles que les auteurs les ont données jusqu'à présent.

226. Pour démontrer immédiatement que dans les deux dernières formules nous n'avons négligé que les infiniment petits (194) du second ordre, du troisième ordre, etc., développons les formules primitives de la manière suivante : $\vartheta \text{ tang. } B = \frac{\sin. \vartheta B}{\cos. B \cos. (B + \vartheta B)} = \frac{\sin. \vartheta B}{\cos. B (\cos. B \cos. \vartheta B - \sin. B \sin. \vartheta B)} = \frac{\vartheta B}{\cos.^2 B - \vartheta B \sin. B \cos. B}$, en faisant, comme tout-à-l'heure, sin. ϑB = ϑB, et cos. ϑB = 1. Actuellement, qu'on exécute, selon les règles de l'Algèbre, la division indiquée par la dernière fraction; on trouvera qu'à l'exception du premier terme $\frac{\vartheta B}{\cos.^2 B}$, tous les termes du quotient renferment les puissances $(\vartheta B)^2$, ou $(\vartheta B)^3$, etc. Il en est de même de la formule de la cotangente.

227. Les différentielles infinitésimales trouvées jusqu'à présent pour les lignes trigonométriques concourent à prouver une règle qui est de la plus grande utilité en Mathématiques. Lorsque B = 0, cos. B est le plus grand qu'il soit possible (61); alors sin. B = 0, (73), et la formule (221) donne $-\vartheta \cos. B = \vartheta B \times 0 = 0$. De même, sin. B est le plus grand qu'il puisse être, quand B = 90°; et alors cos. B = 0, (73), et la formule (220) donne ϑ sin. B

$= \partial B \times 0 = 0$. D'où il suit qu'une variation infiniment petite de l'arc ne produit aucun changement dans le sinus ou dans le cosinus, lorsque ce sinus ou ce cosinus sont à leur *maximum*.

228. Ces résultats sont conformes à la règle suivante : *Quand la valeur finie d'une quantité est la plus grande qu'il soit possible, la différentielle infinitésimale de cette quantité est zéro.*

229. Soit proposé, par exemple, de partager une quantité donnée a en deux parties, telles que leur produit soit le plus grand qu'il est possible. Appelant x l'une des deux parties, l'autre sera $a - x$, et le produit $ax - xx$. Dans le cas du *maximum*, c'est-à-dire de la plus grande valeur de ce produit, on a, par la règle précédente, $\partial(ax - xx) = 0$, ou $a\partial x = 2x\partial x$, (198), et par conséquent $x = \frac{1}{2}a$. Les deux parties doivent donc être égales, pour que leur rectangle soit le plus grand possible. On voit combien la règle donnée conduit promptement au résultat cherché.

230. Cette règle fait connaître aussi le *minimum* des grandeurs, quand il résulte du problème au lieu de leur *maximum*. Il faut puiser dans les Traités d'Analyse, des moyens plus subtils pour déterminer généralement si la différentielle d'une expression doit contenir un *maximum*, ou bien un *minimum*, quand elle est égale à zéro. Nous ferons ensorte de n'avoir pas besoin de ces moyens dans notre Trigonométrie. Le Lecteur comprend au surplus que lorsqu'on substitue dans l'expression d'un problème la valeur donnée par la règle, il est rare qu'on ignore si cette valeur est un *maximum*, ou si elle est un *minimum*.

231. Passons aux différentielles des puissances secondes.

$$\sin.^2 A - \sin.^2 B = \cos.^2 B - \cos^2.A = \sin.(A - B)\sin.(A + B),$$

(II. 27e). Donc, d'après les remarques et par les substitutions indiquées (212), on aura

$$\partial(\sin.^2 B) = -\partial(\cos.^2 B) = \sin.\partial B \sin.(2B + \partial B).$$

En procédant de même, les équations (II. 29e, 30e) fournissent les deux suivantes :

232. $$\partial(\text{tang.}^2 B) = \frac{\sin.\partial B \sin.(2B + \partial B)}{\cos.^2 B \cos.^2 (B + \partial B)}.$$

233. $$-\partial(\cot.^2 B) = \frac{\sin.\partial B \sin.(2B + \partial B)}{\sin.^2 B \sin.^2 (B + \partial B)}.$$

234. Ces formules sont aussi rigoureuses que les formules (212 à 215) des premières puissances, pour quelque différence finie que ce soit. Réduisons-les à celles qu'on donne ordinairement pour les différences infiniment petites.

235. $\partial\,(\sin.^2 B) = \sin.\,\partial B\,\sin.2\,(B + \frac{1}{2}\,\partial B) = 2\sin.\,\partial B\,\sin.\,(B+\frac{1}{2}\,\partial B)\,\cos.\,(B+\frac{1}{2}\,\partial B)$, (I. 6e). En faisant ∂B infiniment petit, et le substituant à $\sin.\,\partial B$, et substituant de même B à $(B+\frac{1}{2}\,\partial B)$, (193), l'équation devient

$$\partial\,(\sin.^2 B) = 2\,\partial B\,\sin.\,B\cos.\,B = \partial B\sin.\,2B,\ (\text{II. } 1^e).$$

236. C'est aussi ce qu'on aurait trouvé en faisant $\sin.^2 B = x^m$, et différentiant par la formule générale $mx^{m-1}\partial x$, (199). En effet $m = 2$, $x = \sin.\,B$, $\partial x = \partial\,\sin.\,B = \partial B\cos.\,B$, (220). Donc $mx^{m-1}\partial x = 2\,(\sin.\,B)^{2-1}\partial B\cos.\,B = 2\sin.\,B\,\partial B\cos.\,B$. En faisant donc usage, pour abréger, de la formule générale, on a (223, 224) les deux formules suivantes :

237. $\partial(\text{tang.}^2 B) = 2\,\text{tang.}\,B\,\partial\,\text{tang.}\,B = 2\,\text{tang.}\,B \times \frac{\partial B}{\cos.^2 B}$.

238. $-\,\partial\,(\cot.^2 B) = 2\cot.\,B \times \frac{\partial B}{\sin.^2 B}$.

239. Nous avons réuni dans la table II toutes les différentielles trigonométriques trouvées ci-dessus; ensorte qu'on les aura à volonté sous les yeux. C'est donc à cette table qu'on aura recours, quand on voudra vérifier quelqu'une de ces différentielles, que nous emploierons dans la suite sans indiquer d'où nous les aurons prises.

240. $\partial B = \frac{\partial\sin.\,B}{\cos.\,B} = \frac{\partial\sin.\,B}{\sqrt{(1-\sin.^2 B)}} = \partial\,\sin.\,B\,(1-\sin.^2 B)^{-\frac{1}{2}}$. En élevant le binome $1 - \sin.^2 B$ à la puissance $-\frac{1}{2}$ par le moyen de la formule du binome de Newton, on aura $\partial B = \partial\sin.\,B \times \left(1 + \frac{1}{2}\sin.^2 B + \frac{1.3}{2.4}\sin.^4 B + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.^6 B + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin.^8 B + \text{etc.}\right)$. Cette série irait jusqu'à l'infini; et comme la loi en est manifeste, il est aisé de la continuer plus loin, si l'on veut. Cherchons maintenant l'intégration de cette équation.

241. L'intégrale de ∂B est B, (206), et, par la même raison, sin. B est l'intégrale de $\partial\sin.\,B \times 1$. Pour trouver l'intégrale de $\frac{1}{2}\sin.^2 B\,\partial\,\sin.\,B$, qu'on augmente (207) d'une unité l'exposant, et on aura

$\frac{1}{2}$ sin.^{3}B d sin. B ; puis divisant par $3\,d$ sin. B , le quotient, ou l'intégrale cherchée, sera $\frac{\sin.^3 B}{2.3}$. En intégrant ainsi chaque terme de la série , et mettant A au lieu de B , l'équation intégrée , que nous nommerons (S) , sera

$$(S)\ldots A = \sin. A + \frac{\sin.^3 A}{2.3} + \frac{3 \sin.^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5 \sin.^7 A}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7 \sin.^9 A}{2.4.6.8.9} + \text{etc.}$$

242. Nous voilà parvenus , par des moyens un peu longs , mais d'une utilité fréquente , au but que nous nous étions proposé. La série infinie que nous avons trouvée , nous donnera , par le moyen du sinus , la valeur, en parties du rayon, d'un arc quelconque A , qui n'excède pas 90°.

243. En effet , soit $A = 30°$; nous savons (79) que sin. $30° = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2}$. En substituant ces valeurs , l'équation devient

$$\text{ARC de } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \text{etc.}$$

En faisant les divisions indiquées pour chaque terme , et nous bornant à huit décimales pour en avoir six exactes dans la somme, nous aurons

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{1}{48} = 0{,}02083333$$
$$\frac{3}{1280} = 0{,}00234375$$
$$\frac{15}{43008} = 0{,}00034877$$
$$\frac{105}{1769472} = 0{,}00005934$$
$$\frac{945}{86507520} = 0{,}00001092$$
$$\frac{10395}{4907335680} = 0{,}00000212$$

etc.

TOTAL..... 0,523598

Ainsi l'arc de 30° : R :: 0,523598 : 1.

244. Nous omettons les deux derniers chiffres de la somme, parce-qu'ils ne sont pas exacts. On pourrait avoir cette valeur totale aussi exactement et avec autant de décimales qu'on le voudrait, en continuant les divisions interrompues, et prenant de nouveaux termes de la série, dont la progression est claire. Ce travail a été fait; et

en multipliant par 6 la valeur de l'arc de 30°, celle de la demi-circonférence a été calculée jusqu'à 127 décimales; c'est-à-dire qu'on a trouvé l'arc de 180° = R × 3, 141592 653589 793238 462643 383279 502884 197169 399375 105820 974944 592307 816406 286208 998628 034825 342117 067982 148086 513282 306647 093844 6+. Donc la demi-circonférence du cercle, étendue en ligne droite, égale trois fois le rayon, plus une partie de ce rayon exprimée par la fraction que nous venons de donner. Le dernier chiffre de ces décimales n'est pas le terme précis de cette valeur, puisqu'on en trouverait de nouveaux, et à l'infini, en continuant l'opération; c'est une suite de la nature de l'équation (S), dont le second membre est indéfini. Ce qui prouve ce que nous avons déjà dit (179), qu'on ne peut avoir jusqu'à présent que par une approximation portée, à la vérité, aussi loin qu'on le veut, le rapport entre le diamètre et la circonférence.

245. Pour avoir une preuve de l'infaillibilité de la série (S), et par conséquent du calcul différentiel et intégral qui y a conduit, faites dans cette série sin. A = 1, et faisant le calcul d'un nombre de termes à volonté, vous devez avoir pour résultat de la sommation de ces termes, la valeur de l'arc de 90°, (73), c'est-à-dire exactement le triple de la valeur ci-dessus (243) de l'arc de 30°.

246. La valeur d'un arc étant trouvée, il est facile d'avoir celle de tous les autres par le seul secours des premières opérations de l'Arithmétique. En partant du nombre donné ci-dessus (244) pour la valeur de l'arc de 180°, on en prendra la moitié pour l'arc de 90°, le tiers pour celui de 60°, et ainsi de suite. C'est ainsi qu'on a composé la table très-utile (AA) qu'on trouvera à la fin de ce Traité, par laquelle on prend aisément en parties du rayon la valeur d'un arc quelconque donné en degrés, minutes, secondes, dixièmes, centièmes, etc.

247. Qu'on veuille, par exemple, avec sept décimales, l'arc de 6° 22′ 17″,3; on prendra successivement dans la table les quantités suivantes, avec une ou deux décimales de plus, pour avoir la somme exacte :

L'arc de 6° =	0,104719755
20′	5817764
2′	581776
10″	48481
7″	33937
$\frac{3''}{10}$, ou 0″, 3	1454
Valeur de l'arc de 6° 22′ 17″,3....	0,1112032

248. J'ai dit (242) que la série (S) donne la valeur d'un arc quelconque, *pourvu qu'il n'excède pas* 90°. La raison de cette limite est évidente, puisqu'il n'y a point de sinus qui diffère en grandeur des sinus contenus dans le premier quart du cercle (62), et que par conséquent on ne peut introduire dans la série la valeur du sinus d'un arc excédant 90°, que cette valeur ne soit en même temps celle du sinus d'un arc moindre que de 90°. Or il est clair que d'une seule valeur des sinus égaux d'arcs inégaux, on ne peut tirer, au moyen de la série, qu'une seule valeur de A, et c'est celle des arcs du premier quart du cercle.

249. Mais comme la série est infinie, et que par conséquent le plus grand des exposans de sin. A est ∞, le nombre des racines de la série (S) doit être de même infini, suivant la théorie des équations. Or elles sont toutes égales; car autrement on aurait des sinus inégaux d'arcs inégaux du premier quart de cercle, et l'équation ne subsisterait plus, puisque chaque racine substituée dans le second membre doit donner une même valeur pour le premier membre qui est ici l'homogène de comparaison.

250. Il est donc démontré par l'équation (S) que *le cercle est une courbe rentrante sur elle-même par des révolutions infinies.*

251. En effet de ce principe sortent à l'instant les racines égales et en nombre infini, que renferme l'équation, et qu'on chercherait inutilement sans cela. Nommant π la demi-circonférence, les racines sont (54, 121), sin. A, sin. $(\pi - A)$, sin. $(2\pi + A)$, sin. $(3\pi - A)$; et ainsi jusqu'à l'infini, en ajoutant π dans chaque nouveau terme, et alternant le signe de A.

252. L'expression de l'arc que nous avons eue par le moyen

du sinus, se trouve aussi par le moyen de la tangente et par la même méthode. En effet (II. 40e), $d B = d \text{ tang. } B \cos.^2 B = \frac{d \text{ tang. } B}{1 + \text{tang.}^2 B} = d \text{ tang. } B (1 + \text{tang.}^2 B)^{-1}$. En élevant à la puissance -1 le binome $1 + \text{tang.}^2 B$, multipliant chaque terme par $d \text{ tang. } B$, et intégrant l'équation (opérations sur lesquelles il sera bon de s'exercer), enfin en substituant A au lieu de B, on aura l'équation suivante que je nomme (T) :

$$(T) \ldots A = \text{tang. } A - \tfrac{1}{3} \text{tang.}^3 A + \tfrac{1}{5} \text{tang.}^5 A - \tfrac{1}{7} \text{tang}^7 A + \text{etc.}$$

253. Mais tang. $45^\circ = 1$, (29); donc

$$\text{l'arc de } 45^\circ = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{etc.}$$

Euler a transformé cette série en deux autres beaucoup plus *convergentes ;* sans quoi elle serait infiniment plus laborieuse que la série donnée (243). Mais comme ces calculs sont déjà faits, nous ne nous en occuperons pas.

254. On appelle *convergente* toute série décroissante, et *divergente* toute série croissante. Plus, dans la première espèce de série, la diminution d'un terme à l'autre est rapide, moins on a de termes à calculer pour obtenir une valeur très-approchée.

255. Par exemple, pour avoir l'arc de 30° avec six décimales exactes, il a suffi de calculer sept termes de la série (243) ; tandis que pour évaluer avec six décimales exactes l'arc de 45° par la série (T), il faudrait la moitié de la vie d'un homme, puisqu'il serait nécessaire, comme il est aisé de le reconnaître, de calculer 500000 termes pour arriver à un terme dont les six premières décimales seraient 0.

256. Tout cosinus étant aussi un sinus (7), l'expression de l'arc, par le moyen d'une série contenant les puissances du cosinus, ne peut différer de la série (S). Par une raison semblable, (11), la série contenant les puissances de la cotangente se réduit à la série (T).

257. Jeaurat (*Mém. présentés à l'Ac. des Sc. de Paris*, *Tom.* IV, *pag.* 527) donne sans démonstration les deux séries suivantes :

$$A = 1 - \cos. A - \tfrac{1}{6} \cos.^3 A - \tfrac{3}{40} \cos.^5 A - \text{etc., et}$$

$$A = 1 - \cot. A + \tfrac{1}{3} \cot.^3 A - \tfrac{1}{5} \cot.^3 A + \text{etc.}$$

En faisant $A = 90°$, ces deux séries donnent $A = 1$, (49). Mais l'arc de $90° = 1,57$, comme on peut le voir dans la table (AA): ces deux séries ne sont donc pas justes.

258. Les lignes trigonométriques nous ont donné les moyens d'exprimer en parties du rayon la valeur des arcs: employons maintenant ces mêmes arcs ainsi exprimés, à trouver réciproquement, en parties du rayon, la valeur des lignes trigonométriques qui leur appartiennent respectivement. On y parvient par un moyen aussi ingénieux que simple, et qu'on appelle *le retour des séries*. Étant donnée, par exemple, la série (S), dans laquelle l'arc A est exprimée en puissances du sinus, on demande la valeur de sin. A exprimée en puissances de l'arc. Nous traiterons cette transformation, d'une utilité infinie dans les Mathématiques, avec autant de clarté qu'il nous sera possible, et d'une manière très-générale, en faveur des lecteurs qui n'en seraient pas instruits.

259. Soit donc proposée l'équation générale suivante, que nous appellerons (P):

(P) ... $m = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ etc. Dans cette équation je suppose connue la valeur de m, ainsi que celle des coefficiens a, b, c, d, etc.; y est l'inconnue dont on demande la valeur.

260. Convertissons la série en la suivante, que nous appellerons (Q):

$$(Q) \ldots y = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + \text{etc.}$$

261. Il est évident qu'on peut toujours représenter ainsi la valeur de y, puisque A, B, C, D, etc. sont des expressions *indéterminées*, et par conséquent susceptibles chacune d'une valeur quelconque, telle qu'il est convenable pour que l'équation soit exacte. Il s'agit donc de fixer quelle doit être la valeur de chacune de ces indéterminées, pour que l'équation ait lieu. Rien de plus facile et de plus ingénieux à la fois.

262. Puisque $y = Am + Bm^2 + Cm^3 +$ etc., qu'on prenne successivement la 1[ère], la 2[e], la 3[e], la 4[e], etc. puissance de cette équation; qu'on écrive ces puissances en les ordonnant comme à l'ordinaire, et par rapport aux diverses puissances de m; on aura

$$\begin{array}{rl}
y = & Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + Em^5 + \text{etc.} \\
y^2 = & \ldots\ldots\ A^2m^2 + 2ABm^3 + 2ACm^4 + 2ADm^5 + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad + B^2m^4 + 2BCm^5 + \text{etc.} \\
y^3 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ A^3m^3 + 3A^2Bm^4 + 3A^2Cm^5 + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad\qquad + 3AB^2m^5 + \text{etc.} \\
y^4 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A^4m^4 + 4A^3Bm^5 + \text{etc.} \\
y^5 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A^5m^5 + \text{etc.} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

263. Qu'on substitue maintenant ces valeurs de y, y^2, etc. dans l'équation (P), en disposant les termes dans le même ordre, et en écrivant, pour abréger, les puissances de m, seulement en tête de chaque colonne verticale, et les supposant répétées dans les termes inférieurs; on aura

$$m = \left\{\begin{array}{rl}
ay = & aAm + aBm^2 + aCm^3 + aDm^4 + aEm^5 + \text{etc.} \\
+by^2 = & \ldots\ldots\ bA^2 + 2ABb + 2ACb + 2ADb + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad + B^2b + 2BCb + \text{etc.} \\
+cy^3 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ cA^3 + 3A^2Bc + 3A^2Cc + \text{etc.} \\
& \qquad\qquad\qquad + 3AB^2c + \text{etc.} \\
+dy^4 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ dA^4 + 4A^3Bd + \text{etc.} \\
+ey^5 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ eA^5 + \text{etc.} \\
+\text{etc.} &
\end{array}\right.$$

ou, en faisant passer m dans le second membre de l'équation,
$0 = m\,(aA - 1) + m^2\,(aB + bA^2) + m^3\,(aC + 2ABb + cA^3) + \text{etc.}$

264. Il faut donc que les valeurs de A, B, C, etc. soient telles que le second membre de cette équation, à quelque point qu'on le prolonge, se réduise à zéro; ce qui aura lieu en supposant les valeurs des indéterminées telles que chaque terme se réduise à zéro. Soit donc $m\,(aA - 1) = 0$; on aura $mAa = m$, et par conséquent $A = \frac{1}{a}$. De même, soit $m^2\,(aB + bA^2) = 0$; on aura $B = -\frac{bA^2}{a}$; et, en substituant le quarré de la valeur de A que nous venons de trouver, $B = -\frac{b}{a^3}$. On trouvera de la même manière

$$C=\frac{2b^2-ac}{a^5},\ D=\frac{5abc-a^2d-5b^3}{a^7},\ E=\frac{14b^4-21ab^2c+6a^2bd+3a^2c^2-a^3e}{a^9},$$

et ainsi des autres indéterminées, tant qu'on voudra continuer la série. En substituant ces valeurs dans l'équation (Q), il ne restera aucune inconnue dans le second membre, et on aura la valeur cherchée de y, comme il suit :

$$y=\frac{m}{a}-\frac{bm^2}{a^3}+(2b^2-ac)\frac{m^3}{a^5}+(-5b^3+5abc-a^2d)\frac{m^4}{a^7}$$
$$+(14b^4-21ab^2c+6a^2bd+3a^2c^2-a^3e)\frac{m^5}{a^9}+(-42b^5+84ab^3c$$
$$-28a^2b^2d-28a^2bc^2+7a^3be+7a^3cd-a^4f)\frac{m^6}{a^{11}}+(132b^6$$
$$-330ab^4c+120a^2b^3d+180a^2b^2c^2-36a^3b^2e-72a^3bcd+$$
$$8a^4bf-12a^3c^3+8a^4ce+4a^4d^2-a^5g)\frac{m^7}{a^{13}}+(-429b^7+1287ab^5c$$
$$-495a^2b^4d-990a^2b^3c^2+165a^3b^3e+495a^3b^2cd-45a^4b^2f$$
$$+165a^3bc^3-90a^4bce-45a^4bd^2+9a^5bg-45a^4c^2d+9a^5cf$$
$$+9a^5de-a^6h)\frac{m^8}{a^{15}}+(1430b^8-5005ab^6c+2002a^2b^5d+$$
$$5005a^2b^4c^2-715a^3b^4e-2860a^3b^3cd+220a^4b^3f-1430a^3b^2c^3$$
$$+660a^4b^2ce+330a^4b^2d^2-55a^5b^2g+660a^4bc^2d-110a^5bcf$$
$$-110a^5bde+10a^6bh+55a^4c^4-55a^5cd^2-55a^5c^2e+10a^6cg$$
$$+10a^6df+5a^6e^2-a^7i)\frac{m^9}{a^{17}}+\text{etc.}$$

265. Cette série a été portée jusqu'à neuf termes, pour la première fois, que je sache, par l'infatigable Philippe Rubbiani, lequel s'est assuré, par des épreuves en nombres, de l'exactitude de son travail. Elle peut servir de formule générale pour *retourner* une série, de quelque forme qu'elle soit. Faisons-en l'application au cas qui nous occupe. En comparant l'équation (S), (241), à l'équation générale (P), j'observe que la première ne contient pas de puissances paires ; or il faut que l'équation (P) et celle à résoudre soient semblables, et c'est ce que nous obtiendrons en égalant à zéro dans l'équation (P) les coefficiens des puissances qui manquent dans l'équation (S). Donc, dans ce cas-ci, $b=0$, $d=0$, $f=0$, etc. Cela posé, voyons ce que deviennent les va-

leurs que nous avons trouvées pour les indéterminées dans l'équation (Q).

266. Nous avons eu, 1°. $A = \frac{1}{a}$, valeur qui subsiste. 2°. $B = -\frac{b}{a^2}$; mais $b = 0$; donc $B = 0$. 3°. $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$; mais $b = 0$; donc $C = -\frac{ac}{a^5} = -\frac{c}{a^4}$.

En poursuivant ainsi, on aura $D = 0$, $E = \frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} = \frac{3c^2 - ae}{a^7}$, $F = 0$, $G = \frac{8ace - 12c^3 - a^2g}{a^{10}}$, etc. Mais en comparant à l'équation (P) la proposée (S), on a $a = 1$, $c = \frac{1}{2.3}$, $e = \frac{3}{2.4.5}$, $g = \frac{3.5}{2.4.6.7}$. En substituant ces valeurs, on aura pour celles des indéterminées, $A = 1$, $C = -\frac{1}{2.3}$, $E = \frac{1}{2.3.4.5}$, $G = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$; d'où l'on peut évidemment conclure la valeur et le signe de celles qui suivent.

267. Et comme, dans le cas dont il s'agit, $m =$ l'arc A, et $y =$ le sinus de A, l'équation (Q) devient

$$(W)\ldots \sin. A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Par le moyen de cette série qui est infinie, on pourra donc calculer, avec autant de décimales qu'on le voudra, le sinus d'un arc quelconque, en prenant la valeur de cet arc dans la table (AA).

268. Si au lieu de A on écrit 2A, la série devient $\sin. 2A = 2A - \frac{8A^3}{2.3} + \frac{32A^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$; et c'est un exemple de la manière d'exprimer par ces sortes de séries les lignes trigonométriques de tout arc multiple.

269. Il est facile de voir que si on voulait le sinus d'un arc, exprimé par une série des puissances du cosinus, ou de la cotangente, ou de la tangente de cet arc, il suffirait de réduire en séries, par le moyen du binôme, les expressions (I. 3°, 4°, 5°). On comprendra aisément, par le peu que nous en disons, comment on aurait de même une ligne trigonométrique quelconque exprimée en puissances de chacune des autres. Au surplus, on trouvera ces

séries toutes faites dans le Mémoire de Jeaurat, que nous avons cité (257).

270. On a vu (249) que des sinus égaux, et en nombre infini, d'arcs inégaux, sont les racines de l'équation (S), et que la valeur de cette équation, donnée par chacune de ces racines, est toujours un seul et même arc qui n'excède pas 90°. De cette équation nous avons tiré, par la méthode du retour, la série (W), dont les racines en nombre infini sont au contraire toutes inégales, savoir A, $(\pi-A)$, $(2\pi+A)$, $(3\pi-A)$, etc., racines qui sont précisément celles que renfermaient les expressions des sinus formant les racines égales de l'équation originaire (S); quoiqu'il soit certain qu'en substituant dans la série (W), prolongée autant qu'il convient, l'une quelconque de ces racines inégales, on aura toujours une même valeur pour sin. A. Et comme cette valeur appartient de même à sin. $(\pi-A)$, à sin.$(2\pi+A)$, etc., d'Alembert (*Opuscules, tom. V, pag.* 182) en déduit ce paradoxe, que (S) représente un seul arc, tandis que (W) qui en sort représente une infinité de sinus d'arcs différens. S'il en était autrement, la doctrine des équations serait ébranlée; et tels en sont les effets, que même par des voies détournées elle met à découvert les vérités mathématiques.

271. Il est à observer que la série (W) indique le signe négatif pour les sinus de tous les arcs $(\pi+A)$, $(2\pi-A)$, etc.; c'est-à-dire de tous les arcs qui sont renfermés, pour une révolution quelconque (250), dans la seconde demi-circonférence; ce qui confirme la règle sur les signes (66). Et comme la corde est égale au double du sinus de la moitié de l'arc (31), ou que l'on a cord. $\text{A}=2\sin.\frac{1}{2}\text{A}$, on doit en conclure que quand le sinus est négatif, il en est de même de la corde dont ce sinus est la moitié. Ainsi, quoiqu'il n'y ait point de cordes qui soient diamétralement opposées entre elles, les cordes des arcs $(2\pi+2A)$, $(4\pi-2A)$, etc. sont néanmoins négatives.

272. On aura promptement la preuve de la justesse de la série (W) en cherchant le sinus de 30°, sur lequel nous ne pouvons être trompés, puisque nous en savons exactement la valeur (31). Pour abréger singulièrement le travail, nous indiquerons la méthode suivante. Qu'on exprime ainsi l'équation (W);

$$(\text{R}).....\ \text{Sin. A} = \text{A} - B + C - D + E, \text{ etc.}$$

On aura, en comparant les deux équations (R) et (W),

$$B = A^2 \times \frac{A}{2.3}, \qquad C = A^2 \times \frac{B}{4.5},$$

$$D = A^2 \times \frac{C}{6.7}, \qquad E = A^2 \times \frac{D}{8.9}.$$

On voit qu'il suffit de calculer une seule fois A^2, seule puissance de A qui soit actuellement dans chaque terme, que les diviseurs sont devenus commodes et très-petits, et que la loi de leur progression est évidente.

273. Supposons à présent qu'on veuille calculer le sinus de 30° avec neuf décimales. On prendra dans la table (AA) l'arc de 30° avec dix décimales pour plus de sureté, et on en formera le quarré comme à l'ordinaire, ou, pour plus de promptitude, comme on peut le voir dans le calcul ci-après, en employant la méthode abrégée déjà connue pour la multiplication des fractions décimales; ce qui consiste à prendre les facteurs dans le multiplicateur de gauche à droite, et à négliger, de droite à gauche, dans le multiplicande, un chiffre pour le premier facteur, deux pour le second, trois pour le troisième, etc., en tenant compte cependant des dixaines que donnera le produit, par chaque facteur, du dernier chiffre négligé. Pour ne pas se tromper, on peut ponctuer successivement le facteur et le chiffre par lequel on commence la multiplication, comme on remarquera que nous l'avons fait pour les deux premiers correspondans dans le multiplicateur et dans le multiplicande.

Formation du quarré de l'arc A.

$$
\begin{array}{rr}
A = & 0,\ 5235987756 \\
 & 0,\ 5235987756 \\
\hline
 & 0,\ 2617993878 \\
 & 104719755 \\
 & 15707963 \\
 & 2617994 \\
 & 471239 \\
 & 41888 \\
 & 3665 \\
 & 367 \\
 & 26 \\
 & 3 \\
\hline
A^2 = & 0,\ 2741556778
\end{array}
$$

D'où l'on tire, en additionnant successivement la valeur de A^2 avec elle-même,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2A^2 = 0,\ 5483113556 \\
3A^2 = 0,\ 8224670334 \\
4A^2 = 1,\ 0966227112 \\
5A^2 = 1,\ 3707783890 \\
6A^2 = 1,\ 6449340668 \\
7A^2 = 1,\ 9190897446 \\
8A^2 = 2,\ 1932454224 \\
9A^2 = 2,\ 4674011002.
\end{array}
\right.
$$

274. Ces multiples de A^2 ainsi préparés rendent très-prompt le calcul de la série (R). Pour en faire usage dans la question présente ; $\frac{1}{6}$ A = 0, 0872664626, valeur par laquelle il faut multiplier celle de A^2 pour avoir celle de *B*. Mais puisque nous venons de multiplier la valeur de A^2 par chacun des neuf caractères de l'arithmétique, nous avons déjà chacun de ses produits par chacun des chiffres de la valeur de $\frac{1}{6}$ A ; il ne s'agit donc plus que de placer ces produits particuliers, comme il suit, dans l'ordre qui leur convient, en pointant, pour éviter toute erreur, chacun des chiffres de la valeur de $\frac{1}{6}$ A, à mesure qu'on écrit les produits correspondans ci-dessous.

$0,08A^2 =$	$0,02193245422$
$0,007A^2 =$	$0,00191908974$
$0,0002A^2 =$	$0,00005483114$
$0,00006A^2 =$	$0,00001644934$
etc.	164493
	10966
	1645
	55
	16
	$B = 0,0239245962$

Divisant ensuite B par 20, on aura de la même manière, et par une simple addition, le produit du quotient par A^2, et ce produit sera $C = 0,0003279532$. On trouvera de même, mais toujours plus promptement, la valeur de D et celle de E. Voici les termes; nous avons séparé les termes positifs et les négatifs.

$A = 0,5235987756$	$-B = 0,0239245962$
$C = 0,0003279532$	$-D = 0;0000021407$
$E = 0,0000000082$	$-0,0239267370$

$+0,5239267370$, somme des termes positifs.
$-0,0239267370$, somme des termes négatifs.

Donc sin. $30° = 0,5000000000$, valeur exacte (31).

275. On voit combien sont précises les séries que nous avons formées par le moyen du calcul différentiel et intégral et de la méthode du retour des séries. Si on prend l'arc de 30° avec les 127 décimales qu'on peut avoir en divisant par 6 la valeur de 180° donnée (244), et qu'on calcule assez de termes de la série (R), pour avoir sin. 30° avec 127 décimales, on trouvera toujours que la somme de ces termes se réduit à 0, 5; en négligeant seulement le 127e chiffre ou le suivant, qui ne peut jamais être juste, puisque la série est infinie, et que dès lors il doit toujours lui manquer une quantité que les termes suivans ne pourraient que diminuer de plus en plus, quelque loin qu'on poussât le calcul, sans que cette quantité, en approchant sans cesse de l'infiniment petit, pût y arriver, nos nombres n'étant pas de nature à donner une expression infiniment petite (192, 194).

276. Des séries (241, 267) on tire les deux expressions qui suivent, de la différence entre l'arc et son sinus.

$$A - \sin. A = \frac{\sin.^3 A}{2.3} + \frac{3 \sin.^5 A}{2.4.5} + \text{etc.}$$

$$A - \sin. A = \frac{A^3}{2.3} - \frac{A^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

277. D'où il suit que, lorsque l'arc est infiniment petit, la différence entre l'arc et le sinus consiste en infiniment petits du troisième ordre, du cinquième, etc.

278. Si dans chacune de ces équations on écrit $\frac{1}{2}$A au lieu de A, et qu'on les multiplie l'une et l'autre par 2, on aura les deux équations suivantes, qui donnent une double expression de la différence entre l'arc et sa corde (31).

$$A - 2\sin. \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin.^3 \frac{1}{2} A}{3} + \frac{3 \sin.^5 \frac{1}{2} A}{4.5} + \frac{3.5 \sin.^7 \frac{1}{2} A}{4.6.7} + \text{etc.}$$

$$A - 2\sin. \tfrac{1}{2} A = \frac{A^3}{2.3.2^2} - \frac{A^5}{2.3.4.5.2^4} + \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7.2^6} - \text{etc.}$$

279. En prenant les arcs dans la table (AA), on ponrra donc calculer facilement les cordes, avec autant de décimalcs qu'on le voudra, par le moyen de la dernière série.

280. Les équations générales (P) et (Q) serviraient à convertir la série (T) des puissances de la tangente (252), comme on a converti celle des puissances du sinus. Mais pour obtenir de plus simples expressions des indéterminées, et ponsser la série jusqu'à la neuvième puissance, ce qui donnera une formule commode dans les cas semblables, nous ferons

$$(P') \ldots\ldots m = ay + cy^3 + ey^5 + gy^7 + iy^9 + \text{etc.}$$

$$(Q') \ldots\ldots y = Am + Cm^3 + Em^5 + Gm^7 + Im^9 + \text{etc.}$$

D'où l'on tire, par la méthode développée (262, 265),

$$m = \left\{ \begin{array}{l} \quad ay = aAm + aCm^3 + aEm^5 + aGm^7 + aIm^9 + \text{etc.} \\ + cy^3 = \ldots\ldots\ldots cA^3 + 3cA^2C + 3cA^2E + 3cA^2G + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 3cAC^2 + 6cACE + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + cC^3 + \text{etc.} \\ + ey^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots eA^5 + 5eA^4C + 5eA^4E + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 10eA^3C^2 + \text{etc.} \\ + gy^7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots gA^7 + 7gA^6C + \text{etc.} \\ + iy^9 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots iA^9 + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{array} \right.$$

On cherchera, comme on a fait (264), les valeurs exprimées par a, c, e, etc. des indéterminées A, C, E, etc.; puis on substituera aux lettres a, c, e, etc. leurs valeurs numériques qu'on tirera de l'équation (T), laquelle comparée à l'équation (P'), donne $a = 1$, $c = -\frac{1}{3}$, $e = \frac{1}{5}$, etc.

281. Enfin, que l'on substitue dans l'équation (Q') les valeurs de A, C, E, etc., ainsi réduites en nombres, et qu'on écrive l'arc A au lieu de m, et tang. A au lieu de y; on trouvera

$$\text{(U)}\ldots\ \text{Tang.}\,A = A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{3.5} + \frac{17A^7}{3^2.5.7} + \frac{62A^9}{3^2.5.7.9} + \text{etc.}$$

Nous ferons tout à l'heure la recherche d'une loi pour continuer cette série sans autre calcul.

282. Il est évident que l'équation (U) n'a qu'une racine réelle, et que c'est un arc moindre que de 90°. Toutes les autres racines, en nombre infini, sont imaginaires; car A = 90° donne tang. A = ∞, (73); si A excédait 90°, il devrait donner pour tang. A, une valeur encore plus grande, puisque tous les termes de la série sont positifs; mais cette valeur ne peut aller au-delà de l'infini. Une pareille tangente est donc imaginaire, ainsi que les valeurs de A, dont on la déduirait.

283. L'objet de la série (U) est par conséquent de calculer la tangente d'un arc quelconque, de moins de 90°, dont on prendra la valeur dans la table (AA). Avec un arc plus grand, la série devient divergente (254).

284. Observons que quand l'arc est infiniment petit, la différence entre la tangente et l'arc ne consiste qu'en des infiniment petits du troisième ordre, du cinquième, etc.

285. Si on divise selon les règles de l'Algèbre la série (W), (267), par la série (U), on trouvera

$$\text{(Y)}\ldots\ \text{Cos.}\,A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

La loi de cette série est manifeste. Pour s'en servir à calculer promptement un cosinus, on suivra la méthode employée (272 à 274).

286. Les racines de l'équation (Y), toutes réelles, sont A, $(2\pi - A)$, $(2\pi + A)$, $(4\pi - A)$, $(4\pi + A)$, et ainsi de suite

jusqu'à l'infini. La valeur de chacun de ces arcs substituée dans la série, doit toujours donner la même valeur pour cos. A, comme on l'a vu (270) de la série (W).

287. Ces séries étant d'autant plus convergentes que l'arc est plus petit, si l'on veut, par exemple, le sinus d'un arc au-dessus de 45°, il sera mieux de le chercher en calculant le cosinus de son complément par le moyen de la série (Y). De même, pour avoir le cosinus d'un arc au-dessus de 45°, on se servira, par préférence, de la série (W).

288. Si dans la série (Y) on met au lieu de A l'un quelconque des arcs $(\pi - A)$, $(\pi + A)$, $(3\pi - A)$, $(3\pi + A)$, etc. contenus dans le second et dans le troisième quart du cercle, la valeur qui en résultera pour cos. A sera négative, conformément à la règle (66).

289. De la série (Y) on tire l'expression suivante du sinus verse (5):

$$1 - \cos. A = \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{2.3.4} + \frac{A^6}{2.3.4.5.6}, \text{ etc.},$$

par laquelle on voit que lorsque A est infiniment petit, l'erreur que l'on commet en faisant le cosinus égal au rayon, consiste en infiniment petits du second ordre, du quatrième, etc.

290. Si l'arc A est négatif, aucun des signes de la série (Y) ne change pour cela, puisqu'elle n'est composée que de puissances paires de A. Au contraire, si on fait A négatif dans les équations (S), (241), et (U), (281), tous les signes seront changés. Ces résultats démontrent mathématiquement (78) la règle donnée (75).

291. La recherche des termes consécutifs de la série (U), par le moyen des indéterminées, est très-laborieuse, et le devient de plus en plus à mesure que les puissances croissent. On peut obtenir la même série avec bien moins de peine, en divisant l'équation (W) par l'équation (Y), parce qu'on apperçoit sur-le-champ la loi de chacune des séries de ces équations, et qu'on peut dès lors les continuer à volonté : mais cette division même est pénible. Nous avons donc cru devoir profiter de la méthode qu'Euler a donnée pour réduire à une série infinie toutes sortes de fonctions fractionnaires, finies ou infinies.

292. On nomme *fonction* d'une quantité variable, par exemple

de l'arc A, dans le cas dont il s'agit, toute expression analytique composée, en quelque manière que ce soit, de cette variable et de quantités constantes.

293. En exprimant par des lettres les coefficiens de l'arc A dans les trois séries, on a

$$\frac{(W)\ldots A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \text{etc.}}{(Y)\ldots\, 1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \text{etc.}} = (U)\ldots A + BA^3 + CA^5 + DA^7, \text{ etc.},$$

ou, en multipliant l'équation par la série (Y), et en ordonnant les termes par rapport aux puissances de A, comme nous l'avons fait (263, 280)

$$\begin{array}{rrrrr}
A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \text{etc.} = A & + BA^3 & + CA^5 & + DA^7 & + \text{etc.} \\
 & -\beta & -\beta B & -\beta C & - \text{etc.} \\
 & & +\gamma & +\gamma B & + \text{etc.} \\
 & & & -\delta & - \text{etc.}
\end{array}$$

Et en transposant le premier membre,

$$\begin{array}{rrrrrr}
o = A & + BA^3 & + CA^5 & + DA^7 & + EA^9 & + \text{etc.} \\
 & -\beta & -\beta B & -\beta C & -\beta D & - \text{etc.} \\
 & & +\gamma & +\gamma B & +\gamma C & + \text{etc.} \\
 & & & -\delta & -\delta B & - \text{etc.} \\
 & & & & +\varepsilon & + \text{etc.} \\
-A & + b & - c & + d & - e & + \text{etc.}
\end{array}$$

294. Donc en faisant, comme à l'ordinaire, que chaque colonne verticale se réduise à zéro, on aura

$$\begin{aligned}
B &= \beta - b \\
C &= -\gamma + c + \beta B \\
D &= \delta - d + \beta C - \gamma B \\
E &= -\varepsilon + e + \beta D - \gamma C + \delta B.
\end{aligned}$$

295. En observant la suite des termes de chaque colonne verticale, il devient facile à présent de continuer sans calcul ces équations qui renferment les valeurs cherchées des coefficiens successifs de la série (U). On aura, par exemple,

$$\begin{aligned}
F &= \zeta - f + \beta E - \gamma D + \delta C - \varepsilon B \\
G &= -\eta + g + \beta F - \gamma E + \delta D - \varepsilon C + \zeta B,
\end{aligned}$$

etc.

296. En substituant les nombres, réduisant toutes les fractions au plus grand dénominateur, et la somme des fractions à l'expression la plus simple, on trouvera

$$F = \frac{1382}{3^2.5^2.7.9.11},\ G = \frac{21844}{3^3.5^2.7.9.11.13},\ H = \frac{929569}{3^3.5^2.7^2.9.11.13.15},\ \text{etc.}$$

297. Soit maintenant, en imitant ce que nous avons fait (272), tang. $A = A + B' + 2\,C' + 17\,D' + 62\,E' + 1382\,F' + 21844\,G' + 929569\,H' + \text{etc}$; et on aura

$$B' = A^2\,\tfrac{1}{3}\,A \qquad F' = A^2\,\tfrac{1}{55}\,E'$$
$$C' = A^2\,\tfrac{1}{5}\,B' \qquad G' = A^2\,\tfrac{1}{39}\,F'$$
$$D' = A^2\,\tfrac{1}{21}\,C' \qquad H' = A^2\,\tfrac{1}{105}\,G'$$
$$E' = A^2\,\tfrac{1}{9}\,D' \qquad \text{etc.}$$

On calculera les valeurs des quantités B', C', D', etc. de la manière enseignée (273, 274), et on aura la tangente par un calcul abrégé autant qu'il est possible. Passons à celui de la cotangente.

298. Cot. $A = \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}}$. En substituant à $\frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}}$ les séries $\frac{(Y)}{(W)}$, telles qu'elles sont exprimées (293), on aura

$$\text{cot. } A = \frac{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \varepsilon A^8 - \text{etc.}}{A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + eA^9 - \text{etc.}}$$

Appliquons actuellement à cette équation, de même que nous l'avons fait tout-à-l'heure pour la tangente, la méthode que nous avons empruntée d'Euler, et égalons cette expression fractionnaire de la cotangente à une série, dans chaque terme de laquelle le coefficient de l'arc A sera représenté par une indéterminée; et nous aurons

$$\frac{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \text{etc.}}{A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \text{etc.}} = \frac{1}{A} + BA + CA^3 + DA^5 + \text{etc.}$$

En multipliant l'équation par le dénominateur du premier membre, transposant le premier membre et ordonnant, on aura

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllllll}
1 + BA^2 & + CA^4 & + DA^6 & + EA^8 & + FA^{10} & + \text{etc.} \\
\quad - b & - bB & - bC & - bD & - bE & - \text{etc.} \\
 & + c & + cB & + cC & + cD & + \text{etc.} \\
 & & - d & - dB & - dC & - \text{etc.} \\
 & & & + e & + eB & + \text{etc.} \\
 & & & & - f & - \text{etc.} \\
-1 + \beta & - \gamma & + \delta & - \varepsilon & + \zeta & - \text{etc.}
\end{array} \right.$$

299. En faisant chaque colonne égale à zéro, on aura

$$\begin{aligned} B &= b - \beta \\ C &= -c + \gamma + bB \\ D &= d - \delta + bC - cB \\ E &= -e + \epsilon + bD - cC + dB \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ces équations sont faciles à continuer sans calcul, de même que celles que j'ai données (294).

300. En prenant dans les séries (W), (Y), les coefficiens numériques correspondans aux lettres b, c, etc., β, γ, etc., on trouvera les valeurs de B, C, D, etc, qui, substituées dans la série $\frac{1}{A} + BA + CA^3 + \text{etc.} = \cot. A$ suivant la supposition, donneront l'équation suivante :

$$(Z) \ldots\ \cot. A = \frac{1}{A} - \frac{A}{3} - \frac{A^3}{3^2.5} - \frac{2A^5}{3^3.5.7} - \frac{A^7}{3^3.5^2.7} - \frac{2A^9}{3^3.5.7.9.11}$$
$$- \frac{1382A^{11}}{3^4.5^3.7^2.9.11.13} - \frac{4A^{13}}{3^4.5^2.7.9.11.13} - \frac{3617A^{15}}{3^2.5^3.7^2\,9^2.11.13.15\,17} - \text{etc.}$$

301. Supposant ensuite $\cot. A = \frac{1}{A} - B' - C' - 2D' - E' - F' - 691\,G' - H' - I' - \text{etc.}$, on aura

$$\begin{aligned} B' &= A \times \tfrac{1}{3} & F' &= A^2\,\tfrac{10}{99}\,E' \\ C' &= A^2\,\tfrac{1}{15}\,B' & G' &= A^2\,\tfrac{1}{6825}\,F' \\ D' &= A^2\,\tfrac{1}{21}\,C' & H' &= A^2\,\tfrac{1}{195}\,F' \times A^2 \\ E' &= A^2\,\tfrac{1}{5}\,D' & I' &= A^2\,\tfrac{3617}{35700}\,H', \\ & & &\text{etc.} \end{aligned}$$

J'ai tiré de F' plutôt que de G' la valeur de H', pour l'avoir sous une expression plus simple. La quantité $F' \times A^2$ est trouvée précédemment par le calcul qui a donné la valeur de G'.

302. Il est facile de voir que la série (Z) est bien plus convergente et plus commode à calculer que la série (U), (281, 297). On verra (939) qu'en général si on cherche la tangente d'un arc de plus de 52°, il est mieux de calculer la cotangente de son complément (11) par le moyen de la série (Z).

CHAPITRE VI.

Des Tables trigonométriques en nombres naturels.

303. On ne peut avoir que d'une manière très-approchée la valeur des lignes trigonométriques, si ce n'est cependant de quelques-unes qui sont égales au rayon, à sa moitié, etc. Ce défaut n'est pas une suite particulière de la méthode des séries infinies données dans le chapitre précédent. Les méthodes géométriques qu'employaient les Anciens ne donnaient pour la valeur des lignes trigonométriques que des expressions qui contenaient des racines sourdes ou incommensurables; et l'on sait qu'il n'est pas possible d'avoir ces racines exactement, quelque loin qu'on pousse l'extraction. L'erreur diminuera seulement d'autant plus, qu'on emploiera plus de décimales pour exprimer la racine cherchée.

304. Considérons les arcs d'un nombre entier de degrés. On sait qu'on ne peut assigner exactement, même sous forme incommensurable, les expressions de leurs sinus, si ce n'est pour l'arc de 3° et ses multiples. Nous donnons ici ces expressions, les seules qu'on obtienne exactes, et nous les donnons, autant que nous l'avons pu, simples et propres à en dévoiler la correspondance réciproque. Nous indiquerons ensuite comment on y parvient.

$$\text{Sin. } 3^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) - \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$$

$$\text{Sin. } 6^\circ = -\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

$$\text{Sin. } 9^\circ = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$$

$$\text{Sin. } 12^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$$

$$\text{Sin. } 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1).$$

$\text{Sin. } 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$

$\text{Sin. } 21^\circ = -\frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 24^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 27^\circ = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2}.$

$\text{Sin. } 33^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 36^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 39^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) - \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 42^\circ = -\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\text{Sin. } 48^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 51^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 54^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1).$

$\text{Sin. } 57^\circ = -\frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\text{Sin. } 63^\circ = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 66^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{5}+1) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 69^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) + \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 72^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 75^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1).$

$\text{Sin. } 78° = \frac{1}{8} (\sqrt{5} - 1) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \sqrt{(5 + \sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 81° = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{4} \sqrt{(5 - \sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 84° = \frac{\sqrt{3}}{8} (\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{(5 - \sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 87° = \frac{\sqrt{3} - 1}{8\sqrt{2}} (\sqrt{5} - 1) + \frac{\sqrt{3} + 1}{8} \sqrt{(5 + \sqrt{5})}.$

$\text{Sin. } 90° = 1.$

305 Pour comprendre ces expressions, il faut commencer par les plus simples. La valeur de sin. 90° est arbitraire (38). Nous avons déjà trouvé (31, 80, 79), celles de sin. 30°, de sin. 45°, et de sin. 60° = cos. 30°. On en déduit (II. 2ᵉ.), sin. 15° = sin. (45° — 30°) $= \text{sin. } 45° \text{ cos. } 30° - \text{cos. } 45° \text{ sin. } 30° = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1)$. Ensuite la formule (I. 15ᵉ) donne sin. 75° = sin. (60° + 15°) $= \text{sin. } 15° + \text{sin. } 45° = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}.$

306. Cherchons maintenant l'expression de sin. 18°, ou du demi-côté du décagone inscrit. Fig. 31. Soit AE ce côté; l'angle C sera donc de 36°. Du point A comme centre, et de l'intervalle AE, je coupe CE en F, et je mène la ligne AF. J'ai AE = AF, et AFE = AEF = 72°. Donc FAE = C = ½ CAE = CAF. Donc aussi CF = AF = AE. Mais les triangles isoscèles CAE, FAE ont l'angle E commun, et sont par conséquent semblables; donc CE : AE :: AE : FE :: AE : CE — CF :: AE : CE — AE. Soit AE $= x$, et le rayon CE = 1; alors le premier rapport et le dernier donnent $1 : x :: x : 1 - x$, d'où $x^2 = 1 - x$, équation de laquelle résulte $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$. Donc $\frac{1}{2} x$ ou sin. 18° $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

307. On a ensuite sin. 72° = cos. 18° $= \sqrt{(1 - \text{sin.}^2 18°)}$; puis, sin. 54° = sin. (72° — 18°) = sin. 72° cos. 18° — cos. 72° sin. 18° = cos². 18° — sin.² 18° = 1 — 2 sin.² 18°. Et enfin, sin. 36° = cos. 54° $= \sqrt{(1 - \text{sin.}^2 54°)}$.

308. De ces expressions ainsi trouvées, on tire toutes les autres, au moyen ou des formules (II. 1ᵉ, 2ᵉ), ou de la formule (I. 15ᵉ),

qu'on doit préférer autant qu'il se peut, en opérant, comme on l'a vu (305).

309. De la table (304) j'obtiens aussi, au moyen de la formule (I. 31e), les expressions ci-après de quelques tangentes.

Tang. $15° = 2 - \sqrt{3}$; tang. $18° = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$;

Tang. $30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tang. $36° = \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$;

Tang. $54° = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$; tang. $60° = \sqrt{3}$;

Tang. $72° = \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$; tang. $75° = 2 + \sqrt{3}$.

310. Pour arriver à des expressions aussi simples, l'artifice consiste à faire disparaître le dénominateur. En voici un exemple. Tang. $15° = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1) : \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$. Or on sait que *le produit de la différence de deux quantités multipliée par leur somme est égal à la différence entre les quarrés de ces mêmes quantités*. Par exemple, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Donc, pour faire disparaître le radical du dénominateur, je n'ai qu'à considérer $(\sqrt{3} + 1)$ comme la somme de deux quantités, et la mulpliant par la différence $(\sqrt{3} - 1)$, j'aurai pour produit la différence des quarrés, ou $(3 - 1) = 2$. Donc (18, 17), tang $15° = (\sqrt{3} - 1)^2 : 2 = (4 - 2\sqrt{3}) : 2 = 2 - \sqrt{3}$.

311. Pour parvenir au but, il est quelquefois à propos d'élever au quarré. Par exemple, tang. $18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) : \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} = (\sqrt{5} - 1) : \sqrt{2}\sqrt{(5 + \sqrt{5})}$. Donc tang.^{2} $18° = (5 - 2\sqrt{5} + 1) : (10 + 2\sqrt{5}) = (3 - \sqrt{5}) : (5 + \sqrt{5}) = (3 - \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) : (5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = (5 - 2\sqrt{5}) : 5 = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$.

312. Les expressions finies (304, 309) peuvent être utiles dans la théorie des polygones et dans les problèmes mécaniques. Quant au but de ce chapitre, les expressions modernes sont préférables.

313. Les lignes trigonométriques ont été calculées par les uns avec dix, par d'autres avec quinze chiffres. Il faut douze décimales, en supposant $R = 1$, pour avoir avec précision les secondes et les dixièmes de seconde, lorsqu'il s'agit ou des sinus des angles qui

diffèrent très-peu de 90°, ou des cosinus des angles de quelques secondes seulement. Cependant les tables les plus communes sont réduites à sept décimales, parce qu'elles sont d'un usage plus commode et d'une exactitude suffisante dans la plupart des cas. Elles contiennent les sinus, tangentes et sécantes, de minute en minute, depuis 0° jusqu'à 90°, et par conséquent les cosinus, les cotangentes et les cosécantes (7, 11). Ces tables servent aussi pour les arcs de plus de 90°, (54, 62). On ne peut qu'admirer la patience de ceux qui les ont construites par des moyens extrêmement pénibles, sans le secours du calcul différentiel et de tant de formules qu'on a trouvées depuis.

514. Je suppose, 1° que dans de certains calculs qui exigent de la précision, on desire, comme il arrive quelquefois, l'expression d'une ligne trigonométrique avec plus de chiffres que n'en donnent les tables; les moyens les plus expéditifs seront alors ceux qui sont indiqués dans le chapitre précédent: 2°. qu'on veuille calculer de nouvelles tables avec plus de décimales qu'on ne l'a encore fait; pour y parvenir, voici la méthode que je préfère comme très-rapide.

Je fais $B = 1°$ dans la formule (II. 15e), d'où je tire alors $\sin.(A + 1°) = 2 \sin. A \cos. 1° - \sin.(A - 1°)$. Mais (I. 22e), $2 \sin. A \cos. 1° = 2 \sin. A - 4 \sin.^2 30' \sin. A$. Donc

$$\sin.(A + 1°) = \sin. A + \sin. A - \sin.(A - 1°) - 4 \sin.^2 30' \sin. A.$$

515. Dans cette formule, donnée par M. Delambre, observez que les deux termes du milieu sont la différence *première* entre $\sin.(A - 1°)$ et $\sin. A$. Or quand vous voulez calculer $\sin.(A + 1°)$, il est bien entendu que vous avez déjà calculé les deux sinus précédens, en ajoutant au premier leur différence que par conséquent vous connaissez. De cette différence retranchez la valeur de $4 \sin.^2 30' \sin. A$ (valeur qui constitue la différence *seconde* ou la différence entre les différences premières), et ajoutez le reste à $\sin. A$. C'est en quoi consiste toute l'opération pour avoir la valeur de $\sin.(A + 1°)$; et on voit qu'elle se réduit au calcul de $4 \sin^2. 30' \sin. A$, que nous ramènerons à une simple addition très-abrégée.

516. Voici donc la marche pour construire en peu d'heures une table de sinus, de degré en degré. Calculez d'abord les sinus des

arcs de 30′ et de 1°, par les moyens préparés et déjà appliqués (272 à 274), mais avec 3 ou 4 décimales de plus que vous ne vous l'êtes proposé, afin que le dernier chiffre des sinus de la table soit aussi exact qu'il est possible. Doublez le sinus de 30′; formez le quarré de cette quantité ainsi doublée, et les multiples de ce quarré, comme il a été indiqué (273). Ces préparations faites, les multiplications de $4 \sin.^2 30'$ par les valeurs successives de sin. A n'exigeront que peu de momens (274).

317. Soit donc $A = 1°$. La formule (314) vous donne d'abord $\sin. 2° = \sin. 1° + \sin. 1° - 4 \sin.^2 30' \sin. 1°$. Calculez le dernier terme par la méthode (274), et retranchez-le de sin. 1°. Le reste ajouté à sin. 1° sera la valeur de sin. 2°. Ce reste est par conséquent aussi la différence entre sin. 2° et sin. 1°, ou la différence première qui sert à former le sinus de 3°, puisqu'on a $\sin. 3° = \sin. 2° + \sin. 2° - \sin. 1° - 4 \sin.^2 30' \sin. 2°$.

318. Continuez ainsi, de degré en degré, jusqu'à 30°; puis vous avancerez plus encore, en recourant aux formules (I. 10e, 15e), dans lesquelles vous substituerez de nouveau 1°, 2°.... 29°, au lieu de A.

319. Les mêmes règles serviront à construire les sinus de minute en minute, en écrivant partout (314 à 318) *minute* au lieu de *degré*, et 30″ au lieu de 30′. Mais l'égalité successive des différences, ou premières, ou secondes, ou etc. suffira souvent sans autres calculs.

320. Le calcul des tangentes ne présente pas autant de facilité que celui des sinus. En examinant les formules connues jusqu'à présent, il nous semble qu'il n'y en a aucune qui soit aussi propre à abréger le travail, que la formule nouvelle que nous avons donnée (I. 43e). Lorsque les tangentes sont une fois calculées jusqu'à 45°, on aura alors les autres par de simples additions, au moyen de cette formule transformée comme il suit, $\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}A) = 2 \text{tang.} A + \text{tang.}(45° - \frac{1}{2}A)$.

Quant au calcul des tangentes jusqu'à 45°, on y procédera par la voie qui me semble la moins laborieuse de celles dont on a fait usage jusqu'ici, c'est-à-dire au moyen de la division du sinus par le cosinus (I. 31e). Il faut alors se servir des sinus et des cosinus

comme on les aura déjà calculés, c'est-à-dire avec deux ou trois chiffres de plus que ce qu'on en veut mettre dans la table, et employer la méthode abrégée dont nous donnerons un exemple (331).

321. Les tangentes calculées, on aura les sécantes (41) par de simples additions, au moyen de l'une ou l'autre des formules (I. 9ᵉ, 10ᵉ), en se rappelant que coséc. $= \frac{1}{\sin.}$, (37). On aura par conséquent coséc. $A = \frac{\cot. \frac{1}{2} A + \text{tang.} \frac{1}{2} A}{2} = \cot. A + \text{tang.} \frac{1}{2} A$.

322. Après avoir vu comment on peut ou construire des tables ou calculer immédiatement une ligne trigonométrique, il est à propos de dire quelques mots de l'opération inverse. Je suppose que par le résultat d'un calcul on ait une ligne trigonométrique exprimée avec plus de décimales que les tables n'en donnent, et qu'il importe de savoir la mesure exacte de l'arc auquel cette ligne correspond. A l'exception des cas énoncés (313), les tables ordinaires à 7 décimales suffisent pour faire connaître un arc avec toute la justesse dont on peut avoir besoin dans la pratique. Si donc on a une expression avec un plus grand nombre de décimales, on négligera celles qui suivent la septième, et on aura par les tables l'angle cherché. Mais s'il s'agit de l'expression du sinus d'un arc de près de 90°, ou du cosinus d'un angle très-petit, il faut avoir recours à la série (S), (241). On substituera dans cette série l'expression donnée, au lieu de sin A, et on calculera autant de termes qu'il sera nécessaire pour avoir avec précision la valeur de l'arc A, ou de (90° — A), dans le cas où l'expression serait celle d'un cosinus.

323. Pour abréger le calcul, soit sin. $A = a$; en supposant, de la même manière qu'on a déjà vue plus d'une fois,

$$A = a + \frac{B}{3} + \frac{C}{5} + \frac{D}{7}, \text{ etc., on aura}$$

$$B = a^2 \tfrac{1}{2} a \qquad D = a^2 \tfrac{5}{6} C$$

$$C = a^2 \tfrac{3}{4} B \qquad \text{etc.}$$

324. La loi de la série ci-dessus et celle des coefficiens numériques dans les valeurs de B, C, D, etc. sont manifestes. On traitera a^2 comme nous avons fait pour A^2, (275); et quand on aura

trouvé la valeur de A, on cherchera dans la table (AA) à combien de degrés, de minutes, de secondes, etc. elle correspond.

On s'épargnera de pareilles fatigues en bien des cas, si l'on est pourvu des tables trigonométriques de Gardiner.

325. Nous supposons en général le lecteur muni de tables de trigonométrie; elles sont absolument nécessaires pour l'étude et pour la pratique de cette science. Cela présupposé, nous conseillons de s'exercer à vérifier les séries, avec peu de termes pour y employer peu de temps, ainsi que les formules contenues dans ce chapitre et dans le précédent. En tête des tables on trouve ordinairement des instructions sur leur usage. Nous y ajouterons deux observations indispensables.

326. En premier lieu, les lignes trigonométriques des tables ordinaires semblent rapportées à un rayon de 100000 parties. Dans le fait on peut en divers cas omettre les deux derniers chiffres séparés, sous la forme de décimales, par le point ou par la virgule: (nous préférons la virgule, parceque le point est souvent le signe de la multiplication). Mais quelle qu'ait été la raison de construire ainsi les tables, il n'en résultera aucun embarras, si on se rappelle la règle (38). La série (267) dérivée de formules dans lesquelles on a supposé $R = 1$, donne, par exemple, $\sin. 8° = 0,1391731$. Soit $R' = 100000$; on aura (39), $\sin.' 8° = R' \sin. 8° = 13917,31$; c'est ce qu'on trouve dans les tables pour cette valeur.

327. Dans la pratique, il est plus utile de prendre les nombres des tables tels qu'ils doivent être dans la supposition où $R = 1$; ce qui est facile en avançant la virgule de cinq chiffres à gauche; et c'est ce que nous ferons toujours, parce qu'on se dispense ainsi de tenir compte du rayon dans les calculs; ce qui ne se pourrait sans des erreurs très-graves, si on employait les lignes trigonométriques sous la forme donnée par les tables.

328. Nous observons en second lieu, que lorsque les différences des lignes trigonométriques, de minute en minute, marchent également ou à peu-près, on peut se servir de la règle de trois pour trouver les parties proportionnelles correspondantes aux secondes, aux dixièmes de seconde, etc. Mais si les différences sont notablement inégales, comme il arrive pour les tangentes de 73° à

90°, cette règle ne s'applique plus avec justesse. Un exemple fera comprendre ce que nous disons.

329. Qu'on demande la tangente de 85° 7′ 25″.

Les tables donnent...............

$$\text{tang.}\begin{cases} 85°\,8' = 11,7447786 \\ 85°\,7' = 11,7045003 \end{cases}$$

Différence........... 0, 0402783

Si telle est la différence de la tangente pour 1′ ou 60″ de différence dans l'arc, quelle sera la différence de la tangente pour 25″ de différence dans l'arc ? Par la règle ordinaire, on a

$60'' : 25'' :: 0{,}0402783 : x = \frac{25 \times 0{,}0402783}{60} = 0{,}0167826$; et en ajoutant .... 11,7045003, valeur de tang. 85° 7′, on aura..................... 11,7212829 pour la valeur de tang. 85° 7′ 25″.

330. Cette opération suppose visiblement que les variations des arcs, lorsqu'elles ne sont que d'une minute, sont proportionnelles à celles des lignes trigonométriques ; ce qui en effet a toujours lieu pour les sinus, dans les tables qui n'ont que sept décimales seulement. Mais il n'en est pas ainsi des tangentes. Dans le cas présent,

$$\text{tang. } 85°\,7' - \text{tang. } 85°\,6' = 0,\ 0400050$$
$$\text{tang. } 85°\,9' - \text{tang. } 85°\,8' = 0,\ 0405545.$$

En comparant ces différences avec la différence intermédiaire trouvée ci-dessus, 0,0402783, (329), on voit qu'elles procèdent avec une inégalité assez considérable; et puisqu'on la néglige dans la proportion, le résultat ne peut être exact.

331. Il faut dans ce cas avoir recours à la formule rigoureuse (II. 33ᵉ), qui, pour 25″ de variation dans l'arc, donne δ tang. $85°\,7' = \frac{\sin.\ 25''}{\cos.\ 85°\,7'\ \cos.\ 85°\,7'\,25''}$.

Or les tables donnent cos. 85° 7′ = ... 0,0851271 ; et par le moyen de la règle de trois, on a

cos. 85° 7′ 25″ = ... 0,0850063

Produits	0,00681017
	42563
	51
	3
Donc cos. 85° 7′ × cos. 85° 7′ 25″ =	0,00723634, *diviseur.*
Sin. 25″ = 0,00012120342, *dividende.*	0,01674927, *quotient.*
4884002	
542198	
35654	
6709	
196	
51	
0.	

332. Dans cette division faite conformément à la formule, il faut observer que pour avoir avec exactitude le dernier chiffre du quotient, nous avons commencé du troisième chiffre effectif du quotient après la virgule, et non du second, à négliger dans la multiplication les unités du produit de ce chiffre par le dernier du diviseur. De même pour le quatrième chiffre effectif du quotient, nous avons omis son produit par le dernier du diviseur, et les unités de son produit par l'avant-dernier; pour le cinquième du quotient, le produit par les deux derniers du diviseur, et les unités du produit par l'antépénultième; et ainsi de suite, en ponctuant successivement les chiffres du diviseur, à mesure que la multiplication commence par chacun d'eux. C'est la méthode connue pour abréger la division des décimales; elle est analogue à celle qu'on a déjà vue (273), et qui abrège leur multiplication. Pour avoir le quotient exact avec sept décimales effectives, nous avons pris le dividende avec deux décimales de plus que n'en a le diviseur, sans compter les zéros qui commencent ces deux nombres. Nous avons tiré de la table (AA) la valeur de ce dividende ou de

sin. 25″; car on peut prendre l'arc au lieu du sinus, et s'il n'excède pas une minute, avoir encore au moins dix décimales exactes, comme il est aisé de le reconnaître en calculant sin. 1′ par le moyen de la série (W), (267).

333. Après ces remarques nécessaires à l'intelligence de l'opération, examinons-en le résultat.

On a donc (331), δ tang. 85° 7′ = 0,0167493

En ajoutant....... tang. 85° 7′ = 11,7045003, la formule rigoureuse donne tang. 85° 7′ 25″ = 11,7212496. On a trouvé (329) par la règle de trois.............. 11,7212829. Donc l'erreur de la règle de trois est.............. 0,0000333.

334. Il faut en conclure que lorsqu'on veut avec exactitude les tangentes de 73° à 90°, on doit chercher les parties proportionnelles pour les secondes par le moyen de la formule différentielle (II. 33ᵉ). On emploiera l'autre (II. 34ᵉ) pour les cotangentes de 0° à 17°.

335. Il est clair que si la tangente est donnée, et que l'on cherche l'arc auquel elle correspond, alors la formule (II. 33ᵉ) à calculer pour avoir les secondes, les dixièmes, etc., doit s'exprimer ainsi : sin. δB ou δB = δ tang. B cos. B cos. (B + δB). Faisons-en l'application au même exemple. Je suppose qu'on demande l'arc auquel correspond la tangente 11,7212496. Je cherche dans les tables la tangente la plus approchée, que je trouve être tang. 85° 7′ = 11,7045003 = tang. B. Je prends la différence entre ces deux tangentes, et je la désigne ainsi : δ tang. B = 0,0167493. Je la multiplie par cos. B = cos. 85° 7′. Ce produit, que j'appelle P, doit être multiplié par cos. (B + δB). Mais comme δB m'est inconnue, je l'omets pour le moment, ce qui revient au même que d'employer la formule (II. 40ᵉ) au lieu de la formule (II. 33ᵉ), et je n'emploie que cos. B. En faisant le calcul, je trouve δB = P × cos. B = 0,000121375. Je cherche dans la table (AA) l'arc dont la valeur est le plus immédiatement au dessous de cette valeur de δB ; je trouve que c'est l'arc de 20″, et qu'il reste 0,000024412. Je trouve de même que ce reste répond à un arc de 5″, et qu'il reste encore 0,000000171. Pour avoir la valeur de ce second reste

en décimales de secondes, je prends dans la même table l'arc d'une seconde $= 0,000004848$, et je dis

$$0,000004848 : 1'' :: 0,000000171 : x'' = 0'',035.$$

Donc $\partial B = 25'',035$. Donc l'erreur qui résulte de ce qu'on a employé cos. B au lieu de cos. $(B + \partial B)$ ne va pas à quatre centièmes de seconde. Au surplus, si on voulait une exactitude rigoureuse; après avoir trouvé $\partial B = 25''$ à très-peu-près, on recommencerait la dernière multiplication, en y employant cos. $(B + 25'')$, au lieu de cos. B, et on aurait $\partial B = P \times$ cos. $85° \, 7' \, 25'' = 0,000121202 = 25''$ exactement.

336. En général on peut, sans erreur sensible, employer la formule (II. 40e), au lieu de la formule (II. 33e), dans cette opération; mais non dans la précédente, du moins si l'on veut la tangente avec précision (sans quoi il vaudrait autant faire usage de la règle de trois); car en employant pour cette opération la formule (II. 40e), on trouverait tang. $85° \, 7' \, 25'' = 11,7212258$, valeur plus petite de $0,0000238$, que la valeur exacte.

337. Les tables dont nous avons parlé dans ce chapitre, se nomment *Tables trigonométriques en nombres naturels*; ce qui les distingue de celles auxquelles nous allons passer.

CHAPITRE VII.

Des Tables trigonométriques en logarithmes.

338. On ne peut assez dire combien nous sommes redevables au Baron de Neper, Écossais, inventeur des logarithmes dont l'utilité dans les Mathématiques est au dessus de toute expression. C'est à l'Algèbre à développer la théorie sur laquelle ils sont fondés, et les services importans et multipliés qu'on en retire. Cependant nous insérerons ici une partie des règles qui les concernent, pour nous mettre en état de traiter complètement de la construction des tables trigonométriques en logarithmes.

339. Si l'on nomme c la caractéristique d'un logarithme, on sait que $c+1$ exprime la quantité des chiffres du nombre entier correspondant à ce logarithme. Par exemple 0,301030 est le logarithme de 2, et 2,301030 est le logarithme de 200; or dans le premier cas, $c=0$; donc le nombre entier doit avoir un seul chiffre, et en effet ce nombre est 2. Dans le second cas, $c=2$; donc le nombre correspondant, 200, doit avoir et a en effet trois chiffres. D'après cette règle, il faut que la caractéristique des logarithmes des fractions décimales soit moindre que zéro, c'est-à-dire négative. Nous traiterons seulement des logarithmes des fractions décimales, parce que toutes les autres fractions peuvent se réduire à celles-là.

340 Les logarithmes des fractions décimales peuvent s'exprimer de trois manières différentes. Soit par exemple la fraction $0.75=\frac{75}{100}$. Selon la théorie des logarithmes, on aura $\log.\frac{75}{100}=\log.75-\log.100=1,87506-2,00000$, en n'employant, pour abréger, que cinq décimales; et en effectuant la soustraction, $\log.\frac{75}{100}=-0,12494$. Mais cette méthode, quoiqu'exacte, est absolument proscrite, à cause des inconvéniens des logarithmes négatifs. Le principal est qu'on ne peut avoir par les tables le nombre correspondant à un pareil logarithme, qu'en regardant ce nombre comme le dénominateur d'une fraction ayant l'unité pour numérateur. D'où il suit que le nombre correspondant à chaque différent logarithme négatif a un dénominateur différent, et qu'on a ainsi des fractions qui ne jouissent pas de l'avantage qu'ont les fractions décimales, d'être immédiatement comparables entre elles.

341. La seconde manière, adoptée par quelques Auteurs, consiste à effectuer la soustraction sur les seules caractéristiques. Par exemple, $\log.\frac{75}{100}=1,87506-2,00000=-1+0,87506$; ce qu'ils écrivent encore comme il suit: $\overline{1},87506$. Cette manière est expéditive; mais elle n'est pas la plus usitée, parce qu'elle nécessite aussi l'emploi du signe négatif, et qu'il faut de l'attention pour ne pas se tromper dans les deux opérations contraires, l'addition des décimales et la soustraction des caractéristiques. Voici un exemple de cette manière; ayant trouvé le log. de $\frac{75}{100}$, je suppose qu'on cherche par les logarithmes le produit de 12 par $\frac{75}{100}$;

$$\log.\ 12 = 1{,}07918$$
$$\log.\ \tfrac{75}{100} = \bar{1}{,}87506$$

Somme ou log. $(12 \times \tfrac{75}{100}) = \log.\ 9 = 0{,}95424$
Et tel est en effet le log. de 9 dans les tables.

Nous croyons devoir avertir que quelques Auteurs omettent dans les tables la virgule entre la caractéristique et les décimales.

342. Venons à la troisième manière, qui semble plus généralement suivie. Comme il ne peut arriver dans aucun calcul qu'on se trompe de dix mille millions, on ne court aucun risque de supposer la caractéristique plus forte d'une dixaine d'unités, toutes les fois que cela sera nécessaire, pour l'avoir toujours positive. Ainsi dans l'exemple proposé, si on fait log. $\tfrac{75}{100} = 11{,}87506 - 2{,}00000$, on aura log. $0{,}75 = 9{,}87506$: mais suivant la règle générale (339), $9{,}87506 =$ log. 7500000000; donc pour que ces caractéristiques ainsi confondues induisissent en erreur, il faudrait se tromper au point d'employer 7500 millions au lieu de $\tfrac{75}{100}$ ou des $\tfrac{3}{4}$ d'une unité; ce qui est impossible.

343. Si l'on observe que $9{,}87506 = 10 - 0{,}12494$, on en conclura 1°. qu'il est facile de convertir en logarithme positif tout logarithme négatif, (340); 2°. que la caractéristique du log. d'une fraction décimale est toujours moindre que 10.

344. En ajoutant 10 à la caractéristique, on a donc log. $0{,}75 = 9{,}87506$. Par la même raison, log. $0{,}075 =$ log. $\tfrac{75}{1000} = 8{,}87506$; log. $0{,}0075 =$ log. $\tfrac{75}{10000} = 7{,}87506$; et ainsi de suite. D'où résulte cette règle : *le logarithme d'une fraction décimale a pour caractéristique le complément à 9 du nombre des zéros qui se trouvent de suite après la virgule dans la fraction donnée.*

345. De cette règle il suit que quand on aura le logarithme d'une fraction décimale, pour connaître cette fraction, on cherchera dans les tables à quel nombre répond le logarithme donné, sans tenir compte de la caractéristique; puis on mettra, avant le nombre trouvé, un zéro suivi de la virgule et d'autant de zéros qu'il manquait d'unités à la caractéristique pour qu'elle fût égale à 9. Tout cela sera facile à entendre, pour peu qu'on réfléchisse aux exemples qui précèdent et à ceux qui suivent.

346. Nous avons dit que le log. d'une fraction décimale a toujours une caractéristique moindre que 10; de là il suit que *dans l'addition des logarithmes des fractions décimales, on ne doit pas tenir compte des dixaines de la caractéristique de la somme.* On les supprimera donc; et il en résultera que si le log. d'une somme doit être celui d'un nombre entier, la caractéristique se trouvera exacte et sans augmentation; et que si ce logarithme doit être celui d'une fraction, la caractéristique sera conforme à la règle (344).

347. Par exemple, si l'on cherche par les logarithmes le produit de $24 \times 0{,}75$, on aura log. $24 =$ 1,38021

log. $0{,}75 =$ 9,87506

somme 11,25527

En négligeant les dixaines de la somme, nous aurons seulement 1,25527, et l'erreur qui résulte de la règle (344) sera détruite, puisque ce nombre est le logarithme exact de $18 = 24 \times 0{,}75$.

Mais si l'on cherche le produit de $0{,}75 \times 0{,}4$, on aura

log. $0{,}75 =$ 9,87506

log. $0{,}4 =$ 9,60206

somme 19,47712

Par la suppression des dixaines, la somme se réduit à 9,47712; et il est alors aisé de voir, d'après la règle donnée (344), que la caractéristique indique une fraction décimale, et que le logarithme trouvé est celui de $0{,}3 = 0{,}75 \times 0{,}4$.

348. Qu'on observe donc, comme une règle générale, de supprimer toujours les dixaines de la caractéristique. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'élever une fraction décimale à une puissance donnée; puisque le carré de 0,4 est 0,16, on aura 2 log. $0{,}4 =$ 19,20412, et on écrira seulement 9,20412. De même, si l'on veut par les logarithmes le cube de 0,4 qui est 0,064, on aura 3 log. $0{,}4 =$ 28,80618, et on écrira 8,80618. On voit que nous avons négligé dans la caractéristique une dixaine pour la seconde puissance, et deux pour la troisième; on en supprimerait trois pour la quatrième, et ainsi de suite.

349. Concluons de là que pour l'extraction des racines, qui

est l'opération inverse, il faut suppléer ces dixaines négligées; sans quoi le calcul ne pourrait être exact. On écrira donc, ou on sous-entendra $m - 1$ de dixaines avant la caractéristique, en appelant m l'exposant du radical. Ainsi on suppléera une dixaine pour la racine quarrée, deux pour la racine cubique, et ainsi de suite. Par exemple, pour avoir par le moyen des logarithmes la racine cubique de 0,064, dont le logarithme, suivant la règle (344) est 8,80618; avant de diviser ce logarithme par 3, suppléez deux dixaines à la caractéristique, en écrivant 28,80618; le quotient de la division, 9,60206, sera le logarithme de $0,4 = \sqrt[3]{0,064}$.

350. Je me suis un peu étendu sur les logarithmes des fractions décimales, à cause de l'usage continuel qu'on en fait dans la Trigonométrie. Les tangentes, jusqu'à 45°, et tous les sinus ne sont que des fractions décimales, lorsqu'on suppose R = 1. Les caractéristiques de leurs logarithmes sont aussi, dans les tables, conformes à la règle que nous avons donnée (344). Quant aux tangentes des arcs plus grands que de 45°, quelques tables emploient pour caractéristiques 10, 11, etc. Dans ces tables, les lignes trigonométriques sont considérées, non comme parties de R = 1, mais comme parties de R = 10000000000. Lorsque je prends les logarithmes dans ces tables, je néglige constamment la dixaine, m'en tenant à la seule supposition que R = 1, comme à la plus commode.

351. Les tables trigonométriques en logarithmes ont été calculées par Briggs avec quinze chiffres pour chaque centième de degré, (*Trigonometria Britannica*, Goudæ, 1633); et par Adrien Ulacq, avec onze chiffres, de dix en dix secondes, (*Trigonometria artificialis*, Goudæ, 1633). Ces tables, devenues aujourd'hui très-rares, ont été réduites à huit chiffres par Gardiner, dont l'édition donnée à Londres en 1742, a été réimprimée en plusieurs endroits. Elles contiennent aussi les logarithmes des nombres jusqu'à 100000; et par le moyen des parties proportionnelles qui y sont insérées, elles les donnent aisément jusqu'à un million. Ce sont les tables les plus généralement adoptées. En 1795, Firmin Didot les a publiées à Paris par la méthode stéréotype, au moyen de laquelle seront corrigées toutes les erreurs qui pourront se découvrir.

352. Je suppose actuellement, comme je l'ai fait pour les lignes trigonométriques en nombres naturels, qu'on ait besoin, dans certains cas, de leurs logarithmes avec plus de chiffres que n'en ont ceux des tables que l'on possède; ou bien que l'on veuille construire de nouvelles tables plus étendues que celles qu'on a faites jusqu'à présent: voyons quels sont alors les moyens les plus expéditifs pour résoudre ces questions. Les facilités qui en résulteront, seront utiles pour abréger en général le calcul du logarithme d'un nombre quelconque.

353. PROBLÈME. *Un nombre étant donné, trouver son logarithme.*

Dans la théorie des logarithmes, l'équation fondamentale est $b^\lambda = n$, n représentant un nombre quelconque, λ son logarithme, b la base du système. De là naissent les trois conséquences qui suivent.

354. Chaque valeur différente de la *base* constitue un *système* différent de logarithmes. Il est inutile d'observer qu'en changeant b, il faut aussi changer λ dont dépend l'égalité avec un même nombre n. Il est de même évident que l'équation n'atteindrait pas le but qu'on se propose, si on faisait $b = 1$.

355. *Le logarithme de l'unité est toujours zéro.* Car on n'a $b^\lambda = 1$, que lorsque $\lambda = 0$.

356. *Le logarithme de la base est toujours l'unité.* En effet si $b^\lambda = b$, il faut que $\lambda = 1$.

357. Passant maintenant à la solution du problème, j'observe que la question exige que le logarithme soit fonction (292) du nombre. Et puisque cette fonction doit s'anéantir lorsque $n = 1$, je fais $n - 1 = x$, et le logarithme fonction de x; et j'ai recours à la méthode des indéterminées (261).

358. Soit donc $\log.(1 + x) = Mx + Nx^2 + Px^3 + Qx^4 + \text{etc.}$ Puisque $\log.(1 + x)^2 = \log.(1 + 2x + x^2) = 2\log.(1 + x)$, il s'ensuit qu'en écrivant, dans la série, $(2x + x^2)$ au lieu de x, cette série ainsi transformée sera égale au double d'elle-même. Mettez en équation ces deux valeurs nouvelles, transportez les

termes d'un seul côté, et ordonnez conformément aux puissances de x, (263); vous aurez

$$\begin{array}{rrrrr} o = 2Mx + & Mx^2 + & 4Nx^3 + & Nx^4 + & \text{etc.} \\ & + 4N & + 8P & + 12P & + \text{etc.} \\ & & & + 16Q & + \text{etc.} \\ - 2M & - 2N & - 2P & - 2Q & - \text{etc.} \end{array}$$

359. Égalant actuellement à zéro la somme des coefficiens dans chaque colonne verticale, selon les principes exposés (264), on trouve $2M - 2M = 0$; puis $M + 4N - 2N = 0$; d'où on déduit $N = -\frac{1}{2}M$. En substituant cette valeur dans la troisième colonne, on a $P = \frac{1}{3}M$. La quatrième colonne donne $Q = -\frac{1}{4}M$. La cinquième, si on continue l'opération, donnera $R = \frac{1}{5}M$, et ainsi de suite. Ces valeurs de N, P, Q, etc. substituées dans la première équation (358), produisent celle qui suit, pour la solution du problème.

(A) ...... $\log. (1 + x) = M(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.})$

On verra (512) comment on peut tirer de cette équation la valeur de log. x.

360. Pour confirmer ce qne nous avons dit (354) sur le nombre infini des systèmes de logarithmes, il était nécessaire que la valenr de l'une des indéterminées restât arbitraire, et qu'elle eût avec la valeur de la base une relation immédiate qne nous rechercherons tout à l'heure (371). On nomme *module* cette indéterminée M.

361. Le système dans lequel on suppose $M = 1$ est celui auquel Neper s'est attaché. Les logarithmes calculés dans cette suppotion, se nomment logarithmes *naturels*, ou encore logarithmes *hyperboliques*, parce que les aires hyperboliques asymptotiqnes, représentées en général par les logarithmes dans un système quelquelconque, appartiennent dans ce cas à la plus remarquable et à la plus simple des hyperboles, c'est-à-dire à l'hyberbole équilatère de puissance égale à l'unité.

362. On ne voit pas d'abord comment l'équation (A) peut donner le log. d'un nombre quelconque; car la série est, à la vérité, convergente si on fait $x < 1$ ou $x = 1$; mais si l'on augmente cette valeur, bientôt la série devient divergente. Pour remédier

à cet inconvénient, ayons recours aux transformations. Nous verrons bientôt (398) un autre moyen de la rendre convergente dans tous les cas.

363. En faisant x négatif, l'équation (A) devient

(B).... $\log.(1-x) = M\left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \text{etc.}\right)$

364. Si on a $x < 1$, cette série prouve ce qui a déjà été dit (339, 340), savoir, que le logarithme d'une fraction est négatif de sa nature.

365. Si $x = 1$, cette série donne $\log. 0 = -\infty$. C'est ce qui résulte aussi de l'équation fondamentale (353); car on ne peut avoir $b^\lambda = 0$, que lorsque $\lambda = -\infty$. On a alors $b^{-\infty} = \frac{1}{b^\infty} = 0$; ce que donne aussi l'équation trigonométrique $\frac{\sin. A}{\text{tang}. A} = \cos. A$, lorsque $A = 90°$, (73).

366. Enfin supposons $x > 1$. Dans ce cas, quelle que soit la valeur de x, la somme de la série est encore $-\infty$. Il semblerait donc que le logarithme de tout nombre négatif est égal à l'infini négatif. Mais la nature de ces logarithmes a excité de longues discussions entre les plus habiles Mathématiciens; et il est encore permis de douter de l'utilité de cette question. Nous nous contenterons de rappeler nos lecteurs à l'équation fondamentale $b^\lambda = n$, qui de fait ne donne aucun système de logarithmes des nombres négatifs. Car n ne peut jamais être négatif à moins que b ne le soit. Et si l'on adoptait pour la base une valeur négative, (ce qui ne serait au surplus qu'une bizarrerie sans but), il en résulterait pour n des valeurs alternativement positives et négatives, selon que λ serait un nombre pair ou impair.

367. Actuellement si l'on soustrait de l'équation (A) l'équation (B), et qu'on réfléchisse que, selon les règles ordinaires du calcul des logarithmes, $\log.(1+x) - \log.(1-x) = \log.\frac{1+x}{1-x}$, on aura

(C).... $\log.\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \text{etc.}\right)$

368. Qu'on veuille donc, par exemple, le log. hyperbolique de 25,

en résolvant l'équation $\frac{1+x}{1-x}=2$, on trouvera $x=\frac{1}{3}$, et par conséquent, puisque $M=1$, (361),

$$\log. 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\text{etc.}\right)$$

Il est aisé de reconnaître que cette série est, sans comparaison, plus convergente que si on faisait $x=1$ dans l'équation (A).

369. Si on appelle I le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque, T le logarithme du même nombre dans un autre système, et S la somme de l'une quelconque des trois séries (A), (B), 2(C); on aura $I=S$, et $T=MS=MI$. Donc en *multipliant le logarithme hyperbolique d'un nombre par le module d'un autre système, on aura le logarithme du même nombre pour ce système.*

370. On a aussi $I=\frac{T}{M}$; donc, *en divisant un logarithme d'un système quelconque par le module de ce système, on aura le logarithme hyperbolique correspondant.*

371. Faisons à présent $\frac{1+x}{1-x}=b$; d'où résulte $x=\frac{b-1}{b+1}$. Avec ces valeurs l'équation (C), divisée par M, devient (356),

$$\frac{1}{M}=2\left(\frac{b-1}{b+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b-1}{b+1}\right)^5+\text{etc.}\right);$$

et fait connaître comment la valeur du module dépend de celle de la base (360). Une seule des deux valeurs peut être un nombre entier.

372. La différentiation des logarithmes pour toutes sortes de différences finies, se trouve facilement par le moyen des formules précédentes. Si un nombre quelconque n reçoit un accroissement δn, on demande quelle est l'augmentation correspondante du log. de n : cette valeur sera donnée par l'équation $\log. n+\delta \log. n = \log.(n+\delta n)$, de laquelle on tire $\delta \log. n=\log.(n+\delta n)-\log. n=\log.\frac{n+\delta n}{n}=\log.\left(1+\frac{\delta n}{n}\right)$.

373. Si on réduit cette dernière expression en série par le moyen de la formule (A), en faisant $x=\frac{\delta n}{n}$, on aura

$$(D)\ldots \partial \log. n = M\left(\frac{\partial n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial n}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial n}{n}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial n}{n}\right)^4 + \text{etc.}\right)$$

Et c'est la formule différentielle que l'on donne ordinairement, et dont on prend seulement le premier terme $\frac{\partial n}{n}$ pour les différences infiniment petites, (194).

374. Si n diminue au lieu de croître, on donnera à ∂n le signe négatif. Alors la série (D) sera entièrement négative; d'où il suit évidemment que si le nombre devient plus petit, le logarithme diminue aussi.

375. Mais nous allons donner une formule nouvelle, beaucoup plus convergente, et qui pourra avec avantage remplacer toutes les précédentes.

Faisons $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+\partial n}{n}$; d'où l'on tire $x = \frac{\partial n}{2n+\partial n}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (C), et mettant ∂ log. n au lieu de log. $\frac{n+\partial n}{n}$, (372), on aura

$$(F)\ldots \partial \log. n = 2M\left(\frac{\partial n}{2n+\partial n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial n}{2n+\partial n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial n}{2n+\partial n}\right)^5 + \text{etc.}\right)$$

376. Cette série est, sans comparaison, plus convergente que la série (D), pour calculer la différence d'un logarithme connu à un autre plus grand, ou plus petit. Dans ce dernier cas, il suffit de donner à ∂n le signe négatif.

377. Si on part de la supposition que log. n = log. 1, cette même série (F) servira pour calculer le logarithme de tout nombre positif, plus grand ou plus petit que l'unité.

378. Faisons un premier usage de cette formule. Ayant trouvé (367) une série expéditive pour calculer (368) le logaritme hyperbolique de 2, (la formule (F) donnerait la même série en faisant $n = 1$ et $\partial n = 1$), on a aussi le log. de 4, puisque log. $4 =$ log. $2^2 = 2$ log. 2. Ayant le log. de 4, on calculera en peu de minutes, par la formule (F), le log. de 5, qui a coûté plusieurs jours du travail le plus fastidieux aux premiers constructeurs des logarithmes, parce qu'ils ne connaissaient aucune des formules précédentes. Dans ce cas-ci, $n = 4$, $\partial n = 1$, et par conséquent l'équation (F) devient

$$\partial \log. 4 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \text{etc.}\right)$$

Quatre termes de cette série suffisent pour obtenir la quantité qu'il faut ajouter au log. de 4 pour avoir le log. hyperbolique de 5 avec sept décimales exactes. Ce log. de 5 ajouté à celui de 2 donne log. $10 = 2{,}302585 +$.

379. Si au lieu du log. de 4, on eût employé le logarith. de 6 pour arriver à log. 5, alors la formule (F) eût donné $-\frac{\partial n}{2n - \partial n} = -\frac{1}{11}$; d'où il résulte que pour une même valeur de ∂n, la série est plus convergente, quand on peut descendre d'un logarithme plus grand à un plus petit.

380. Le second membre de l'équation (D) renferme la différence *première* (315) d'un logarithme à un autre plus grand; et avec tous ses termes négatifs (374), celle d'un logarithme à un autre plus petit. Mais une somme de termes, tous de même signe, est une quantité supérieure à la somme des mêmes termes ayant des signes qui alternent. Donc *pour un accroissement donné du nombre, le logarithme moindre croît plus que le plus grand.*

381. Si donc on a trois nombres en progression arithmétique, la différence *seconde* (315) de leurs logarithmes doit être négative.

382. Cette différence consiste dans le double des termes du degré pair dans la série (D). En effet les différences se prennent en retranchant la quantité supérieure, ou première en ordre, de l'inférieure ou subséquente, c'est-à-dire ici le logarithme moindre du plus grand; ensorte que la différence prise entre termes tous négatifs, doit être affectée de signes tous positifs; et cette différence, qui est la plus grande (380) se retranche ensuite de l'autre plus petite qui a ses signes alternatifs; ce qui rend la différence seconde négative, et fait disparaître les termes impairs. Écrivez les différences premières entre trois logarithmes successifs, puis la différence entre ces différences, et vous concevrez la chose facilement.

383. Étant donc donné le logarithme de $(n - \partial n)$ et celui de n, on trouve celui de $(n + \partial n)$ en retranchant la différence seconde, c'est-à-dire $\frac{M}{1}\left(\frac{\partial n}{n}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{\partial n}{n}\right)^4 + \frac{M}{3}\left(\frac{\partial n}{n}\right)^6 + \text{etc.}$, de la différence connue entre log. $(n - \partial n)$ et log. n, et ajoutant le reste à log. n.

384. Quoiqu'en employant cette série dans l'exemple (378), il faille en calculer quatre termes, c'est-à-dire autant de termes qu'en se servant de la mienne; cependant cette méthode due à mon illustre ami Delambre, peut avoir ses avantages pour la construction d'une table des logarithmes des nombres. Mais ma formule (F) est très-générale; elle convient également pour les nombres entiers, rompus ou mixtes; elle n'exige pas qu'il règne entre eux aucune progression; elle n'a besoin, pour toute donnée, que d'un seul logarithme, qui peut même être zéro ou celui de l'unité.

385. Nous sommes actuellement en état de déterminer sans peine le module des logarithmes *tabulaires* ou *vulgaires*, c'est-à-dire ceux des tables ordinaires. Comme, dans ce système, log. $10 = 1$, si dans l'équation $T = MI$, (369), on fait $T = 1$, I sera le logarithme hyperbolique de 10, (378); et, avec 28 décimales, $I = 2,3025850929940456840179914547 = \frac{1}{M}$, équation qui donne $M = 0,4342944819032518276511289189$. En multipliant par ce nombre un logarithme hyperbolique, on obtient le logarithme vulgaire correspondant (369); et si l'on multiplie par le nombre précédent, c'est-à-dire par $\frac{1}{M}$, un logarithme vulgaire, le produit est le logarithme hyperbolique correspondant, (370).

386. Le nombre 10 est la base du système ordinaire ou du système de Briggs, qui le premier calcula les tables ordinaires. Ce système paraît être le plus commode qu'on puisse adopter, parce qu'au moyen d'un changement facile dans la seule caractéristique, le log. d'un nombre sert constamment au même nombre, quoique multiplié ou divisé par une puissance quelconque de 10. Par exemple, nous savons (339) que le log. de 2 est aussi celui de 20, de 2000, de 0,02, etc., pourvu seulement qu'on augmente ou qu'on diminue convenablement la caractéristique. Les logarithmes hyperboliques n'ont pas un pareil avantage,

387. *Étant donné un logarithme, trouver le nombre auquel il correspond.* Ce problème se résout facilement en divisant par M l'équation (A), et la convertissant ensuite par la méthode du retour des séries, (260). Soit donc $(1 + x)$ le nombre cherché, et faisons,

pour abréger, $\frac{\log.(1+x)}{M}=y$; l'équation (A) convertie donnera $x=y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^4}{2.3.4}+$ etc., et par conséquent le nombre cherché $(1+x)=1+y+\frac{y^2}{2}+$ etc.

388. Donc en général, pour un nombre quelconque n, on aura

$$(\text{H})\ldots n=1+\left(\frac{\log.n}{M}\right)^1+\frac{1}{2}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^3+\frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^4+\text{etc.}$$

389. Si dans cette série on suppose $\log.n=1$ et $M=1$, la valeur de n sera (356, 360) la base des log. hyperboliques. On a donc $n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+$ etc., ou, en réduisant, $n=2,718281828459045235360 28$. Ce nombre est d'un grand usage dans le calcul intégral, où on l'indique ordinairement par la lettre e.

390. En comparant la formule (D) avec la formule générale (P), (259), on a $\frac{\delta\log.n}{M}=m$; $\delta n=y$, $\frac{1}{n}=a$, $-\frac{1}{2n^2}=b$, et ainsi de suite. Avec ces valeurs de a, b, c, etc., on trouvera celles de A, B, C, etc. dans la formule (Q), (260); et la série (D) convertie deviendra

$$(\text{K})\ldots\delta n=n\left(\frac{\delta\log.n}{M}+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^3+\text{etc.}\right)$$

391. Cette série fait connaître l'augmentation d'un nombre, relativement à celle de son logarithme. Si la diminution de ce dernier était donnée, on en conclurait de même celle du nombre, en donnant le signe négatif à $\delta\log.n$, (374); les termes impairs seraient alors négatifs.

392. La construction des formules terminée, il sera utile de préparer, comme je l'ai enseigné (273), les facteurs M et $\frac{1}{M}$, dont on a un besoin continuel pour passer des log. hyperboliques aux log. vulgaires, et *vice versâ*.

En prenant les valeurs (385), on a donc

$M =$	0,43429	44819	03251	82765	11289
$2M =$	0,86858	89638	06503	65530	22578
$3M =$	1,30288	34457	09755	48295	33868
$4M =$	1,73717	79276	13007	31060	45157
$5M =$	2,17147	24095	16259	13825	56446
$6M =$	2,60576	68914	19510	96590	67735
$7M =$	3,04006	13733	22762	79355	79024
$8M =$	3,47435	58552	26014	62120	90314
$9M =$	3,90865	03371	29266	44886	01603.

393. De même

$\frac{1}{M} =$	2,30258	50929	94045	68401	79915
$\frac{2}{M} =$	4,60517	01859	88091	36803	59829
$\frac{3}{M} =$	6,90775	52789	82137	05205	39744
$\frac{4}{M} =$	9,21034	03719	76182	73607	19658
$\frac{5}{M} =$	11,51292	54649	70228	42008	99573.
$\frac{6}{M} =$	13,81551	05579	64274	10410	79487
$\frac{7}{M} =$	16,11809	56509	58319	78812	59402
$\frac{8}{M} =$	18,42068	07439	52365	47214	39316
$\frac{9}{M} =$	20,72326	58369	46411	15616	19231.

394. Au moyen de ces préparations, la conversion des log. tabulaires en log. hyperboliques, et réciproquement, se réduit à de simples additions. Si on cherche, par exemple, le log. hyperbolique de 10,09; qu'on prenne le log. vulgaire correspondant (avec huit décimales, s'il se peut, pour avoir la septième plus exacte); ce log. est 1,00389117 : en disposant en leur lieu les produits de $\frac{1}{M}$ par chacun des chiffres qui composent ce logarithme, on aura.

$\frac{1}{M} = 2,30258509$

$\frac{0,003}{M} =$ 690776

$\frac{0,0008}{M} =$ 184207

etc. 20723
230
23
16

Somme 2,3115448 = log. 10,09

395. Cette opération est si abrégée, que quelquefois même on pourrait la préférer pour la formation des logarithmes des nombres composés. Au surplus Lambert (*Supplementa Tabul. Log. et Trigon.* Berlin, 1770) a donné une table des nombres premiers, et une autre table non moins utile, qui contient le plus petit facteur de chacun des nombres composés jusqu'à 100000. Or connaissant les facteurs d'un nombre, on sait qu'en sommant leurs logarithmes, on a le logarithme de ce nombre.

396. Observons ici, en nous servant du même exemple, combien est convergente la formule (F), (375). Il suffit de calculer seulement le premier terme de la série pour avoir exactement, avec 7 et même 8 décimales, la quantité qu'il faut ajouter à 2,3105532, logarithme de 10,08, pour former le log. de 10,09. Dans ce cas $n = 10,08$, et $\delta n = 0,01$; et le premier terme de la série donne

$$\delta \log. n = 2 \times \frac{0,01}{20,17} = 0,0009916$$

$$\log. 10,08 = 2,3105532$$

$$\text{Somme ou } \log. 10,09 = 2,3115448$$

397. Nous répéterons encore une fois que dans tous les calculs d'approximation, quand on veut se servir d'une quantité trouvée pour en calculer une autre, de celle-ci passer à une troisième, et ainsi de suite, il faut faire les calculs avec une, deux, trois, etc. décimales, suivant les cas, de plus que l'on ne desire d'en avoir qui soient exactes; autrement l'erreur des décimales négligées

pourrait s'accumuler et s'étendre sur les dernières décimales conservées.

398. Le log. de 10 étant connu (378), plus de difficulté sur la divergence (362) de la série (A), puisqu'il devient facile de la rendre convergente, même pour les nombres les plus grands. Qu'on demande, par exemple, le log. hyperbolique de 12389. Il est clair que $12389 = 1,2389 \times 10000 = 1,2389 \times 10^4$. Donc log. $12389 = 4$ log. $10 +$ log. $1,2389$. En faisant $x = 0,2389$, la série (A) sera convergente, et donnera un logarithme qui, ajouté à 4 log. 10, produira celui qu'on cherchait.

399. Si au lieu de 12389, le nombre donné était 0,12389, on aurait log. $0,12389 =$ log. $\frac{1,2389}{10} =$ log. $1,2389 -$ log. 10. De même à 0,0012389 on substituerait $\frac{1,2389}{1000}$; il en serait ainsi de tous les cas semblables. Nous prévenons seulement qu'ici le log. le plus grand étant négatif, il faut soustraire le plus petit du plus grand, et écrire le reste avec le signe négatif, selon la règle ordinaire. Car par les raisons indiquées (386), on ne peut appliquer aux log. hyperboliques des fractions l'expédient adopté (344) pour les log. vulgaires.

400. Mais la série (F), en traitant de même le nombre donné, est dans tous les cas bien préférable à la série (A), pour calculer le logarithme d'un nombre quelconque. En effet, en réduisant le nombre 12389 à la forme 1,2389, et faisant $n = 1$, on aura $\partial n = 0,2389$. Avec ces valeurs, on n'aura à calculer que trois termes de la série (F) pour former avec sept décimales exactes le log. cherché, tandis qu'il faudrait calculer au moins huit termes de la série (A) pour arriver au même but.

401. Plus le premier chiffre du nombre donné est supérieur à l'unité, moins la série (F), sous la forme (375), est convergente dans le calcul du logarithme de ce nombre. Qu'on demande, par exemple, le logarithme de 3412. J'écris $3,412 \times 1000$, et faisant $n = 1$, j'ai $\partial n = 2,412$, et $\frac{\partial n}{2n + \partial n} = \frac{2,412}{4,412}$. Cette fraction est plus grande que 0,5. Voyons à l'obtenir moindre, en donnant dans la série le signe négatif à ∂n, (376). Elle sert alors pour

descendre à un logarithme plus petit; et pour cet effet, ayant toujours $n = 1$, nous devons faire $3412 = 0{,}3412 \times 10000$. De là, puisque de log. $1 = 0$, nous devons passer à log. 0,3412, nous avons $\delta n = -0{,}6588$. Par conséquent $\frac{\delta n}{2n + \delta n} = -\frac{0{,}6588}{1{,}3412}$; fraction moindre que 0,5, comme nous le desirions. Donc 0,5 est la limite des valeurs $\frac{\pm \delta n}{2n \pm \delta n}$, pour se déterminer entre les deux formes sous lesquelles on peut employer la série (F).

402. Quand d'un logarithme effectif on veut passer à un autre, en se servant de cette série, comme on l'a fait (378, 396), on la trouvera d'autant plus convergente que le nombre n, dont on connaît le logarithme, sera plus grand, et que δn sera plus petit.

403. Le célèbre Lagrange (Théorie des Fonctions, 24) a proposé de nouveau les anciennes formules employées par Briggs pour le calcul des logarithmes, formules qui exigent des extractions réitérées de racines. Je me plais à croire que ma formule différentielle finie (F), bien plus facile et plus expéditive, quelles que soient d'ailleurs les abréviations imaginées par le premier, atteint le but de ce grand Géomètre, de substituer le calcul fini au calcul infinitésimal.

404. Mais il est temps d'appliquer à quelques-uns (352) des objets principaux de ce Traité, les formules générales données ci-dessus.

Proposons-nous ce problème : *L'arc étant donné, trouver le logarithme du sinus, du cosinus et de la tangente de cet arc.*

405. Puisque (373) δ log. sin. $A = \frac{\delta \sin. A}{\sin. A} = \frac{\delta A \cos. A}{\sin. A} =$ $\delta A \cot. A = \delta A \left(\frac{1}{A} - \frac{A}{3} - \frac{A^3}{3^2.5} - \frac{2A^5}{3^3.5.7} - \text{etc.}\right)$, (300), j'aurai, en intégrant (207, 210), et introduisant le module M, sans quoi l'on n'aurait que le logarithme hyperbolique,

$$\log. \sin. A = \log. A - M\left(\frac{A^2}{2.3} + \frac{A^4}{2^2.3^2.5} + \frac{A^6}{3^4.5.7.9} + \frac{A^8}{3^3.5^2.7.8} + \frac{A^{10}}{3^2.5^2.7.9.11} + \frac{691A^{12}}{3^2.5^3.6.7^2.9^2.11.13} + \frac{2A^{14}}{3^2.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{3617A^{16}}{3^2.5^3.7^2.9^2.11.13.15.16.17} + \text{etc.}\right)$$

406. On a de même ∂ log. cos. $A = \frac{\partial \text{ cos. } A}{\text{cos. } A} = -\frac{\partial A \text{ sin. } A}{\text{cos. } A}$ $= -\partial A$ tang. $A = -\partial A\left(A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{3.5} + \text{etc.}\right)$, (281). Donc, en intégrant, (206),

$$\text{log. cos. } A = -M\left(\frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{3.4} + \frac{A^6}{5.9} + \frac{17A^8}{5.7.8.9} + \frac{31A^{10}}{5^2.7.9^2} + \frac{691A^{12}}{5^2.6.7.9^2.11} + \frac{10922A^{14}}{3.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{929569A^{16}}{3.5^2.7^2.9^2.11.13.15.16} + \text{etc.}\right),$$

logarithme négatif, qu'on rend positif, tel qu'il est dans les tables; de la manière indiquée (343).

407. Enfin, comme log. tang. A = log. sin. A — log. cos. A, il suffit de prendre la différence entre les deux séries que nous venons de trouver; et en réduisant, nous aurons

$$\text{log. tang. } A = \text{log. } A + M\left(\frac{A^2}{3} + \frac{7A^4}{9.10} + \frac{62A^6}{5.7.9^2} + \frac{127A^8}{3.4.5^2.7.9} + \frac{146A^{10}}{3.5^2.9^2.11} + \frac{1414477A^{12}}{3^2.5^3.7^2.9^2.11.13} + \frac{32764A^{14}}{3^2.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{16931177A^{16}}{2.3^2.5^3.7.9^2.11.13.15.17} + \text{etc.}\right)$$

408. A la rigueur, celle de ces trois séries qui est relative au cosinus est la seule qui réponde exactement à l'énoncé du problème, puisque les deux autres exigent qu'avec l'arc on connaisse encore son logarithme. Mais ce logarithme se calcule promptement par les moyens que j'ai enseignés (400, 401), et ceux que j'ajouterai (415, 418).

409. Ces trois séries que j'ai publiées pour la première fois en 1794, (*Società Italiana*, Tom. VII), sont les plus faciles à former, et les plus commodes que je connaisse, pour calculer immédiatement le logarithme d'une ligne trigonométrique quelconque. Mais s'il s'agissait de construire des tables (252), il me semble que la voie la plus courte serait de calculer les sinus en nombres naturels, par les moyens rapides exposés (316), puis d'en tirer les logarithmes par la méthode expéditive que j'ai indiquée (400, 401).

410. De quelque manière qu'on s'y prenne, le travail, au-delà

de 45°, se réduit à de simples soustractions. Si, faisant usage de la formule (406), vous avez formé les logarithmes des cosinus de 0° à 45°, vous obtiendrez les logarithmes des sinus correspondans, ou, ce qui revient au même, des cosinus de 90° à 45°, au moyen de l'équation (I. 6°), qui donne celle-ci, log. sin. $A =$ log. sin. $2A$ — log. 2 — log. cos. A; pourvu que vous vous serviez de cette dernière en descendant de 45° à 0°, pour les valeurs de A, parce qu'alors log. sin. $2A$ sera toujours l'un des logarithmes déjà trouvés.

411. Si au contraire vous avez commencé par calculer les logarithmes des sinus de 0° à 45°, conformément à la méthode (409); alors, pour obtenir les logarithmes des cosinus correspondans, vous emploierez la dernière équation ci-dessus, en la changeant ainsi, log. cos. $A =$ log. sin. $2A$ — log. 2 — log sin. A. Mais en se servant de cette formule, il faut assigner à A, d'abord toutes les valeurs de 0° à 22°, puis celles de 34° à 44°, ensuite celles de 23° à 28°, et enfin celles de 31°, 32°, 33° et 29°. Pour 30°, et même aussi pour 45° et 60°, il est mieux de se servir des formules (304).

412. Après avoir formé les logarithmes des sinus ou cosinus de tout le quart de cercle, on aura promptement ceux des tangentes, au moyen de la formule (I. 31°) qui donne log. tang. $A =$ log. sin. A — log. cos. A.

413. J'ai donné des méthodes pour former les logarithmes avec un nombre illimité de décimales; mais comme il semble difficile que vingt décimales ne suffisent pas dans les cas les plus extraordinaires, j'ai mis à la fin de cet Ouvrage la table (BB) qui sera d'un grand secours, comme nous le verrons bientôt. Je l'ai tirée de Gardiner, en me bornant aux logarithmes des nombres premiers. (Par le mot *logarithmes*, nous entendrons toujours à l'avenir les logarithmes vulgaires, (385), ou des tables). J'y ai ajouté les facteurs de ceux des nombres composés intermédiaires, qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, parce que ceux qui le sont se distinguent à la première inspection. Il sera facile, par le moyen de cette table, de former au besoin les logarithmes des nombres composés : le vingtième chiffre seulement pourra se trouver inexact, la somme des décimales au-delà n'étant pas donnée.

414. Pour éprouver l'utilité de cette table, cherchons la racine cinquième de 161900, approchée jusqu'à douze décimales. Négligeant les deux zéros qui n'influent que sur la caractéristique, nous chercherons d'abord le logarithme de 1619, mais, pour plus de sureté, avec quatorze décimales : le plus approché que donne la table est celui de 162 ou de 1620. Je fais $n = 1620$, et j'ai $\delta n = -1$. Donc par la formule (375),

$$\frac{\delta n}{2n + \delta n} = -\frac{1}{3239} = -0,\ 000\ 308\ 737\ 264\ 59$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{2n + \delta n}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots -0,\ 000\ 000\ 000\ 009\ 81$$

Somme $-0,\ 000\ 308\ 737\ 274\ 40.$

Le double de cette somme multiplié par M, comme à l'ordinaire, donne

$$-\delta \log.\ 1620 = -0,000268165789 25$$

$$\log.\ 1620 = \log.\ 2 + 4 \log.\ 3 + \log.\ 10 = 3,209515014542 63$$

$$\text{Différence ou } \log.\ 1619 = 3,209246848753 38$$

Ajoutant 2 à la caractéristique, parce que le log. cherché est celui de 161900, et divisant le log. par 5, on aura

$$\log.\ \sqrt[5]{161900} = 1,\ 041\ 849\ 369\ 750\ 68.$$

En cherchant dans les tables ordinaires à quel nombre correspond ce log. considéré dans ses premières décimales, on trouve que le log. le plus approché est celui de 11,01 qu'on a ensuite avec 14 décimales par la table (BB), comme on va le voir.

$$\log.\ \sqrt[5]{161900} = 1,\ 041\ 849\ 369\ 750\ 68$$

$$\log.\ 11,01 = \log.\ 3,67 + \log.\ 3 = 1,\ 041\ 787\ 318\ 971\ 75$$

$$\text{Différence } 0,\ 000\ 062\ 050\ 778\ 93$$

En appelant $\delta \log. n$ cette différence (qui serait négative, si le logarithme reconnu le plus voisin était plus grand que le logarithme donné), et faisant $n = 11,01$, la formule (390) donnera la quantité qu'il faut ajouter à 11,01 pour avoir la racine cherchée. La multiplication de la valeur de $\delta \log. n$ par celle de $\frac{1}{M}$ se fera

par addition, au moyen de la préparation (393); et on aura

$$\frac{\delta \log. n}{M} = 0,\ 000\ 142\ 877\ 198\ 57$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta \log. n}{M}\right)^2 = 0,\ 000\ 000\ 010\ 206\ 94$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\delta \log. n}{M}\right)^3 = 0,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 49$$

Somme $0,\ 000\ 142\ 887\ 406\ 00$

En multipliant cette somme par n ou par 11,01, on aura

$$\delta 11{,}01 = \delta n = 0,\ 001\ 573\ 190\ 340$$

$$n = 11,\ 01$$

Et la somme ou $\sqrt[5]{161900} = 11,\ 011\ 573\ 190\ 340$

Ces calculs sont courts, si on limite, comme nous l'avons fait, chaque opération à 14 décimales. Je crois même qu'avec les moyens abrégés que j'ai donnés, cette méthode est plus expéditive que celle de Halley, dont les formules, qui d'ailleurs ne peuvent donner qu'un nombre limité de décimales exactes, ont été généralisées par l'Abbé Marie.

415. Après avoir vu l'usage qu'on peut faire de nos formules, ainsi que de la table (BB), pour l'extraction des racines, on pourra facilement en faire l'application à la recherche des logarithmes des lignes trigonométriques, ou d'un nombre quelconque. Qu'on demande, par exemple, avec vingt décimales, le logarithme de l'arc de 1″, dont nous aurons besoin par la suite. Je prends, avec vingt-deux chiffres, la valeur de cet arc dans la table (AA); puis j'observe qu'en séparant les quatre premiers chiffres à gauche, et les considérant, pour plus de commodité, comme un nombre entier, je puis en avoir le logarithme par la table (BB), puisque $\log. 4848 = \log. 3 + 4 \log. 2 + \log. 101$. Soit donc $4848 = n$, et appelons δn les dix-huit chiffres qui suivent; nous aurons, en négligeant dans le dénominateur les décimales inutiles (332) pour la division,

$$\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{0,\ 136\ 811\ 095\ 359\ 935\ 899}{9696,\ 136\ 811\ 095\ 359\ 9}.$$

En calculant seulement ce terme et le second, de la série (F), et multipliant par $2M$, on aura

$$\mathcal{L}\ \log. n = 0,\ 00001\ 22556\ 65310\ 72710.$$

Ajoutant à cette quantité log. 3, puis 4 log. 2 et log. 101, on trouvera, en prenant 4 pour caractéristique (344), attendu que dans la valeur de l'arc de 1″, la virgule est suivie de cinq zéros,

$$\log. 1'' = 4,\ 68557\ 48668\ 23540\ 51953.$$

Sans le secours de la table (BB), ce logarithme aurait exigé le calcul de vingt termes de la formule (F), employée comme on l'a vu (401).

Pour avoir, avec exactitude, même le dernier chiffre de ce logarithme, j'ai pris 5, et non 4, pour le vingtième chiffre de 4 log. 2, en tenant compte des décimales ultérieures de log. 2, (413).

416. A log. 1″ ajoutez le logarithme de 60, que vous formerez au moyen de la table (BB), et vous aurez

$$\log. 1' = 6,46372\ 61172\ 07184\ 15204.$$

417. Ajoutez encore à ce logarithme celui de 60, et vous aurez

$$\log. 1^\circ = 8,\ 24187\ 73675\ 90827\ 08455.$$

418. Au moyen de ces trois logarithmes, on obtient sans nulle peine celui d'un arc quelconque de la table (AA). Si l'on veut, par exemple, le logarithme de l'arc de 40°, à log. 40 tiré de la table (BB) on ajoutera log. 1°, et on aura le logarithme cherché. Si l'arc était, par exemple, de 40° 10′ = 2410′, il ne s'agirait que de sommer les logarithmes de 2410 et de 1′. Et si l'arc s'étendait jusqu'à des secondes et même des décimales, s'il était, par exemple, 40° 10′ 9″,8 = 144609″,8; on ajouterait de même log. 1″ au logarithme du nombre 144609,8, (400). On voit à quel point est devenu facile le calcul de log. A, dans les séries (405, 407).

419. Comme les tables de logarithmes sont toujours précédées des instructions nécessaires pour leur usage, pour trouver les parties proportionnelles, etc., nous nous dispenserons d'en parler.

Les logarithmes à sept décimales des tables ordinaires ne suffisent pas pour donner avec exactitude les secondes et les dixièmes de seconde pour les cosinus, depuis 0° jusqu'à 15° environ. Lorsqu'on desirera une pareille précision, on pourra l'obtenir pour les cosinus entre 5° et 15°, en faisant les calculs en nombres naturels,

et se servant des tables de cette espèce. Si le cosinus donné répond à un arc moindre que de 5°, ou qu'on veuille faire usage des logarithmes, il faudra les former et les employer avec autant de décimales qu'on le croira nécessaire; et alors, pour trouver à quel arc correspond le logarithme d'un cosinus, on calculera d'abord, par l'une des formules (388, 390), le nombre auquel répond le logarithme donné; puis, par les méthodes enseignées (322), l'arc auquel répond ce nombre lui-même. Au surplus nous chercherons des expédiens pour éviter ces cosinus autant qu'il sera possible, dans l'usage des formules pour la résolution des triangles.

420. Le calcul par logarithmes, très-expéditif de sa nature, le devient encore davantage par l'usage du *Complément arithmétique*, opération qui transforme la soustraction en addition, ainsi qu'il suit. Que l'on ait à retrancher 579 de 895; il est clair que $895 - 579 = 895 + 1000 - 579 - 1000 = 895 + 421 - 1000 = 316$. Je puis donc, au lieu de retrancher 579 de 895, ajouter 421 à ce dernier nombre, (ce qui me donnera pour somme 1316), pourvu que dans la somme je supprime une unité du même ordre que celle dont cette somme s'est accrue par l'opération. Dans notre exemple cet ordre est celui des unités de mille; il faut donc supprimer une unité de mille dans la somme 1316, et nous aurons $316 = 895 - 579$. Actuellement, si l'on compare 421 à 579, on trouve que 4 et 2 sont la différence ou le complément de 5 et de 7 à 9, et que 1 est le complément de 9 à 10. Donc *pour opérer par le* COMPLÉMENT ARITHMÉTIQUE, *il faut, au lieu du nombre qu'on doit soustraire, écrire le complément à* 9 *de chacun de ses chiffres, excepté le dernier à droite, dont on écrira le complément à* 10 *: faire ensuite l'addition, et supprimer dans la somme une unité du même ordre que celle dont cette somme a été augmentée par cette opération.* Cette suppression ne cause aucun embarras dans les calculs par logarithmes, parce qu'elle tombe toujours sur les dixaines de la caractéristique, qu'on omet déjà par la règle donnée (346). Par le *dernier* chiffre, on entend le dernier effectif; car les zéros qui seraient à la fin du nombre à soustraire, s'écriraient tels qu'ils sont; mais on écrira 9 au lieu de chacun de ceux qui se trouveront entre les chiffres effectifs. Au premier aspect, tout cela paraît devoir embarrasser le calcul plutôt que le faciliter;

mais la pratique fera reconnaître l'avantage de l'emploi du complément arithmétique. Nous en ferons un usage continuel dans nos exemples. Pour le moment il suffit de dire que quand on en a l'habitude, il ne coûte pas plus d'écrire, au lieu d'un logarithme, son complément arithmétique, que de copier ce logarithme tel qu'il se trouve dans la table. D'ailleurs si on examine la conversion du log. négatif en logarithme positif (343), on verra qu'elle se réduit à prendre le complément du logarithme négatif. La cotangente a donc pour logarithme le complément arithmétique de celui de la tangente, et *vice versâ;* puisque (I. 32), log. tang. $A =$ log. 1 — log. cot. $A = -$ log. cot. A, (355). On en doit dire autant du cosinus et de la sécante (36), et du sinus et de la cosécante (37).

421. Si les logarithmes sont utiles pour les multiplications, les divisions, les élévations aux puissances, et les extractions des racines, ils semblent incapables, par leur nature, de se prêter au calcul, quand il s'agit des additions et des soustractions. Il est sans doute à propos de rechercher les expédiens les plus commodes pour surmonter cette difficulté.

422. Soit à calculer une équation de cette forme, $x = ab + cd$, dans laquelle ab et cd représentent deux termes composés chacun de facteurs et de diviseurs monomes, quels que soient leur nombre et leur nature. Le moyen le plus court pour trouver la valeur de x, en calculant l'équation par logarithmes, est en général de chercher le nombre correspondant à log. $ab =$ log. $a +$ log. b, et de la même manière le nombre correspondant à log. cd; ensuite de prendre la somme de ces deux nombres.

423. Mais si, par exemple, x est une ligne trigonométrique; pour trouver à quel arc elle répond, il est plus avantageux de se servir des tables trigonométriques en logarithmes que des tables en nombres naturels. Car dans les premières, à cause de leur usage bien plus fréquent, on a inséré les différences entre les logarithmes contigus, et par ces différences on trouve promptement les secondes, dixièmes de seconde, etc.; avantage que n'ont pas ordinairement les tables trigonométriques en nombres naturels.

424. Par la même raison, si ab, ou si ab et cd étaient des lignes trigonométriques, il serait à desirer de n'avoir pas à les chercher

dans ces dernières tables, et de pouvoir résoudre l'équation par les logarithmes.

425. Nous donnerons donc deux moyens pour trouver le log. de l'inconnue, en résolvant l'équation proposée.

J'écris l'équation comme il suit : $x = ab\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$; je prends le nombre correspondant à log. $\frac{cd}{ab}$; j'y ajoute l'unité, et j'ai ainsi le nombre $\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$, dont je prends le log., auquel j'ajoute celui de ab déjà trouvé en calculant log. $\frac{cd}{ab}$; la somme est log. x.

426. Le second moyen n'est pas moins général, et il a l'avantage particulier de dispenser de l'usage de la table des logarithmes des nombres, lorsque toutes les quantités contenues dans l'équation sont des lignes trigonométriques. Je prends dans l'équation réduite (425) le binôme $1 + \frac{cd}{ab}$; et je le compare avec le second membre de l'équation $\frac{1}{\cos.^2 A} = 1 + \text{tang.}^2 A$, (I. 19e). Si donc je suppose $\frac{cd}{ab} = \text{tang.}^2 A$, supposition qu'on ne peut contester, puisqu'une tangente peut avoir (49, 61), toutes les valeurs imaginables; j'aurai $1 + \frac{cd}{ab} = \frac{1}{\cos.^2 A}$, et par conséquent $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. L'équation $\text{tang.}^2 A = \frac{cd}{ab}$ me doone tang. $A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$; ayant déterminé par son moyen l'arc A, je prends dans la table, à côté de log. tang. A, le logarithme de cos. A, et je l'emploie dans l'autre équation $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. Donc, en séparant en deux parties l'équation donnée, on peut en faire le calcul par logarithmes avec bien plus de facilité qu'en employant les méthodes données jusqu'à présent par Lacaille et autres auteurs qui, en pareil cas, emploient la formule (II. 19e).

Cette transformation m'a été particulièrement utile dans ma solution du problème dont l'objet est de déterminer le moment du plus grand éclat de Vénus; solution imprimée d'une manière très-fautive dans l'Encyclopédie méthodique, à Paris, et ensuite avec quelques fautes encore dans l'Astronomie de Lalande, art. 1198.

427. Au lieu de l'équation (I. 19e), on peut prendre indifféremment celle-ci, $\frac{1}{\sin.^2 A} = 1 + \cot.^2 A$, (I. 4e). En faisant $\cot. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, on aura $x = \frac{ab}{\sin.^2 A}$.

428. Donnons un exemple de ces sortes de transformations. Étant donnés les log. des sinus et des cosinus, et par conséquent (412) des tangentes des deux arcs de 1° et de 2°; cherchons le log. de sin. 3° par cette formule, $\sin. 3° = \sin. 2° \cos. 1° + \cos. 2° \sin. 1°$, (II. 1e). En la comparant à la formule générale (422), on a $\sin. 3° = x$, $\sin. 2° \cos. 1° = ab$, $\sin. 1° \cos. 2° = cd$. Donc (425), $\sin. 3° = \sin. 2° \cos. 1° \left(1 + \frac{\sin. 1° \cos. 2°}{\sin. 2° \cos. 1°}\right) = \sin. 2° \cos. 1° \left(1 + \frac{\text{tang.} 1°}{\text{tang.} 2°}\right)$. Par conséquent en faisant, comme ci-dessus (426), $\text{tang.} A = \sqrt{\frac{\text{tang.} 1°}{\text{tang.} 2°}}$, on aura $\sin. 3° = \frac{\sin. 2° \cos. 1°}{\cos.^2 A}$. Calculons par logarithmes les deux dernières équations :

log. tang. 1° = 8,2419215
(I. 32e), log. cot. 2° = 1,4569162
Somme 9,6988377

La moitié de cette somme (349), ou log. tang. A = 9,8494188. Ce log. répond, dans les tables, à tang. 35° 15′ 37″. Il faudrait actuellement soustraire deux fois le log. du cosinus de cet angle, de la somme de log. sin. 2° et de log. cos. 1°. J'évite ces soustractions en écrivant deux fois, au lieu de log. cos. 35° 15′ 37″, son complément arithmétique, et je n'ai qu'une seule addition à faire.

log. cos. 1° = 9,9999338
log. sin. 2° = 8,5428192
compl. log. cos. 35° 15′ 37″ = 0,0880236
0,0880236
Somme ou log. sin. 3° = 8,7188002

Et tel est en effet, dans les tables, le logarithme de ce sinus.

429. Il est bon d'observer que dans ces sortes de calculs il n'est pas nécessaire de chercher l'angle A lui-même. Par exemple

dans ce cas-ci, il suffit de connaître le log. de la tangente de cet angle pour déterminer immédiatement celui de son cosinus, seule quantité dont on ait besoin. En effet, que l'on prenne la différence de log. tang. A, c'est-à-dire, dans notre exemple, de 9,8494188, au logarithme le plus voisin dans les tables: ce logarithme est, dans celles de Gardiner, 9,8494323 = log. tang. 35° 15′ 40″; et sa différence à celui de tang. A est 0,0000135. Que l'on prenne aussi, dans ces tables, la différence de 447, ou 0,0000447, entre les deux logarithmes les plus proches, en plus et en moins, de log. tang. A. Enfin, qu'après avoir pris encore la différence 149 entre les deux logarithmes correspondans des cosinus, on fasse la proportion $447 : 135 :: 149 : x$, et la valeur de x sera celle qu'on doit ajouter dans ce cas à log. cos. 35° 15′ 40″ qui se trouve dans la table, pour avoir le logarithme cherché de cos. A.

430. Si l'équation à calculer avait cette forme, $x = ab - cd$; en écrivant $x = cd\left(\frac{ab}{cd} - 1\right)$, le premier moyen indiqué (425) s'y appliquerait avec une égale facilité, en retranchant l'unité au lieu de l'ajouter.

431. Quant à la 2e méthode, on comparera le binôme $\frac{ab}{cd} - 1$ au second membre de l'équation (I. 33e), $\text{tang.}^2 A = \frac{1}{\cos.^2 A} - 1$. En procédant comme on a fait (426), on aura $\cos. A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, et $x = cd\ \text{tang.}^2 A$.

432. Si on a $\frac{ab}{cd} < 1$, comme on ne peut avoir $\frac{1}{\cos.^2 A} < 1$, parce qu'alors tang. A serait imaginaire, on ne doit plus se servir de la formule (I. 33e) pour en tirer la quantité de comparaison; mais alors on écrira $x = -cd\left(1 - \frac{ab}{cd}\right)$; et prenant l'équation (I. 3e), $\sin.^2 A = 1 - \cos.^2 A$, on fera $\cos. A = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, et on aura $x = -cd \sin.^2 A$.

433. On peut prendre également l'équation (I. 18e), $\cos.^2 A = 1 - \sin.^2 A$; et faisant $\sin. A = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, on aura $x = -cd \cos.^2 A$.

434. Soit maintenant l'équation générale $y = ab \pm cd \pm ef$. (Dans cette équation et dans les équations générales qui suivent, le signe double embrasse tous les cas, et la règle donnée (20) n'a point ici son application). Je fais $ab \pm cd = x$; je cherche log. x par les moyens que je viens de donner (425 à 433); ensuite par les mêmes voies je résous par logarithmes l'équation $y = x \pm ef$.

De cette manière on pourra calculer un polynôme quelconque par logarithmes.

435. Soit enfin l'équation très-générale $z = \frac{ab \pm cd \pm ef \pm \text{etc.}}{AB \pm CD \pm EF \pm \text{etc.}}$ Réduisez par les règles précédentes le numérateur à un seul logarithme; faites la même opération pour le dénominateur, et l'équation sera résolue par logarithmes.

436. Et si le second membre est ou en partie ou en entier affecté de signes radicaux; si on a, par exemple, $z = \frac{\sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \text{etc.})}}{\sqrt[n]{(AB \pm CD)} \pm EF \pm \text{etc.}}$, alors log. $\sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \text{etc.})} = \frac{1}{m}$ log. $(ab \pm cd \pm ef \pm \text{etc.})$, et on a de même log. $\sqrt[n]{(AB \pm CD)} = \frac{1}{n} \times$ log. $(AB \pm CD)$. Il ne reste donc qu'à suivre les règles données pour trouver le logarithme d'un binôme ou d'un polynôme, sauf la division convenable par l'exposant du radical.

Mais comme les racines quarrées sont celles qui s'offrent le plus souvent dans les diverses opérations, nous allons donner des formules particulières qui nous seront très-utiles.

437. Avant d'y passer, je dois faire une observation que fait naître la formule (435), et qui s'applique à toutes les autres. Quand les deux termes d'une fraction renferment des quantités identiques ou qui ont de l'affinité, il y a toujours moyen d'en varier avantageusement l'expression. Si, par exemple, on a $z = \frac{a \cos. B}{1 - a \sin. B}$, alors on peut supposer (432) $\cos. A = \sqrt{a} \sin. B$, et l'on aura $z = \frac{a \cos. B}{\sin.^2 A}$, expression qui devient plus simple et plus expéditive

pour le calcul, si on substitue la valeur de a tirée de l'équation précédente. Car alors on a $z = \cot. B \cot.^2 A$.

438. Soit maintenant $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$; on aura (26), $x = p \times \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$. En comparant ce dernier radical avec $\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 A)}$, (I. 19e), on aura $\text{tang.} A = \frac{q}{p}$, et $x = \frac{p}{\cos. A}$. Par la simplicité de ces équations, on voit que la proposée, $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, est une de celles auxquelles cette espèce de transformation s'applique avec le plus d'avantage.

439. On trouverait la même chose en suivant la règle générale (435). Alors $\log. x = \frac{1}{2} \log. (p^2 + q^2) = \frac{1}{2} \log. p^2 \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log. p + \frac{1}{2} \log. \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)$; et, (426), $\frac{q^2}{p^2} = \text{tang.}^2 A$, ou $\frac{q}{p} = \text{tang.} A$. De même $1 + \frac{q^2}{p^2} = \left(\frac{1}{\cos. A}\right)^2$; donc $\frac{1}{2} \log. \left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log. \frac{1}{\cos. A}$. Et par conséquent $\log. x = \log. p + \log. \frac{1}{\cos. A}$, ou $x = \frac{p}{\cos. A}$.

440. En comparant $\sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$ avec $\sqrt{(1 + \cot.^2 A)}$, (I. 4e), on a aussi $\cot. A = \frac{q}{p}$, et $x = \frac{p}{\sin. A}$.

441. Si l'équation était de cette forme, $x = \sqrt{(p^2 + rst^2)}$, elle se réduirait à la précédente $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, en mettant rst^2 au lieu de q^2; et on aurait $\text{tang.} A = \frac{t}{p} \sqrt{rs}$ et $x = \frac{p}{\cos. A}$, ou $\cot. A = \frac{t}{p} \sqrt{rs}$ et $x = \frac{p}{\sin. A}$.

442. Soit à présent $x = \sqrt{(p^2 - q^2)}$. Les log. s'appliquent aisément à ce cas, parce qu'alors $x = \sqrt{(p - q)(p + q)}$. Mais si p ou q, ou l'un et l'autre, sont des lignes trigonométriques (423), ou que l'on ait seulement les logarithmes de p et de q, sans avoir leur valeur en nombres naturels, il faut alors recourir à l'une des deux formules (I. 3e, 18e); et faisant $x = p \sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)}$, on aura $\frac{q}{p} = \cos. A$ et $x = p \sin. A$, ou $\frac{q}{p} = \sin. A$ et $x = p \cos. A$.

443. Enfin toute expression comparable à l'une quelconque des

formules trigonométriques, pourra se résoudre et se calculer par le moyen des tables trigonométriques. Soit, par exemple, $x = m \times \frac{a+b}{a-b}$. Je fais (17), $x = m \times \frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}$; et comparant cette fraction avec le second membre de la formule (II. 8e), j'ai $\frac{b}{a} = \text{tang. B}$, et $x = m\ \text{tang.}\ (45° + \text{B})$.

444. Lorsque a et b sont des nombres, on fait l'addition et la soustraction; puis on calcule immédiatement par les logarithmes l'équation $x = m \times \frac{a+b}{a-b}$. La réduction à cette forme, quand elle est possible, est donc quelquefois préférable aux méthodes précédentes. Soit, par exemple,

$$\text{tang.}\ x = \frac{n\ \text{sin. A}}{1 + n\ \text{cos. A}},$$

équation dans laquelle x est inconnue; et soit demandé de convertir cette équation en celle-ci,

$$\text{tang.}\ (\tfrac{1}{2}\text{A} - x) = \frac{1-n}{1+n} \times \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\text{A},$$

qui est plus commode pour l'usage des logarithmes, en supposant que n soit un nombre.

Or (I. 8e, 25e), $\frac{n\ \text{sin. A}}{1+n\ \text{cos. A}} = \frac{2n\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A}}{1+\text{tang.}^2\ \frac{1}{2}\text{A}} : \left(1 + n \times \frac{1-\text{tang.}^2\ \frac{1}{2}\text{A}}{1+\text{tang.}^2\ \frac{1}{2}\text{A}}\right)$ $= \frac{2n\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A}}{1+n+(1-n)\ \text{tang.}^2\ \frac{1}{2}\text{A}} = \text{tang.}\ x$. Donc $(1+n)\ \text{tang.}\ x + (1-n)\text{tang.}^2\ \frac{1}{2}\text{A}\ \text{tang.}\ x = 2n\ \text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A} = \text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A}(1+n-\overline{1-n})$; et en transposant, $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A}\ (1-n)\ (1+\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A}\ \text{tang.}\ x) = (1+n)\ (\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A} - \text{tang.}\ x)$. Donc $\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A} \times \frac{1-n}{1+n} = \frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A} - \text{tang.}\ x}{1+\text{tang.}\ \frac{1}{2}\text{A}\ \text{tang.}\ x} = \text{tang.}\ (\frac{1}{2}\text{A} - x)$, (II. 6e).

Si l'équation à convertir était $\text{tang.}\ x = \frac{b\ \text{sin. A}}{a + b\ \text{cos. A}}$, on ferait $\text{tang.}\ x = \frac{\frac{b}{a}\ \text{sin. A}}{1+\frac{b}{a}\ \text{cos. A}}$, puis $\frac{b}{a} = n$.

Nous voilà en état d'entreprendre la résolution des triangles dans tous les cas. Les commençans qui seraient pressés d'y arriver et d'en connaître toutes les applications, pourront réserver à un autre temps la lecture des deux chapitres qui suivent, et qui renferment un grand nombre d'opérations analytiques, curieuses, à la vé rité mais non nécessaires pour l'intelligence des autres parties de cet Ouvrage. Ces deux chapitres d'ailleurs, qui supposent plus d'étude et de progrès, sont écrits plus succinctement que les autres, pour ne pas trop augmenter le volume de ce Traité.

CHAPITRE VIII.

Formules trigonométriques, compliquées d'imaginaires.

445. En nous arrêtant aux logarithmes hyperboliques, nous avons (388), $n = 1 + \log.^1 n + \frac{1}{2}\log.^2 n + \frac{1}{2.3}\log.^3 n + \text{etc.}$, et par conséquent $n^x = 1 + \log.^1 n^x + \frac{1}{2}\log.^2 n^x + \text{etc.} = 1 + \frac{x}{1}\log.^1 n + \frac{x^2}{1.2}\log.^2 n + \frac{x^3}{1.2.3}\log.^3 n + \text{etc.}$ Soit $n = e =$ la base des logarithmes hyperboliques, (389); alors $\log. n = 1$; on aura donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Et si x est négatif,

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

446. Soit actuellement $x = A\sqrt{-1}$; on aura

$$e^{A\sqrt{-1}} = 1 + \frac{A\sqrt{-1}}{1} - \frac{A^2}{1.2} - \frac{A^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \frac{A^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$e^{-A\sqrt{-1}} = 1 - \frac{A\sqrt{-1}}{1} - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

447. Maintenant prenez la somme, et divisez par 2; vous aurez

$$\frac{e^{A\sqrt{-1}} + e^{-A\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.} = \text{cos. } A,$$

(285). En divisant de même par 2, mais faisant la soustraction au lieu de l'addition, vous aurez

$$\frac{e^{A\sqrt{-1}} - e^{-A\sqrt{-1}}}{2} = \sqrt{-1}\left(A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}\right) = \text{sin. } A\sqrt{-1}, \ (267).$$

448. Ces deux équations ajoutées l'une à l'autre, et soustraites l'une de l'autre, quant aux premiers et derniers membres, donnent

$$e^{A\sqrt{-1}} = \text{cos. } A + \text{sin. } A\sqrt{-1}$$
$$e^{-A\sqrt{-1}} = \text{cos. } A - \text{sin. } A\sqrt{-1}.$$

449. Divisez la première de ces deux nouvelles équations par la seconde, vous aurez

$$e^{2A\sqrt{-1}} = \frac{\text{cos. } A + \text{sin. } A\sqrt{-1}}{\text{cos. } A - \text{sin. } A\sqrt{-1}} = \frac{1 + \text{tang. } A\sqrt{-1}}{1 - \text{tang. } A\sqrt{-1}}.$$

450. La solution de l'équation entre la première et la dernière de ces trois valeurs égales, donnera pour l'expression imaginaire de tang. A,

$$\text{tang. } A = \frac{1}{\sqrt{-1}} \times \frac{e^{2A\sqrt{-1}} - 1}{e^{2A\sqrt{-1}} + 1}.$$

De cette valeur, et des premier et dernier membres des équations (447), il est facile (177) de tirer de même les valeurs imaginaires des autres lignes trigonométriques.

451. D'Alembert a démontré (*Dissert. sur les Vents*), que toute expression imaginaire peut se réduire à la forme $P + Q\sqrt{-1}$,

quantité qui devient réelle, lorsque $Q = 0$, et encore par l'addition ou par le produit de la quantité $P - Q\sqrt{-1}$. Voyons quelle sera l'utilité des formules ci-dessus, en opérant, par ces sortes de réductions, dans des exemples remarquables d'exposans et de logarithmes, les uns et les autres imaginaires.

452. Soit proposé de transformer l'expression $(a + b\sqrt{-1})^{g + h\sqrt{-1}}$ en celle-ci, $\cos. A + \sin. A\sqrt{-1}$. Il faut trouver, par le moyen des données a, b, g, h, la grandeur de l'arc A, et du rayon dont on le décrirait (38).

453. Soit donc $(a + b\sqrt{-1})^{g + h\sqrt{-1}} = \cos. A + \sin. A\sqrt{-1}$. En employant $\sqrt{-1}$ avec le signe négatif, qui convient également à cette quantité, on aura $(a - b\sqrt{-1})^{g - h\sqrt{-1}} = \cos. A - \sin. A\sqrt{-1}$.

454. Multipliez ces deux équations l'une par l'autre, et transposez; vous aurez $\cos.^2 A + \sin.^2 A = (a + b\sqrt{-1})^g (a + b\sqrt{-1})^{h\sqrt{-1}} (a - b\sqrt{-1})^g (a - b\sqrt{-1})^{-h\sqrt{-1}} = (a^2 + b^2)^g \left(\frac{a + b\sqrt{-1}}{a - b\sqrt{-1}}\right)^{h\sqrt{-1}}$. Soit $\frac{b}{a} = \text{tang.}\, x$; alors (449), $\frac{a + b\sqrt{-1}}{a - b\sqrt{-1}} = e^{2x\sqrt{-1}}$.

455. Donc $\cos.^2 A + \sin.^2 A = (a^2 + b^2)^g \times e^{-2hx} = R^2$, (42). Donc ici le rayon de l'arc A se détermine par l'équation

$$R = \sqrt{(a^2 + b^2)^g} \times e^{-hx}.$$

456. De plus, si l'on divise l'une par l'autre les deux équations (453), on aura $\frac{(a + b\sqrt{-1})^{g + h\sqrt{-1}}}{(a - b\sqrt{-1})^{g - h\sqrt{-1}}} = \frac{\cos A + \sin. A\sqrt{-1}}{\cos. A - \sin. A\sqrt{-1}} = e^{2A\sqrt{-1}}$, (449). Donc $e^{2A\sqrt{-1}} = \left(\frac{a + b\sqrt{-1}}{a - b\sqrt{-1}}\right)^g (a + b\sqrt{-1})^{h\sqrt{-1}} (a - b\sqrt{-1})^{h\sqrt{-1}}$, ou, (454),

$$e^{2A\sqrt{-1}} = e^{2gx\sqrt{-1}} (a^2 + b^2)^{h\sqrt{-1}}.$$

457. Et puisque $\log. e = 1$, on aura, en employant les logarithmes, $2A\sqrt{-1} = 2gx\sqrt{-1} + h\sqrt{-1} \log. (a^2 + b^2)$; et enfin, en divisant par $2\sqrt{-1}$,

$$A = gx + \tfrac{1}{2} h \log. (a^2 + b^2) = gx + \log. \sqrt{(a^2 + b^2)^h},$$

valeur cherchée, dans laquelle x se détermine par a et b, et a pour rayon l'unité, (454).

458. Si l'on exprime par les logarithmes les équations (449), et qu'on divise par $2\sqrt{-1}$, on trouve $A = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{\cos. A + \sin. A \sqrt{-1}}{\cos. A - \sin. A \sqrt{-1}}$ $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + \text{tang. } A \sqrt{-1}}{1 - \text{tang. } A \sqrt{-1}}$, formules très utiles dans le calcul intégral, pour réduire à des arcs de cercle les logarithmes imaginaires.

459. Maintenant, puisque $a + b\sqrt{-1}$ est l'expression générale de toute grandeur imaginaire (451), cherchons la réduction du logarithme de ce binôme à la même forme $P + Q\sqrt{-1}$.

On a alors, dans la formule (454) comparée à ce binôme, $g = 1$, $h = 0$; donc $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, (455); et faisant toujours $\frac{b}{a} = \text{tang. } x$, (454), on trouve (38), $\cos. A = \cos. x \sqrt{(a^2 + b^2)}$, et $\sin. A = \sin. x \sqrt{(a^2 + b^2)}$. Donc (453) $a + b\sqrt{-1}$ $= \sqrt{(a^2 + b^2)}(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1}) = \sqrt{(a^2 + b^2)}\, e^{x\sqrt{-1}}$, (448). D'où résulte

$$\log. (a + b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2} \log. (a^2 + b^2) + x\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$\tfrac{1}{2} \log. (a^2 + b^2) = P, \text{ et } x = Q.$$

460. Cette forme simple se retrouve implicitement dans les logarithmes (458). En effet, écrivons 2A au lieu de A dans la première formule (448), puis exprimons-la par les logarithmes; nous aurons

$$2A\sqrt{-1} = \log. (\cos. 2A + \sin. 2A \sqrt{-1}),$$

équation dont le premier membre est le même que dans les équations (458), si on multiplie celles-ci par $2\sqrt{-1}$. Donc aussi les autres membres de ces équations seront égaux au second membre de celle que nous venons de trouver.

Ici $P = 0 = \log. 1$, et $Q = 2A$.

461. Voyons ce qui arrive dans les équations (448), quand on substitue une autre base à la base e des logarithmes hyperboliques.

Soit, (452), $b = 0$, $g = 0$; on a de suite $a^{h\sqrt{-1}} = \cos. A + \sin. A \sqrt{-1}$. Mais alors $x = 0$, (454); $R = 1$, (455), et $A = \frac{1}{2} h \log. a^2 = h \log. a$, (457). Donc

$$a^{h\sqrt{-1}} = \cos. (h \log. a) + \sin. (h \log. a) \sqrt{-1},$$

expression dans laquelle log. a est un logarithme hyperbolique, puisqu'il est tiré de la formule (457).

462. Si dans le dernier membre (458), on développe l'expression log. $\frac{1+\text{tang. A}\sqrt{-1}}{1-\text{tang. A}\sqrt{-1}}$, au moyen de la formule (367), toute la série qui en résultera aura $2\sqrt{-1}$ pour facteur. Mais on a vu que cette même expression a aussi $2\sqrt{-1}$ pour diviseur. Il suit de là que les imaginaires s'évanouissent, et il reste précisément l'équation (252). Cet exemple fait voir comment les formules imaginaires conduisent à des formules réelles : ce dont nous allons donner encore une preuve remarquable.

463. En écrivant nA au lieu de A dans les équations (448), on aura, (20),

$$e^{\pm nA\sqrt{-1}} = \text{cos. } nA \pm \text{sin. } nA\sqrt{-1}.$$

Mais si l'on élève à la puissance n chacun des membres de ces mêmes équations (448), on obtient

$$e^{\pm nA\sqrt{-1}} = (\text{cos. A} \pm \text{sin. A}\sqrt{-1})^n.$$

Donc, (et c'est un théorème important et curieux),

$$\text{cos. } nA \pm \text{sin. } nA\sqrt{-1} = (\text{cos. A} \pm \text{sin. A}\sqrt{-1})^n.$$

464. De même, en mettant nA au lieu de A, dans les équations (447), on a

$$\text{cos. } nA = (e^{nA\sqrt{-1}} + e^{-nA\sqrt{-1}}) : 2$$
$$\text{sin. } nA = (e^{nA\sqrt{-1}} - e^{-nA\sqrt{-1}}) : 2\sqrt{-1}.$$

Maintenant si l'on élève à la puissance n les équations (448), leur somme et leur différence donneront $e^{nA\sqrt{-1}} + e^{-nA\sqrt{-1}} = (\text{cos. A} + \text{sin. A}\sqrt{-1})^n + (\text{cos. A} - \text{sin. A}\sqrt{-1})^n$; $e^{nA\sqrt{-1}} - e^{-nA\sqrt{-1}} = (\text{cos. A} + \text{sin. A}\sqrt{-1})^n - (\text{cos. A} - \text{sin. A}\sqrt{-1})^n$.

465. Qu'on substitue ces valeurs dans les équations ci-dessus; on aura

$$\text{cos. } nA = \frac{(\text{cos. A} + \text{sin. A}\sqrt{-1})^n + (\text{cos. A} - \text{sin. A}\sqrt{-1})^n}{2}$$

$$\text{sin. } nA = \frac{(\text{cos. A} + \text{sin. A}\sqrt{-1})^n - (\text{cos. A} - \text{sin. A}\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Développez, par le moyen de la formule de Newton, les binômes de ces importantes formules, et vous verrez disparaître tous les radicaux imaginaires.

CHAPITRE IX.

Équations et Séries trigonométriques, relatives aux arcs multiples.

466. TOUT arc *multiple* est représenté par l'expression nA, dans laquelle n exprime un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif, rationnel ou irrationnel, à moins qu'il n'ait été déterminé par quelque condition ou supposition. Les formules (463, 464, 465) appartiennent par conséquent aux arcs multiples. Mais comme elles sont embarrassées d'imaginaires, nous les avons laissées dans le chapitre précédent, pour ne rechercher dans celui-ci que des expressions réelles. Nous en développerons un grand nombre, quoique nous en omettions beaucoup, comme moins utiles et plus compliquées.

467. *Trouver la formule générale du sinus de l'arc multiple, exprimé par les puissances du sinus de l'arc simple.*

Mettons nA au lieu de A dans l'équation (267), nous aurons

$$\text{Sin. } nA = nA - \frac{n^3A^3}{2.3} + \frac{n^5A^5}{2.3.4.5} - \frac{n^7A^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Mais l'équation (241) donne

$$A = \sin. A + \frac{\sin.^3 A}{2.3} + \frac{3\sin.^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5 \sin.^7 A}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

$$A^3 = \sin.^3 A + \frac{\sin.^5 A}{2} + \left(\frac{9}{2.4.5} + \frac{3}{2^2.3}\right) \sin.^7 A + \text{etc.}$$

$$A^5 = \sin.^5 A + \frac{5\sin.^7 A}{2.3} + \text{etc.}$$

$$A^7 = \sin.^7 A + \text{etc.}$$

Substituons ces valeurs dans la série ci-dessus; nous trouverons

$$nA = n \ \sin. A + \frac{n \sin.^3 A}{2.3} + \frac{3n \sin.^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5 n \sin.^7 A}{2.4.6.7} + \text{etc.}$$

$$-\frac{n^3 A^3}{2.3} \quad = \quad -\frac{n^3 \sin.^3 A}{2.3} - \frac{n^3 \sin.^5 A}{3.4} - \frac{37 n^3 \sin.^7 A}{2.3.4.5\ 6} - \text{etc.}$$

$$+\frac{n^5 A^5}{2.3.4.5} \quad = \quad + \frac{n^5 \sin.^5 A}{2.3.4.5} + \frac{5 n^5 \sin.^7 A}{2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$-\frac{n^7 A^7}{2.3.4.5.6.7} = \quad - \frac{n^7 \sin.^7 A}{2.3.4.5.6.7} - \text{etc.}$$

Or les coefficiens de chaque diverse puissance de sin. A se réduisent aux expressions suivantes : $\frac{n - n^3}{2.3} = -\frac{n(n^2-1)}{2.3}$; $\frac{3n}{2.4.5} - \frac{n^3}{3.4} + \frac{n^5}{2.3.4.5} = \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2.3.4.5} = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}$; $\frac{3.5n}{2.4.6.7} - \frac{37n^3}{2.3.4.5.6} + \frac{5n^5}{2.3.4.5.6} - \frac{n^7}{2.3.4.5.6.7} = \frac{225n - 259n^3 + 35n^5 - n^7}{2.3.4.5.6.7} = -\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}$. Donc on a, pour la formule générale cherchée,

$$(\alpha) \ldots \sin. nA = n \sin. A - \frac{n(n^2-1)}{2.3} \sin.^3 A + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5} \sin.^5 A$$
$$- \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7} \sin.^7 A + \text{etc.};$$

formule dont la loi est évidente.

468. Cette série est visiblement finie, et d'un nombre de termes exprimé par $\frac{n+1}{2}$, quand n est un nombre entier, rationnel et *impair*; elle est infinie dans tout autre cas. Cependant si n est entier, rationnel et *pair*, la somme des termes se réduit à une expression composée d'un nombre $\frac{n}{2}$ de termes multipliés par cos.A, ou par $\sqrt{(1 - \sin.^2 A)}$. Ce qui se trouve et se démontre comme il suit.

469. Soit S le second membre de l'équation (α); on aura $\sin. nA = \frac{S \cos. A}{\cos. A} = \frac{S\sqrt{(1-\sin.^2 A)}}{\sqrt{(1-\sin.^2 A)}}$. Mais par le binôme de Newton, on a $\sqrt{(1 - \sin.^2 A)} = 1 - \frac{1}{2}\sin.^2 A - \frac{1}{2.4}\sin.^4 A - \frac{3}{2.4.6}\sin.^6 A$ — etc. Divisez S par cette série, et vous trouverez

$$(\beta)\ldots \sin. nA = \sqrt{(1-\sin.^2 A)}\left(n \sin. A - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\sin.^3 A + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\sin.^5 A - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7}\sin.^7 A + \text{etc.}\right),$$

série qui finit évidemment après $\frac{n}{2}$ de termes, quand n est *pair.*

470. *Trouver la formule générale du cosinus de l'arc multiple, exprimé en puissances du sinus de l'arc simple.*

L'équation (285) donne

$$\cos. nA = 1 - \frac{n^2}{2}A^2 + \frac{n^4}{2.3.4}A^4 - \frac{n^6}{2.3.4.5.6}A^6 + \frac{n^8}{2.3.4.5.6.7.8}A^8 - \text{etc.}$$

Substituez les valeurs de A^2, A^4, etc., en les formant d'après l'équation (241); puis réduisez, et vous aurez

$$(\gamma)\ldots \cos. nA = 1 - \frac{n^2}{2}\sin.^2 A + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}\sin.^4 A - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}\sin.^6 A + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7.8}\sin.^8 A - \text{etc.}$$

471. On voit que le nombre des termes de cette série est $\frac{n+2}{2}$, quand n est rationnel et *pair;* elle est infinie dans tout autre cas. Mais on la rend finie, quand n est rationnel et *impair*, et alors elle est exprimée par $\frac{n+1}{2}$ de termes multipliés par cos. A, ou par $\sqrt{(1-\sin.^2 A)}$. Il ne s'agit pour cela que de la diviser par ce binôme développé, comme on l'a fait (469); ce qui donne

$$(\delta)\ldots \cos. nA = \sqrt{(1-\sin.^2 A)}\left(1 - \frac{n^2-1}{2}\sin^2. A + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}\sin.^4 A - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6}\sin.^6 A + \text{etc.}\right).$$

472. Quelle que soit la valeur de n, les séries (α) et (β) sont égales entre elles. L'une des deux au moins, ou toutes deux sont infinies. Il en est de même des séries (γ) et (δ) comparées entre elles.

473. *Trouver la formule générale du sinus de l'arc multiple, exprimé par les puissances du cosinus de l'arc simple.*

Au lieu de A dans l'équation (δ), qu'on substitue $90° - A$; on aura, dans le cas seulement de n rationnel et *impair*, $\cos. n(90° - A) = \pm \sin. nA$, (121). D'où

$$(\epsilon)\ldots\ \sin. nA = \pm \sqrt{(1-\cos.^2 A)}\left(1 - \frac{n^2-1}{2}\cos.^2 A + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}\cos.^4 A - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6}\cos.^6 A + \text{etc.}\right).$$

Le signe positif a lieu quand $n = 4m+1$, le négatif, quand $n = 4m-1$, m étant un nombre entier rationnel, à partir de zéro.

474. Mettons de même $90^\circ - A$, au lieu de A, dans l'équation (β); nous aurons, mais seulement pour n rationnel et *pair*,

$$(\zeta)\ldots\ \sin. nA = \pm \sqrt{(1-\cos.^2 A)}\left(n\cos. A - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\cos.^3 A + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\cos.^5 A - \text{etc.}\right);$$

avec le signe positif quand $n = 4m+2$, négatif quand $n = 4m$.

475. Les équations (ϵ), (ζ) ne subsistent que pour les valeurs de n que nous avons assignées pour chacune de ces équations. Toute autre valeur donnerait un résultat faux, comme il est aisé de s'en convaincre par la méthode (121). Les mêmes limites ont lieu pour les deux équations qui suivent, (η), (ϑ).

476. *Trouver la formule générale du cosinus de l'arc multiple exprimé en puissances du cosinus de l'arc simple.*

Introduisons, dans l'équation (α), $90^\circ - A$ au lieu de A; nous obtiendrons, mais seulement pour n rationnel et *impair*,

$$(\eta)\ldots\ \cos. nA = \pm\left(n\cos. A - \frac{n(n^2-1)}{2.3}\cos.^3 A + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}\cos.^5 A - \text{etc.}\right);$$

avec le signe positif quand $n = 4m+1$, et le négatif quand $n = 4m-1$.

477. Substituons de même $90^\circ - A$, au lieu de A, dans l'équation (γ); nous aurons, mais seulement pour n rationnel et *pair*,

$$(\vartheta)\ldots\ \cos. nA = \pm\left(1 - \frac{n^2}{2}\cos.^2 A + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}\cos.^4 A - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}\cos.^6 A + \text{etc.}\right).$$

Le signe positif a lieu lorsque $n = 4m$, et le signe négatif, quand $n = 4m-2$.

478. J'ai publié pour la première fois, dans le tome VII des Mémoires de la *Société Italienne*, les huit formules précédentes,

trouvées par des méthodes purement trigonométriques, et qui n'avaient été démontrées *à priori* par personne que je sache, si ce n'est la formule (α) par Euler (*Calc. Intégr.* 187). Pour la formule (γ), il s'est servi (*ibid.* 181) des formules (464), après les avoir conclues par analogie. (*Anal. inf.* 133.)

479. On exprime encore les sinus et cosinus de l'arc multiple par les puissances indéterminées, n, $(n-2)$, $(n-4)$, etc. des sinus ou cosinus de l'arc simple, comme on peut le voir dans les séries (λ), (ν), (π), (σ) de mon Mémoire cité (478). J'omets ici ces séries, parce qu'elles ne sont pas générales pour une valeur quelconque de n, et ne servent que pour les nombres pairs ou impairs; parce que d'ailleurs elles ont ce défaut, que lorsque l'un des termes se réduit à zéro, les termes suivans ne s'anéantissent pas; enfin, parce qu'elles ne sont absolument nécessaires dans aucun cas.

480. En substituant successivement à n les nombres naturels 0, 1, 2, etc., on déduit des formules (α), (β), la table suivante.

Sinus des arcs multiples, exprimés par les puissances du sinus de l'arc simple.

$\text{Sin. } 0 = 0.$
$\text{Sin. A} = \text{sin. A}.$
$\text{Sin. } 2\text{A} = 2\,\text{sin. A}\sqrt{(1-\text{sin.}^2\text{A})}.$
$\text{Sin. } 3\text{A} = 3\,\text{sin. A} - 4\,\text{sin.}^3\text{A}.$
$\text{Sin. } 4\text{A} = (4\,\text{sin. A} - 8\,\text{sin.}^3\text{A})\sqrt{(1-\text{sin.}^2\text{A})}.$
$\text{Sin. } 5\text{A} = 5\,\text{sin. A} - 20\,\text{sin.}^3\text{A} + 16\,\text{sin.}^5\text{A}.$
etc.

481. Les formules (ϵ), (ζ) produiront de la même manière la table qui suit.

Sinus des arcs multiples, exprimés par les puissances du cosinus de l'arc simple.

$\text{Sin. } 0 = 0.$
$\text{Sin. A} = \sqrt{(1-\text{cos.}^2\text{A})}.$
$\text{Sin. } 2\text{A} = 2\,\text{cos. A}\sqrt{(1-\text{cos.}^2\text{A})}.$
$\text{Sin. } 3\text{A} = (4\,\text{cos.}^2\text{A} - 1)\sqrt{(1-\text{cos.}^2\text{A})}.$
$\text{Sin. } 4\text{A} = (8\,\text{cos.}^3\text{A} - 4\,\text{cos. A})\sqrt{(1-\text{cos.}^2\text{A})}.$
$\text{Sin. } 5\text{A} = (16\,\text{cos.}^4\text{A} - 12\,\text{cos.}^2\text{A} + 1)\sqrt{(1-\text{cos.}^2\text{A})}.$
etc.

482. Des formules (η), (ϑ) naissent celles de la table suivante.

Cosinus des arcs multiples, exprimés par les puissances du cosinus de l'arc simple.

$$\begin{aligned}
\text{Cos. } 0 &= 1. \\
\text{Cos. A} &= \text{cos. A} \\
\text{Cos. } 2\text{A} &= 2\,\text{cos.}^2\text{A} - 1. \\
\text{Cos. } 3\text{A} &= 4\,\text{cos.}^3\text{A} - 3\,\text{cos. A}. \\
\text{Cos. } 4\text{A} &= 8\,\text{cos.}^4\text{A} - 8\,\text{cos.}^2\text{A} + 1. \\
\text{Cos. } 5\text{A} &= 16\,\text{cos.}^5\text{A} - 20\,\text{cos.}^3\text{A} + 5\,\text{cos. A}.
\end{aligned}$$

etc.

483. Enfin les formules (γ), (δ) fournissent la table suivante.

Cosinus des arcs multiples, exprimés par les puissances du sinus de l'arc simple.

$$\begin{aligned}
\text{Cos. } 0 &= 1. \\
\text{Cos. A} &= \sqrt{(1 - \text{sin.}^2\text{A})}. \\
\text{Cos. } 2\text{A} &= 1 - 2\,\text{sin.}^2\text{A}. \\
\text{Cos. } 3\text{A} &= (1 - 4\,\text{sin.}^2\text{A})\sqrt{(1 - \text{sin.}^2\text{A})}. \\
\text{Cos. } 4\text{A} &= 1 - 8\,\text{sin.}^2\text{A} + 8\,\text{sin.}^4\text{A}.
\end{aligned}$$

etc.

Nous verrons (842) comment on peut déterminer les racines de toutes ces équations.

484. Il est facile de continuer les quatre tables ci-dessus. Le second membre de chaque équation est formé du second membre de l'équation précédente, multiplié par $2\cos.\ \text{A}$, ou par $2\sqrt{(1 - \sin.^2\text{A})}$, et du second membre de l'équation qui précède cette dernière, multiplié par -1. Ces deux facteurs constituent l'*échelle de relation*, ainsi nommée par *Moivre*, de pareilles séries de sinus et cosinus d'arcs multiples croissant en progression arithmétique; séries qui sont de l'espèce de celles qu'on nomme *récurrentes*, parce que chaque terme dérive de termes précédens modifiés par une loi constante.

485. Mais on peut former plus rapidement quatre autres tables, dans lesquelles *les sinus et cosinus de l'arc multiple sont exprimés par les sinus et cosinus de moindres arcs multiples*. Mettons nA

au lieu de A, et $(n-2)$ A au lieu de B, dans les formules (II. 19ᵉ, 20ᵉ, 23ᵉ, 24ᵉ), et nous aurons aussitôt celles qui suivent.

486. $\text{Sin.}\, nA = 2 \cos. A \sin. (n-1) A - \sin. (n-2) A.$

487. $\text{Cos.}\, nA = 2 \cos. A \cos. (n-1) A - \cos. (n-2) A.$

488. $\text{Sin.}\, nA = 2 \sin. A \cos (n-1) A + \sin. (n-2) A.$

489. $\text{Cos.}\, nA = -2 \sin. A \sin. (n-1) A + \cos. (n-2) A.$

490. La formule (486) donne, (75),

$$\begin{aligned}
\text{Sin. } 0 &= 0.\\
\text{Sin. } A &= \sin. A.\\
\text{Sin. } 2A &= 2 \cos A \sin. A.\\
\text{Sin. } 3A &= 2 \cos. A \sin. 2A - \sin. A.\\
\text{Sin. } 4A &= 2 \cos. A \sin. 3A - \sin. 2A.
\end{aligned}$$

etc.

491. D'un autre côté, la formule (488) donne

$$\begin{aligned}
\text{Sin. } 0 &= 0.\\
\text{Sin. } A &= \sin. A.\\
\text{Sin. } 2A &= 2 \sin. A \cos. A.\\
\text{Sin. } 3A &= 2 \sin. A \cos. 2A + \sin. A.\\
\text{Sin. } 4A &= 2 \sin. A \cos. 3A + \sin. 2A.
\end{aligned}$$

etc.

492. Par la formule (487), on a, (75),

$$\begin{aligned}
\text{Cos. } 0 &= 1.\\
\text{Cos. } A &= \cos. A.\\
\text{Cos. } 2A &= 2 \cos. A \cos. A - 1.\\
\text{Cos. } 3A &= 2 \cos. A \cos. 2A - \cos. A\\
\text{Cos. } 4A &= 2 \cos. A \cos. 3A - \cos. 2A.
\end{aligned}$$

etc.

493. Enfin on déduit de la formule (489),

$$\begin{aligned}
\text{Cos. } 0 &= 1.\\
\text{Cos. } A &= \cos. A.\\
\text{Cos. } 2A &= 1 - 2 \sin. A \sin. A.\\
\text{Cos. } 3A &= \cos. A - 2 \sin. A \sin. 2A.\\
\text{Cos. } 4A &= \cos. 2A - 2 \sin. A \sin. 3A.
\end{aligned}$$

etc.

La loi pour la continuation de chacune de ces tables, est évidente.

494. *Trouver la formule générale de la tangente de l'arc multiple, exprimée par les puissances de la tangente de l'arc simple.*

Nous aurons recours, pour cette solution, aux formules imaginaires, comme l'a fait Euler (*Anal. inf.* 249). Au lieu de A, substituons nA; nous aurons, (450),

$$\text{Tang. } nA = \frac{1}{\sqrt{-1}} \times \frac{e^{2nA\sqrt{-1}}-1}{e^{2nA\sqrt{-1}}+1}.$$

Élevons à la puissance n le premier et le dernier membre de l'expression (449); ils deviendront $e^{2nA\sqrt{-1}} = \left(\frac{1+\text{tang. }A\sqrt{-1}}{1-\text{tang. }A\sqrt{-1}}\right)^n$.

495. Substituons cette valeur dans l'équation ci-dessus, et réduisons. Elle devient, en faisant, pour abréger, tang. A $= t$,

$$\text{tang. } nA = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n-(1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n+(1-t\sqrt{-1})^n} \times \frac{1}{\sqrt{-1}}.$$

496. Or la formule de Newton donne

$$(1+t\sqrt{-1})^n = 1+nt\sqrt{-1}-\frac{n(n-1)}{2}t^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}t^3\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}t^4+\text{etc.}$$

$$(1-t\sqrt{-1})^n = 1-nt\sqrt{-1}-\frac{n(n-1)}{2}t^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}t^3\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}t^4-\text{etc.}$$

497. Avec ces valeurs, et réduction faite, l'équation (495) se change en celle-ci, qui est la formule cherchée;

$$\text{Tang. } nA = \left(n\text{ tang. }A - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\text{tang.}^3A + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5}\text{tang.}^5A - \text{etc.}\right) : \left(1-\frac{n(n-1)}{2}\text{tang.}^2A+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\times \text{tang.}^4A - \text{etc.}\right)$$

498. Ce qui donne la table suivante.

Tangentes des arcs multiples, exprimées par les puissances de la tangente de l'arc simple.

$$\text{Tang. A} = \text{tang. A}.$$
$$\text{Tang.} 2\text{A} = \frac{2 \,\text{tang. A}}{1 - \text{tang.}^2\text{A}}.$$
$$\text{Tang.} 3\text{A} = \frac{3 \,\text{tang. A} - \text{tang.}^3\text{A}}{1 - 3\,\text{tang.}^2\text{A}}.$$
$$\text{Tang.} 4\text{A} = \frac{4 \,\text{tang. A} - 4\,\text{tang.}^3\text{A}}{1 - 6\,\text{tang.}^2\text{A} + \text{tang.}^4\text{A}}.$$

etc.

499. La continuation de cette table, au moyen de la formule (497), coûterait peut-être plus de peine que si on recourait à la formule (II. 5e.); avec laquelle, en faisant B toujours égal à l'arc multiple qui précède, on a sur-le-champ, par exemple, $\text{tang.} 5\text{A} = \frac{\text{tang. A} + \text{tang.} 4\text{A}}{1 - \text{tang. A tang.} 4\text{A}}$; il ne reste qu'à introduire la valeur trouvée de tang. 4A, et faire les réductions à la forme la plus simple.

500. Je passe à l'inverse des problèmes résolus ci-dessus. Soit proposé de *trouver la formule générale des puissances du cosinus de l'arc simple, exprimées par les cosinus de l'arc multiple.*

Les formules imaginaires employées par Lacroix (*Calc. Differ.* T. 1. 42. *Paris*, 1797), et dont je rends l'usage plus prompt, si je ne me trompe, et plus clair, conduisent à une solution plus directe que celle que j'ai publiée en 1794, n° X du Mémoire cité (478).

Soit donc $e^{A\sqrt{-1}} = a$, $e^{-A\sqrt{-1}} = b$; et par conséquent (447), $\cos. A = \frac{1}{2}(a + b)$; on aura $2^n \cos.^n A = (a + b)^n = (b + a)^n$. D'où $2^{n+1} \cos.^n A = (a + b)^n + (b + a)^n = a^n + b^n + nab$ $(a^{n-2} + b^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^2 (a^{n-4} + b^{n-4}) +$ etc.

501. Or $ab = 1$, (500); et si l'on introduit dans les équations (448), nA, $(n-2)$A, $(n-4)$A, etc. successivement, au lieu de A, on aura (463), $a^n + b^n = \cos. nA + \sin. nA\sqrt{-1} + \cos. nA - \sin. nA\sqrt{-1} = 2\cos. nA$, $a^{n-2} + b^{n-2} = 2\cos.(n-2)A$, $a^{n-4} + b^{n-4} = 2\cos.(n-4)A$, etc. Donc, en divisant par 2

tous les termes de la dernière équation (500), on obtient, pour la formule demandée,

$$(\rho)\ldots\ 2^n \cos.^n A = \cos. nA + \frac{n}{1}\cos.(n-2)A + \frac{n(n-1)}{2}\cos.(n-4)A + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\cos.(n-6)A + \text{etc.}$$

Dans cette série la valeur de n n'est circonscrite par aucune restriction (466).

502. Mais quand n est un nombre entier positif, il est évident, par la nature des coefficiens, que la série est finie, et que le nombre de ses termes est $n+1$. Deux quelconques de ces termes, pris à égale distance des extrêmes, sont égaux entre eux; la première moitié contenant les arcs positifs, et la seconde les mêmes arcs, mais négatifs, ce qui ne change pas le signe du cosinus (75). Tout cela est clair, tant par la propriété des coefficiens qui sont ceux du binôme, que parce que le multiplicateur négatif de A s'augmente de deux unités, à chaque fois que le positif n s'accroît d'une unité. On peut donc se restreindre à $\frac{n+1}{2}$ termes, pourvu que chaque terme se prenne double, ou bien pourvu que le premier terme se change en $2^{n-1}\cos.^n A$. Il faut observer alors que si n est un nombre pair, l'expression $\frac{n+1}{2}$ exige qu'on ne prenne que la moitié du terme dont le rang est après $\frac{n}{2}$ termes.

503. *Trouver la formule générale des puissances du sinus de l'arc simple, exprimées par les sinus ou cosinus de l'arc multiple.*

En employant les expressions (500), nous avons (447), $\sin. A = (a-b) : 2\sqrt{-1}$; et par conséquent $2^n(\sqrt{-1})^n \sin.^n A = (a-b)^n = (b-a)^n$, pourvu que n soit un nombre pair. Donc, dans cette supposition, $2^{n+1}(\sqrt{-1})^n \sin.^n A = (a-b)^n + (b-a)^n = a^n + b^n - nab(a^{n-2} + b^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^2(a^{n-4} + b^{n-4}) - \text{etc.}$; ce qui est la série trouvée (500), sans autre différence que celle des signes alternans.

504. Or $(\sqrt{-1})^n = \mp 1$; donc

$$(\xi)\ldots\ 2^n \sin.^n A = \pm\Big(\cos. nA - \frac{n}{1}\cos.(n-2)A + \frac{n(n-1)}{2}\cos.(n-4)A - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\cos.(n-6)A + \text{etc.}\Big);$$

et le signe supérieur a lieu, quand n est multiple de 4.

505. Cette série ne diffère pas de la série (ρ). On peut donc lui appliquer ce qui a été dit (502); le premier membre deviendra $2^{n-1}\sin.^n A$, et on prendra la moitié du dernier terme.

506. Mais si n est un nombre impair, alors $(a-b)^n = -(b-a)^n$. Donc $2^n(\sqrt{-1})^n \sin.^n A = (a-b)^n - (b-a)^n = a^n - b^n - nab(a^{n-2} - b^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^2(a^{n-4} - b^{n-4})$ — etc.

507. Mais $a^n - b^n = \cos. nA + \sin. nA\sqrt{-1} - \cos. nA + \sin. nA \times \sqrt{-1} = 2\sin. nA\sqrt{-1}$, $a^{n-2} - b^{n-2} = 2\sin.(n-2)A\sqrt{-1}$, et ainsi de suite. De plus, $(\sqrt{-1})^n = \pm\sqrt{-1}$. Donc le facteur $\sqrt{-1}$ est commun à tous les termes de la dernière équation (506); donc en la divisant par $2\sqrt{-1}$, on aura, toujours d'après les règles (502),

$$(\mu)\ldots\ 2^{n-1}\sin.^n A = \pm\Big(\sin. nA - \frac{n}{1}\sin.(n-2)A + \frac{n(n-1)}{2}\sin.(n-4)A - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\sin.(n-6)A + \text{etc.}\Big).$$

Le signe supérieur a lieu, quand $(n-1)$ est multiple de 4.

508. Les deux problèmes que nous venons de résoudre font ressortir l'utilité des formules imaginaires; puisqu'ils nous démontrent qu'il est impossible d'obtenir des expressions réelles, 1°. des puissances du cosinus de l'arc simple, exprimées en sinus de l'arc multiple; 2°. des puissances du sinus de l'arc simple, exprimées en sinus ou cosinus de l'arc généralement multiple, pour une valeur quelconque de n; 3°. des mêmes puissances de sinus, exprimées en sinus de l'arc multiple pair; 4°. de ces mêmes puissances, exprimées en cosinus de l'arc multiple impair.

509. Des formules (μ), (ξ), et en suivant les règles (502), on déduit la table qui suit.

Puissances du sinus de l'arc simple, exprimées par les sinus ou cosinus de l'arc multiple.

$\mathrm{Sin.}^1 A = \sin. A$

$2\,\mathrm{Sin.}^2 A = 1 - \cos. 2A.$

$4\,\mathrm{Sin.}^3 A = 3 \sin. A - \sin. 3A.$

$8\,\mathrm{Sin.}^4 A = 3 - 4 \cos. 2A + \cos. 4A.$

$16\,\mathrm{Sin.}^5 A = 10 \sin. A - 5 \sin. 3A + \sin. 5A.$

$32\,\mathrm{Sin.}^6 A = 10 - 15 \cos. 2A + 6 \cos. 4A - \cos. 6A.$

$64\,\mathrm{Sin.}^7 A = 35 \sin. A - 21 \sin. 3A + 7 \sin. 5A - \sin. 7A\,;$

etc.

510. Par la formule (ρ) et les règles (502), on obtient la table suivante.

Puissances du cosinus de l'arc simple, exprimées par les cosinus de l'arc multiple.

$\mathrm{Cos.}^1 A = \cos. A.$

$2\,\mathrm{Cos.}^2 A = 1 + \cos. 2A.$

$4\,\mathrm{Cos.}^3 A = 3 \cos. A + \cos. 3A.$

$8\,\mathrm{Cos.}^4 A = 3 + 4 \cos. 2A + \cos. 4A.$

$16\,\mathrm{Cos.}^5 A = 10 \cos. A + 5 \cos. 3A + \cos. 5A.$

$32\,\mathrm{Cos.}^6 A = 10 + 15 \cos. 2A + 6 \cos. 4A + \cos. 6A.$

$64\,\mathrm{Cos.}^7 A = 35 \cos. A + 21 \cos. 3A + 7 \cos. 5A + \cos. 7A\,;$

etc.

511. La table ci-après se déduit promptement de la table donnée (498). La seconde équation de cette dernière fournit, par sa solution, la valeur de $\mathrm{tang.}^2 A$. Substituez cette valeur dans la troisième équation, et vous déduirez de cette équation la valeur de $\mathrm{tang.}^3 A$. Substituez dans la quatrième équation les deux valeurs trouvées; vous obtiendrez de même la valeur de $\mathrm{tang.}^4 A$, et ainsi de suite. Je n'insiste pas sur ce problème, parce que je n'en vois pas l'utilité.

Puissances des tangentes de l'arc simple, exprimées par les tangentes de l'arc multiple.

$\text{Tang.}^1 A = \text{tang. } A.$

$\text{Tang.}^2 A = \frac{\text{tang. } 2A - 2\,\text{tang. } A}{\text{tang. } 2A}.$

$\text{Tang.}^3 A = \frac{3\,\text{tang. } A\,\text{tang. } 2A - 6\,\text{tang. } A\,\text{tang. } 3A + 2\,\text{tang. } 2A\,\text{tang. } 3A}{\text{tang. } 2A}.$

etc.

512. *Exprimer l'arc par les sinus de ses multiples.*

Nous avons (359), par les logarithmes hyperboliques, ... $\log.(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$, et par conséquent .... $\log.\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \text{etc.}$; d'où .... $\log.(1+x) - \log.\left(1+\frac{1}{x}\right)$, ou $\log.\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}$, ou enfin ....

$\log. x = \left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$, etc., c'est-à-dire $\log. x = (x - x^{-1}) - \frac{1}{2}(x^2 - x^{-2}) + \frac{1}{3}(x^3 - x^{-3})$, etc.

513. Or soit $x = e^{A\sqrt{-1}}$; on aura $\log. e^{A\sqrt{-1}}$, ou $A\sqrt{-1} = (e^{A\sqrt{-1}} - e^{-A\sqrt{-1}}) - \frac{1}{2}(e^{2A\sqrt{-1}} - e^{-2A\sqrt{-1}}) + \frac{1}{3}(e^{3A\sqrt{-1}} - e^{-3A\sqrt{-1}})$ — etc. En divisant cette équation par $2\sqrt{-1}$, elle devient $\frac{1}{2}A = \frac{e^{A\sqrt{-1}} - e^{-A\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} \times \frac{e^{2A\sqrt{-1}} - e^{-2A\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{1}{3} \times \ldots \frac{e^{3A\sqrt{-1}} - e^{-3A\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ — etc.; et par conséquent, (464),

$$\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{1}\sin. A - \tfrac{1}{2}\sin. 2A + \tfrac{1}{3}\sin. 3A - \tfrac{1}{4}\sin. 4A + \text{etc.}$$

J'emprunte cette solution curieuse de Lacroix (*Calc. Différ.* pag. 75), qui l'attribue à Euler. Pour connaître à quel point les imaginaires sont utiles pour conduire rapidement et sans fatigue à cette série, il suffit de voir, dans les Éphémérides de Milan, pour l'année 1785 (pag. 187), comment, par des moyens purement trigonométriques, ainsi que le cas l'exigeait, l'équation plus générale (444), $\text{tang. } x = \frac{n \sin. A}{1 + n \cos. A}$, où $x = \frac{1}{2}A$ lorsque $n = 1$, (I. 41e), a été transformée en l'équation qui suit :

$x = n \sin. A - \frac{1}{2} n^2 \sin. 2A + \frac{1}{3} n^3 \sin. 3A - \frac{1}{4} n^4 \sin. 4A + \text{etc.}$

Passons maintenant à des problèmes du même genre, mais d'une autre espèce.

514. *Sommer une série quelconque de sinus d'arcs en progression arithmétique.*

Soit la série très-générale, $\sin. A + \sin. (A+B) + \sin. (A+2B) \ldots\ldots + \sin. (A+pB)$, celle dont on demande la somme.

On a (II. 24ᵉ),

$$\cos. (A - \tfrac{1}{2} B) - \cos. (A + \tfrac{1}{2} B) = 2 \sin. \tfrac{1}{2} B \sin. A;$$
$$\cos. (A + \tfrac{1}{2} B) - \cos. (A + \tfrac{3}{2} B) = 2 \sin. \tfrac{1}{2} B \sin. (A+B);$$
$$\cos. (A + \tfrac{3}{2} B) - \cos. (A + \tfrac{5}{2} B) = 2 \sin. \tfrac{1}{2} B \sin. (A+2B).$$

Prenant la somme de ces trois équations, on trouve

$$\cos. (A - \tfrac{1}{2} B) - \cos. (A + \tfrac{5}{2} B) = 2 \sin. \tfrac{1}{2} B (\sin. A + \sin. (A+B) + \sin. (A+2B)).$$

Ici $p = 2$, et par conséquent $\frac{5}{2} B = \frac{2p+1}{2} B$. Mais, quelle que soit la valeur de p, il est manifeste que l'expression du coefficient de B dans le second terme du premier membre, sera toujours $\frac{2p+1}{2}$. Donc

$$\text{Sin}. A + \sin. (A+B) + \sin. (A+2B) \ldots\ldots + \sin. (A+pB) = \frac{\cos. (A - \frac{1}{2} B) - \cos. \left(A + \frac{2p+1}{2} B\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} B} = \frac{\sin. \frac{p+1}{2} B \sin. (A + \frac{1}{2} pB)}{\sin. \frac{1}{2} B}, \text{ (II. 24ᵉ).}$$

515. Si la série est infinie, $\cos. \left(A + \frac{2p+1}{2} B\right)$ disparaît, parce que

$\cos. (A + \frac{1}{2} B + pB) = \cos. (A + \frac{1}{2} B) \cos. pB - \sin. (A + \frac{1}{2} B) \sin. pB$; et que ces deux termes s'évanouissent, les sinus et cosinus de l'arc infini pB n'étant pas assignables.

Donc $\sin. A + \sin. (A+B) + \sin. (A+2B) + \text{etc.}$ jusqu'à l'infini $= \frac{\cos. (A - \frac{1}{2} B)}{2 \sin. \frac{1}{2} B}$.

516. Et si $A = B$, on aura

$\sin. B + \sin. 2B + \sin. 3B + \text{etc.}$ jusqu'à l'infini $= \frac{1}{2} \cot. \frac{1}{2} B$. (*)

(*) Lorsque B est partie aliquote de la circonférence, cette série est du genre des séries *périodiques*; et, continuée à l'infini, elle ne peut avoir pour somme qu'un nombre vague et absolument indéterminé. (*Mémoires de l'Instit. Nat.*, tom. 3, *Hist.*, pag. 10).

517. Ce qui semble n'avoir pas été remarqué, c'est que quand la progression serait décroissante, ces formules ne varieraient pas en faisant B négatif (77), ainsi que nous l'avons démontré plusieurs fois, et qu'on doit l'entendre pour les problèmes qui suivent, et pour tous les cas semblables.

518. *Sommer une série quelconque de cosinus d'arcs en progression arithmétique.*

Soit proposé de sommer la série générale cos. A + cos. (A + B) + cos. (A + 2B)..... + cos. (A + pB). On a, (II. 23ᵉ),

$$\sin.(A+\tfrac{1}{2}B)-\sin.(A-\tfrac{1}{2}B)=2\sin.\tfrac{1}{2}B\cos.A;$$
$$\sin.(A+\tfrac{3}{2}B)-\sin.(A+\tfrac{1}{2}B)=2\sin.\tfrac{1}{2}B\cos.(A+B);$$
$$\sin.(A+\tfrac{5}{2}B)-\sin.(A+\tfrac{3}{2}B)=2\sin.\tfrac{1}{2}B\cos.(A+2B).$$

La somme de ces trois équations donne

$$\sin.(A+\tfrac{5}{2}B)-\sin.(A-\tfrac{1}{2}B)=2\sin.\tfrac{1}{2}B\Big(\cos A+\cos.(A+B)+\cos.(A+2B)\Big).$$

Donc, sans répéter ce qui a été dit (514),

$$\cos.A+\cos.(A+B)+\cos.(A+2B)....+\cos.(A+pB)=$$
$$\frac{\sin.\left(A+\frac{2p+1}{2}B\right)-\sin.(A-\frac{1}{2}B)}{2\sin.\frac{1}{2}B}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p+1)B\cos.(A+\frac{1}{2}pB)}{\sin.\frac{1}{2}B}.$$

519. Si $p=\infty$, le terme $\sin.\left(A+\frac{2p+1}{2}B\right)$ disparait, par les raisons déduites (515), et il reste

$$\cos.A+\cos.(A+B)+\cos.(A+2B)+\text{etc. jusqu'à l'infini}=-\frac{\sin.(A-\frac{1}{2}B)}{2\sin.\frac{1}{2}B}.$$

Et si de plus $A=B$, alors cos. B + cos. 2B + cos. 3B + etc. jusqu'à l'infini $=-\frac{1}{2}$.

520. *Sommer la série* $S=\sin.^n A+\sin.^n(A+B)+\sin.^n(A+2B).....+\sin.^n(A+pB)$.

Soit premièrement n un nombre *impair*. On aura, d'après la formule (μ), (507),

$$\pm S = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\sin. nA + \sin. n(A+B) + \sin. n(A+2B)\ldots.$$
$$+ \sin. n(A+pB)\Big) - \frac{n}{2^{n-1}}\Big(\sin.(n-2)A + \sin.(n-2)(A+B)$$
$$+ \sin.(n-2)(A+2B)\ldots.. + \sin.(n-2)(A+pB)\Big)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2^n}\Big(\sin.(n-4)A + \sin.(n-4)(A+B)$$
$$+ \sin.(n-4)(A+2B)\ldots.. + \sin.(n-4)(A+pB)\Big)$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2^n}\Big(\sin.(n-6)A + \sin.(n-6)(A+B)$$
$$+ \sin.(n-6)(A+2B)\ldots. + \sin.(n-6)(A+pB)\Big)$$
$$+ \text{etc.}$$

D'où l'on conclura, en vertu de la sommation (514), et en adoptant les règles de la formule (μ), quant au signe double et au nombre des termes,

$$\pm S = \frac{\sin.\frac{1}{2}n(p+1)B\sin.n(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\sin.\frac{1}{2}nB}$$
$$- \frac{n\sin.\frac{1}{2}(n-2)(p+1)B\sin.(n-2)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\sin.\frac{1}{2}(n-2)B}$$
$$+ \frac{n(n-1)\sin.\frac{1}{2}(n-4)(p+1)B\sin.(n-4)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^n\sin.\frac{1}{2}(n-4)B}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)\sin.\frac{1}{2}(n-6)(p+1)B\sin.(n-6)(A+\frac{1}{2}pB)}{3.2^n\sin.\frac{1}{2}(n-6)B}$$
$$+ \text{etc.}$$

Si $n=3$, par exemple, on a

$$S = -\frac{\sin.\frac{3}{2}(p+1)B\sin.3(A+\frac{1}{2}pB)}{4\sin.\frac{3}{2}B} + \frac{3\sin.\frac{1}{2}(p+1)B\sin.(A+\frac{1}{2}pB)}{4\sin.\frac{1}{2}B}.$$

521. Si n est *pair*, alors on se servira de la formule (ξ), (504). On laissera de côté le dernier terme, qui demeure un coefficient isolé; et traitant la formule (ξ), comme la formule (μ) vient de l'être, chaque terme donnera une série dont on prendra la somme (518); le nombre des séries sera $\frac{1}{2}n$; et le coefficient isolé ci-dessus, toujours divisé par 2^{n-1}, sera répété un nombre $(p+1)$ de fois, c'est-à-dire autant qu'il y a de termes dans la série S. Cela bien entendu, et en observant les règles de la formule (ξ) relativement au signe double, on trouvera

$$\pm S = \frac{\sin.\frac{1}{2}n(p+1)B\cos.n(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\sin.\frac{1}{2}nB} - \frac{n\sin.\frac{1}{2}(n-2)(p+1)B\cos.(n-2)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\sin.\frac{1}{2}(n-2)B}$$

$$+ \frac{n(n-1)\sin.\frac{1}{2}(n-4)(p+1)B\cos.(n-4)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n}\sin.\frac{1}{2}(n-4)B}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)\sin.\frac{1}{2}(n-6)(p+1)B\cos.(n-6)(A+\frac{1}{2}pB)}{3.2^{n}\sin.\frac{1}{2}(n-6)B}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots \pm \frac{p+1}{2^{n-1}} \times \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots\frac{1}{2}n}{1.2\ldots\ldots\frac{1}{2}n}.$$

Si, par exemple, $n = 4$, on a $S = \frac{\sin.2(p+1)B\cos.4(A+\frac{1}{2}pB)}{8\sin.2B}$

$$- \frac{\sin.(p+1)B\cos.2(A+\frac{1}{2}pB)}{2\sin.B} + \frac{(p+1)3}{8}.$$

522. *Sommer la série* $S = \cos.^{n}A + \cos.^{n}(A+B) + \cos.^{n}(A+2B) \ldots\ldots + \cos.^{n}(A+pB)$.

La série S se développe par le moyen de la série (ρ), de la même manière que (520); et prenant (518) les sommes des séries partielles, dont le nombre, pour n *impair*, est $\frac{n+1}{2}$, on a

$$S = \frac{\sin.\frac{1}{2}n(p+1)B\cos.n(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\sin.\frac{1}{2}nB}$$

$$+ \frac{n\sin.\frac{1}{2}(n-2)(p+1)B\cos.(n-2)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\sin.\frac{1}{2}(n-2)B}$$

$$+ \frac{n(n-1)\sin.\frac{1}{2}(n-4)(p+1)B\cos.(n-4)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n}\sin.\frac{1}{2}(n-4)B}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\sin.\frac{1}{2}(n-6)(p+1)B\cos.(n-6)(A+\frac{1}{2}pB)}{3.2^{n}\sin.\frac{1}{2}(n-6)B}$$

$+$ etc.

523. La même formule sert pour le cas où n est un nombre *pair*, et le dernier terme devient

$$\frac{p+1}{2^{n-1}} \times \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1.2\ldots\ldots\frac{1}{2}(n-2)}.$$

524. Pour trouver les sommations (514, 518), *Euler* a eu recours à la théorie des séries récurrentes. Pour arriver au même but, ainsi qu'aux sommations qui suivent, le P. *Fontana* s'est servi des imaginaires (*Società Italiana*. T. II, *pag.* 429 *à* 453). Les expresssions auxquelles il parvient semblent très-différentes des miennes; mais il est facile de les y réduire, et elles leur sont absolument égales. On verra peut-être avec plaisir ces problèmes

résolus aujourd'hui pour la première fois par les seules forces de la Trigonométrie.

525. *Sommer la série des tangentes et des cotangentes d'arcs en progression géométrique croissante.*

Nous avons (I. 39e)

$$\cot.\ B - \cot.\ 2B = \tfrac{1}{2}(\text{tang.}\ B + \cot.\ B);$$
$$\cot.\ 2B - \cot.\ 4B = \tfrac{1}{2}(\text{tang.}\ 2B + \cot.\ 2B),$$
$$\cot.\ 4B - \cot.\ 8B = \tfrac{1}{2}(\text{tang.}\ 4B + \cot.\ 4B).$$

Et en sommant un nombre n de ces équations ainsi croissantes, nous trouverons

$$\cot.B - \cot.\ 2^nB = \tfrac{1}{2}(\text{tang.}\ B + \cot.B + \text{tang.}\ 2^1B + \cot.\ 2^1B + \text{tang.}\ 2^2B + \cot.\ 2^2B + \ldots\ldots + \text{tang.}\ 2^{n-1}B + \cot.\ 2^{n-1}B).$$

526. *Sommer la série des tangentes d'arcs en progression géométrique décroissante.*

Ce problème est facile à résoudre, si les tangentes et les arcs ont les mêmes diviseurs. En effet (I. 39e),

$$\tfrac{1}{2}\cot.\ \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{1}\cot.\ A = \tfrac{1}{2}\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A;$$
$$\tfrac{1}{4}\cot.\ \tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{2}\cot.\ \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{4}\text{tang.}\ \tfrac{1}{4}A;$$
$$\tfrac{1}{8}\cot.\ \tfrac{1}{8}A - \tfrac{1}{4}\cot.\ \tfrac{1}{4}A = \tfrac{1}{8}\text{tang.}\ \tfrac{1}{8}A.$$

On obtiendra donc, en sommant un nombre n de pareilles équations,

$$\frac{1}{2^n}\cot.\ \frac{A}{2^n} - \cot.\ A = \frac{1}{2}\text{tang.}\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}\text{tang.}\ \frac{1}{4}A + \frac{1}{8}\text{tang.}\ \frac{1}{8}A + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}\text{tang.}\ \frac{A}{2^n}.$$

527. Si $n = \infty$, $\frac{A}{2^n}$ sera un arc infiniment petit, et cot. $\frac{\quad}{2^n}$ $= \frac{1}{\text{tang.}\ \frac{A}{2^n}} = \frac{1}{\frac{A}{2^n}} = \frac{2^n}{A}$. La somme de la série infinie sera done $\frac{1}{A} - \cot.\ A$. Et si de plus $A = 90°$, on aura $\frac{1}{90°} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ tang. $\frac{90}{4} + \frac{1}{8}$ tang. $\frac{90}{8} +$ etc.

528. *Sommer la série des cosécantes d'arcs croissans en progression géométrique.*

Puisqu'on a (131)

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,A - \text{cot.}\ A = \frac{1}{\text{sin.}\ A} = \text{coséc.}\ A\,,$$

$$\text{cot.}\ \ A - \text{cot.}\,2A = \frac{1}{\text{sin.}\,2A} = \text{coséc.}\ 2A\,,$$

$$\text{cot.}\ 2A - \text{cot.}\,4A = \frac{1}{\text{sin.}\,4A} = \text{coséc.}\ 4A\,,$$

on aura, en sommant ensemble un nombre *n* d'équations telles que les précédentes,

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,A - \text{cot.}\ 2^{n-1}A = \text{coséc.}\,A + \text{coséc.}\ 2A + \text{coséc.}\ 4A + \ldots\ldots\ldots + \text{coséc.}\ 2^{n-1}A.$$

CHAPITRE X.

Résolution des triangles rectilignes rectangles.

Fig. 1. 529. COMME GD est la tangente (10) de l'arc BD décrit du rayon CD, on aura, en procédant comme on a fait (82, 83),

CD : DG :: R : tang. C :: R : cot. CGD,

puisque, dans un triangle rectangle, les deux angles obliques sont complémens l'un de l'autre. Donc *dans tout triangle rectangle, un côté est à un autre côté comme le rayon est à la tangente de l'angle opposé à ce second côté*, ou *comme le rayon est à la cotangente de l'angle adjacent à ce même côté.*

530. On a vu de plus (82) que *dans un triangle rectangle l'hypoténuse est au rayon comme un côté est au sinus de l'angle opposé*, ou *comme un côté est au cosinus de l'angle adjacent.*

531. On sait encore que *dans tout triangle rectangle le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux côtés;* ou *le quarré d'un des côtés est égal à la différence du quarré de l'hypoténuse au quarré de l'autre côté :* ensorte que des trois côtés d'un triangle rectangle, deux étant connus, le troisième se trou-

vera, soit par l'extraction des racines, soit par les méthodes trigonométriques (438 et 442).

532. Avec les règles contenues dans les trois articles précédens, il suffit de connaître deux choses, outre l'angle droit, dans un triangle rectangle, pour qu'on puisse trouver la valeur de chacune des trois autres parties de ce triangle. Il faut excepter seulement le cas où les deux choses connues sont les deux angles : car alors le problème est indéterminé, parce qu'il peut évidemment y avoir une infinité de triangles semblables, tels, par exemple, que GCD, ABC; de sorte que de la connaissance des angles, il est impossible de conclure la mesure absolue d'aucun des côtés : on en déduit seulement les rapports qui règnent entre ces côtés, (83).

533. En appelant A l'angle droit, B et C les deux autres, nous avons rassemblé dans la table (537) toutes les solutions que fournissent les règles précédentes. Pour les vérifier, on pourra les appliquer au triangle ABC, fig. 1.

534. Mais on doit observer que dans le cas de la formule 18e, il est souvent à propos de calculer BC de la manière enseignée (438), qui se réduit à chercher d'abord B ou C par la 17e formule, et ensuite BC par la 2e, ou par la 4e, ou par la 6e, ou par la 8e.

535. Si dans les formules 13e et 15e de cette même table, le sinus ou le cosinus étaient d'une grandeur telle (419), qu'on ne pût avoir les angles par les tables trigonométriques avec l'exactitude desirée, on aurait recours aux formules (543, 544, 545).

Nous verrons bientôt (557) que ce défaut des tables n'apporte ni incertitude ni erreur dans le calcul des équations, lorsque les grands sinus et cosinus sont dans le second membre, c'est-à-dire dans les quantités connues.

536. Trois seulement des formules qui suivent dépendent des théorèmes (531). Toutes les autres sont fondées sur cette remarque : si l'on prend l'hypoténuse pour rayon, chaque angle a pour sinus le côté opposé, pour cosinus le côté adjacent; si on prend un côté pour rayon, l'autre côté est la tangente de l'angle opposé, la cotangente de l'angle adjacent; et alors l'hypoténuse est la sécante du premier de ces angles, la cosécante du second. Et cette remarque suffit pour mettre en état de se former au besoin, sans travail, toutes les formules de la Table ci-après.

537. *Table pour la résolution d'un triangle rectiligne* ABC *rectangle en* A.

DONNÉES.	INCONNUES.	FORMULES.
AB, B	AC....	1^e^ $AC = AB \times \text{tang. } B$
	BC....	2^e^ $BC = \frac{AB}{\cos. B}$
AB, C	AC....	3^e^ $AC = AB \times \cot. C$
	BC....	4^e^ $BC = \frac{AB}{\sin. C}$
AC, B	AB....	5^e^ $AB = AC \times \cot. B$
	BC....	6^e^ $BC = \frac{AC}{\sin. B}$
AC, C	AB....	7^e^ $AB = AC \times \text{tang. } C$
	BC....	8^e^ $BC = \frac{AC}{\cos. C}$
BC, B	AB....	9^e^ $AB = BC \times \cos. B$
	AC....	10^e^ $AC = BC \times \sin. B$
BC, C	AB....	11^e^ $AB = BC \times \sin. C$
	AC....	12^e^ $AC = BC \times \cos. C$
AB, BC	B, C..	13^e^ $\cos. B = \frac{AB}{BC} = \sin. C$
	AC....	14^e^ $AC = \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}$
AC, BC	B, C..	15^e^ $\sin. B = \frac{AC}{BC} = \cos. C$
	AB....	16^e^ $AB = \sqrt{(BC - AC)(BC + AC)}$
AB, AC	B, C..	17^e^ $\text{tang. } B = \frac{AC}{AB} = \cot. C$
	BC....	18^e^ $BC = AB\sqrt{\left(1 + \frac{AC^2}{AB^2}\right)}$

538. *Exemples de la résolution d'un triangle rectiligne rectangle.* Soit PO une distance de 752 mètres, PC de 439; et soit CPO un angle droit. On demande quelle est la distance OC. On connaît deux côtés, et on cherche l'hypoténuse; c'est donc le cas de la 18[e] formule, dont voici le calcul, en substituant PO à AB, PC à AC, et OC à BC. Fig. 1.

$$\text{log. PC} = 2,642465$$
$$\text{compl. log. PO} = 7,123782$$
$$\text{log.}\ \frac{\text{PC}}{\text{PO}} = 9,766247$$
$$\text{le double de ce log. ou log.}\left(\frac{\text{PC}}{\text{PO}}\right)^2 = 9,532494$$

Le nombre correspondant de plus près à ce log. est 0,3408

$$\text{Donc log.}\left(1+\frac{\text{PC}^2}{\text{PO}^2}\right) = \text{log. } 1,3408 = 0,127364$$
$$\text{dont la moitié ou log.}\sqrt{\left(1+\frac{\text{PC}^2}{\text{PO}^2}\right)} = 0,063682$$
$$\text{En y ajoutant log. PO} = 2,876218$$
$$\text{on a log. OC} = 2,939900$$

Le nombre correspondant de plus près à ce log. est 870,76. Donc la distance OC est de 870 mètres et $\frac{76}{100}$. Telle est la solution géométrique, pour laquelle j'ai présenté la formule dans la table, de la manière la plus commode pour le calcul.

539. Voyons maintenant la solution trigonométrique. Par la 17[e] formule, on a $\frac{\text{PC}}{\text{PO}} = \text{tang. COP}$. Or le log. de $\frac{\text{PC}}{\text{PO}}$ trouvé ci-dessus, répond à tang. 30° 16′ 31″,4. A côté de ce log. je cherche le log. de sin. 30° 16′ 31″,4; et en employant son complément conformément à la formule 6[e], j'ai

$$\text{compl. log. sin. } 30°\ 16'\ 31'',4 = 0,297435$$
$$\text{log. PC} = 2,642465$$
$$\text{Somme ou log. OC} = 2,939900, \text{ comme ci-dessus.}$$

540. Soit proposé de déterminer par la Trigonométrie la hauteur DK, d'une tour, d'un clocher, etc. Mesurez à la toise la dis-

Fig. 1. tance horizontale DC, du pied de la tour, à un point arbitraire C, duquel on puisse prendre exactement, au moyen des instrumens convenables (701 et suiv.), la mesure de l'angle DCK. Supposons que DC ait été trouvé de 23 mètres, et $\frac{1}{4}$, et DCK de 50° 3'; on aura par la formule 1e (537), $DK = 23\frac{1}{4} \times \text{tang. } 50° 3'$.

$$\text{Or log. } 23{,}25 = 1{,}366423$$
$$\text{log. tang. } 50° 3' = 0{,}076956$$
$$\text{Somme ou log. DK} = 1{,}443379 = \text{log. } 27{,}7574.$$

Donc la hauteur de la tour est, dans ce cas, de $27^{m.} \frac{76}{100}$ environ.

541. Ce résultat n'est pas celui que la figure présente à l'œil, puisque DK, dans cette figure, est presque double de CD; mais il faut s'accoutumer à se servir des figures telles qu'on les fait à la plume, sans proportions exactes, et seulement pour se guider dans le calcul. C'est ainsi que nous construirons une figure pour le problème suivant.

542. L'industrie des Navigateurs a trouvé le moyen de mesurer l'espace que parcourt un vaisseau. La boussole leur indique de plus la direction de la route ou l'angle formé par la ligne que suit le vaisseau, avec la ligne méridienne. Je suppose qu'on ait fait cinquante lieues par un même vent, et sous un angle de 35° $\frac{1}{2}$, nord-est, et qu'on demande la position du bâtiment, ou de quelle quantité il s'est avancé, soit au nord, soit à l'est. Je commence par décrire
Fig. 4. sur le papier une ligne quelconque NS, que je nomme la méridienne, et dont j'appelle N une extrémité qui est censée indiquer le nord, et S l'autre extrémité qui indique le sud. D'un point pris arbitrairement dans cette ligne, que je nomme B, et duquel je suppose que le vaisseau est parti, je tire une ligne quelconque BC, par laquelle je désigne de même les cinquante lieues parcourues par le vaisseau. Je mène cette ligne du côté N et non du côté S, et à la droite de NS; parce que la direction de la route était au nord et à l'est. L'angle CBN représente celui de 35° $\frac{1}{2}$ nord-est, connu par la boussole. Enfin de l'extrémité C je tire une ligne CA, que je suppose perpendiculaire à NS, et j'ai un triangle BAC censé rectangle en A, dans lequel, en supposant BC = 50 lieues, et CBA = 35° $\frac{1}{2}$, il faut déterminer la longueur de AB, qui est la

route faite vers le nord, et la longueur de AC, qui est la route vers l'est. Comme j'ai désigné les trois angles du triangle par A, B, C, c'est-à-dire par les lettres dont j'ai fait usage dans la table générale (537), j'ai promptement, sans travail et sans crainte d'équivoque, les formules nécessaires. Les données étant BC et B, et les cherchées AB, AC, j'ai par la 9ᵉ formule, $AB = 50 \cos. 35° 30'$, et par la 10ᵉ, $AC = 50 \sin. 35° 30'$; ce qui donnera à-peu-près, $AB = 40,7$ lieues, et $AC = 29,035$ lieues.

543. Pour trouver un angle exactement, lorsqu'on ne pourra se servir des formules 13ᵉ et 15ᵉ, à cause de la grandeur du sinus ou du cosinus, on aura recours, suivant le cas, à l'une des quatre équations suivantes, de l'usage desquelles nous donnerons un exemple (556).

Réduisant en proportion la 2ᵉ formule, on a $BC : AB :: 1 : \cos. B$. Donc (19), $BC : BC - AB :: 1 : 1 - \cos. B :: 1 : 2 \sin.^2 \frac{1}{2} B$, (I. 7ᵉ), $= \frac{BC - AB}{BC}$.

544. La même proportion donne encore $BC + AB : BC - AB :: 1 + \cos. B : 1 - \cos. B :: (17)\ 1 : \frac{1 - \cos. B}{1 + \cos B} :: 1 :$ (I. 42ᵉ) $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} B = \frac{BC - AB}{BC + AB}$.

545. En opérant de la même manière sur la 8ᵉ formule, ou, ce qui revient au même, en mettant B au lieu de C, et C au lieu de B dans les deux équations précédentes, on aura

$$\sin. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{BC - AC}{2\,BC}}, \quad \text{et} \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{BC - AC}{BC + AC}}.$$

546. Il arrive qu'au lieu de connaître la valeur absolue de deux parties d'un triangle rectangle, comme il le faudrait pour résoudre ce triangle par les formules (537), on connaît seulement une partie, et la somme ou la différence de deux autres parties. Nous croyons utile de donner pour ces cas les solutions suivantes.

En multipliant l'équation (544) par la 14ᵉ, (537), on a $\text{tang.}^2 \frac{1}{2} B \times AC^2 = (BC - AB)^2$, et par conséquent

$$AC : BC - AB :: 1 : \text{tang.} \tfrac{1}{2} B.$$

Fig. 4. 547. Si, au lieu de multiplier, on divise, on trouvera

$$AC : BC + AB :: \text{tang.} \tfrac{1}{2} B : 1.$$

Par ces deux analogies on résoudra le triangle, lorsqu'*un angle, et la différence ou la somme de l'hypoténuse et d'un côté seront donnés.*

548. Car on sait que *la demi-somme de deux quantités, augmentée ou diminuée de leur demi-différence, est égale, dans le premier cas, à la plus grande de ces deux quantités, et, dans le second, à la plus petite.*

549. La formule 1e (537) donne $AB : AC :: 1 : \text{tang. } B$. Donc $AB + AC : AB - AC :: 1 + \text{tang. } B : 1 - \text{tang. } B$ $:: 1 : \frac{1 - \text{tang. } B}{1 + \text{tang. } B}$, et par conséquent (II. 8e)

$$AB + AC : AB - AC :: 1 : \text{tang.} (45° - B).$$

Par cette analogie on résoudra le triangle, lorsqu'*un angle et la différence ou la somme des deux côtés seront donnés.*

550. La proportion $AB : AC :: 1 : \text{tang. } B$ donne aussi $AB : AB \pm AC :: 1 : 1 \pm \text{tang. } B$. Mais (537, 9e), $AB = BC \cos. B$. Donc $BC : AB \pm AC :: 1 : \cos. B (1 \pm \text{tang. } B)$ $:: 1 : \cos. B \pm \sin. B$; et par conséquent (II. 7e)

$$BC : AB \pm AC :: 1 : \sin. (45° \pm B) \sqrt{2}.$$

Par cette analogie on résoudra le triangle, lorsque *l'hypoténuse ou un angle, et la somme ou la différence des côtés seront donnés.*

551. Lorsque $\sin. (45° + B)$ est la quantité cherchée, les tables ne donneront pas avec exactitude l'arc correspondant, dans le cas où B sera un peu moindre que de 45°. Mais alors comme on a $\sin. (45° - B) = \sqrt{1 - \cos.^2 (45° - B)} = \sqrt{1 - \sin.^2 (45° + B)}$, ce qui donne, en substituant à $\sin. (45° + B)$ sa valeur tirée de l'analogie ci-dessus, $\sin. (45° - B) = \sqrt{\left(1 - \frac{(AB + AC)^2}{2BC^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2BC^2 - (AB + AC)^2}{2BC^2}\right)}$; on aura de cette manière, au lieu de la valeur de $\sin. (45° + B)$, celle de $\sin. (45° - B)$, et par conséquent celle de B, avec toute la précision desirée. Si la fraction

$\frac{(AB+AC)^2}{2BC^2}$ est peu différente de l'unité, il est à propos de calculer par les nombres naturels, et non par logarithmes, la quantité $2BC^2 - (AB+AC)^2$, pour l'avoir avec exactitude. Mais ensuite on pourra prendre son logarithme, en soustraire le log. de $2BC^2$; la moitié du reste sera le log. de sin. $(45^\circ - B)$.

552. Considérons encore deux cas qui fournissent trois théorèmes utiles.

Soit divisée premièrement *l'hypoténuse en deux segmens par une perpendiculaire* comme AD, tirée de l'angle droit. Fig. 5.

1°. *Le plus grand segment sera au plus petit, comme le rayon au quarré de la tangente du plus petit angle.*

2°. *L'hypoténuse sera à la différence des segmens, comme le rayon au sinus de la différence des angles.*

En effet, (529), $AD = BD \times \text{tang. } B = CD \times \text{tang. } C$. Mais $\text{tang. } C = \text{cot. } B = \frac{1}{\text{tang. } B}$. Donc $BD \times \text{tang.}^2 B = CD$, et par conséquent

1°. $BD : CD :: 1 : \text{tang.}^2 B$.

Il est évident que B doit être le plus petit angle, en supposant $BD > CD$; puisque la proportion exige qu'on ait aussi $1 \geq \text{tang. } B$, c'est-à-dire $B < 45^\circ$, (29).

Cette proportion se transforme ainsi : $BD + CD : BD - CD :: 1 + \text{tang.}^2 B : 1 - \text{tang.}^2 B :: 1 : \frac{1 - \text{tang.}^2 B}{1 + \text{tang.}^2 B} :: 1 : \text{cos. } 2B$, (I. 25e). Mais $BD + CD = BC$, et $\text{cos. } 2B = \text{sin. } (C - B)$, puisque $C = 90^\circ - B$. Donc

2°. $BC : BD - CD :: 1 : \text{sin. } (C - B)$.

553. Si au lieu de la perpendiculaire AD, on considère *une ligne* comme AE, *qui tombe obliquement sur l'hypoténuse, en divisant l'angle droit en deux parties égales*; alors

3°. *Le plus grand segment de l'hypoténuse est au plus petit, comme le rayon à la tangente du petit angle.*

En effet (89), $AE = \frac{BE \text{ sin. } B}{\text{sin. } BAE} = \frac{CE \text{ sin. } C}{\text{sin. } CAE}$. Mais $BAE = CAE$ par la construction, et $\text{sin. } C = \text{cos. } B$. Donc $BE \times \text{sin. } B =$

CE $\times$ cos. B, et par conséquent

$$BE : CE :: 1 : \text{tang. } B.$$

554. Nous terminerons ce qui concerne toutes ces formules, (543, etc.), en donnant un exemple pour en faire voir l'usage et l'utilité.

Supposons que *regardant, d'un lieu élevé, l'horizon de la surface de la mer, on demande l'inclinaison du rayon visuel.*

Fig. 6. Soit BT $= 40$ pieds, et soit la tangente BA le rayon visuel d'un observateur qui, du point B, regarde l'horizon de la mer. On cherche l'angle ABO que forme l'horizon apparent AB avec l'horizon vrai OR de l'observateur.

555. Puisque BAC $= 90° =$ CBO, l'angle cherché ABO $=$ ACB. Pour trouver la grandeur de cet angle, on a par la formule 15ᵉ (537), cos. C $= \frac{AC}{BC}$. Les Astronomes ont déterminé la longueur du demi-diamètre AC ou TC de la Terre, dont la valeur moyenne (1559) est à-peu-près de 19610000 pieds, mesure de Paris, en nombres ronds. En ajoutant 40, on a donc la valeur de BC, et par conséquent

$$\begin{aligned} \log. AC &= \log. 19610000 = 7,2924776 \\ \text{compl. log. } BC &= \text{compl. log. } 19610040 = 2,7075215 \\ \log. \cos. C &= 9,9999991 \end{aligned}$$

556. Ce log. répond dans les tables au cosinus d'un angle entre 6′ 45″ et 7′ 15″. On aurait ainsi la valeur de l'angle cherché avec 30″ d'incertitude (419). Il est donc à propos d'avoir recours à la formule (543), sin. $\frac{1}{2}$ C $= \sqrt{\frac{BC - AC}{2BC}}$, qui transforme le grand cosinus en un sinus très-petit, et dont voici le calcul.

$$\begin{aligned} \log. \tfrac{1}{2}(BC - AC) = \log. \tfrac{1}{2} BT = \log. 20 &= 1,3010300 \\ \text{compl. log. } BC = \text{compl. log. } 19610040 &= 2,7075215 \\ \text{Donc log. } \frac{BC - AC}{2BC} &= 4,0085515 \end{aligned}$$

dont la moitié (549), ou log. sin. $\frac{1}{2}$ C $= 7,0042757$.

Ce log. répond dans les tables à sin. 3′ 28″,3; et l'on a ainsi avec précision C $=$ 6′ 56″,6.

557. Nous venons de voir que quand on emploie la formule

$\cos. C = \frac{AC}{BC}$, le log. de cos. C ne donne pas exactement la valeur de C : mais cette imperfection n'influe en rien sur le calcul lorsque l'angle C est connu, et qu'étant donnés, par exemple, BC et C, on cherche AC par la formule $AC = BC \times \cos C$. Il est clair que si à log. BC pris de l'exemple ci-dessus, on ajoute log. cos 6′ 57″, tel que le donnent les tables, et que nous l'avons trouvé en calculant la formule $\cos. C = \frac{AC}{BC}$, il en doit résulter nécessairement le même log. de AC, que celui que nous avons employé dans cette même formule. Concluons qu'autant les sinus et cosinus très-grands sont peu propres à donner la valeur exacte des angles par le moyen des tables ordinaires, autant ils sont favorables, lorsque l'angle est donné, pour trouver avec précision une autre quantité quelconque d'une équation, puisque s'il y a quelque légère erreur dans l'angle donné, elle n'altère point la valeur de son sinus ou cosinus, et ne nuit point par conséquent à la valeur de la chose cherchée.

558. Si, au lieu de l'angle d'inclinaison, on voulait connaître la distance BA, on aurait (537, 16ᵉ), $AB = \sqrt{40 \times 39220040}$. En calculant cette équation par les logarithmes, on trouvera promptement que l'œil peut, à quarante pieds d'élévation, voir la surface de la mer jusqu'à une distance de 39608 pieds.

CHAPITRE XI.

Résolution des triangles rectilignes obliquangles.

559. *Connaissant deux angles*, et par conséquent le troisième, *et connaissant aussi un côté*, *trouver l'un des deux autres côtés.*

Appelons A, B, C les trois angles, et AC le côté connu. Si
Fig. 7. l'on cherche BC, on aura par la règle (89)

$$BC = \frac{AC \times \sin. A}{\sin. B};$$

Nous avons donné (92) un exemple de ce cas.

Si le côté cherché est AB, on aura par la même règle

$$AB = \frac{AC \times \sin. C}{\sin. B},$$

560. *Connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté donné*, et par conséquent l'angle intercepté; car ordinairement, avec ces mêmes données, c'est en cherchant celui des angles opposés qui n'est pas connu, qu'on détermine l'angle intercepté.

Appelons les données AC, BC, B; A est l'inconnue demandée, et on aura

$$\sin. A = \frac{BC \times \sin. B}{AC}:$$

561. *L'angle cherché est toujours aigu, s'il est opposé au plus petit des côtés donnés.*

En effet, comme le plus grand angle est toujours opposé au plus grand côté, il faut, si $BC < AC$, qu'on ait aussi $A < B$. Or un triangle rectiligne ne peut avoir deux angles obtus.

562. *Si l'angle cherché est opposé au plus grand des côtés donnés, l'espèce de l'angle est douteuse*, (55).

Fig. 8. En effet soit, par exemple, $BC > AC$; et menons $CD = AC$; nous aurons $A = ADC$, et (54), $\sin. A = \sin. CDB = \frac{BC \times \sin. B}{AC}$ $= \frac{BC \times \sin. B}{CD}$. Donc pour savoir si l'angle cherché est aigu comme A, ou obtus comme CDB, il ne suffit pas de connaître la grandeur de B, celle de BC et celle de $AC = CD$; mais il est nécessaire de savoir encore si le plus petit côté donné est dans la direction AC ou dans la direction CD. C'est ce qu'on sait ordinairement par les circonstances locales. Mais sans cela, il est de plus impossible de savoir laquelle il faut adopter des deux valeurs ACB, BCD pour le troisième angle, et AB, BD pour le troisième côté.

563. *Connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver le troisième côté.*

Appelons les données AC, BC, B; AB est l'inconnue cherchée. Fig. 2 et 3.
Que l'on mène sur AB prolongé, s'il le faut, la perpendiculaire CD; on aura (530), $BD = BC \times \cos. B$, et $CD = BC \times \sin. B$. Donc (531), $AD = \sqrt{(AC^2 - CD^2)} = \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}$. Or $AB = BD \pm AD$. Donc

$$AB = BC \times \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}.$$

564. On voit par les *figures* que le radical négatif a lieu lorsque l'angle A est obtus. Donc pour trouver la valeur de AB, il est nécessaire de savoir l'espèce de l'angle opposé au plus grand des côtés donnés, comme dans le problème précédent. Si l'angle donné B est obtus, le radical est positif; mais il faut observer qu'alors $BC \times \cos. B$ devient négatif (66).

565. J'ai donné pour ce problème une solution directe, et j'en ferai de même pour les problèmes suivans, parce que ces solutions fournissent des expressions utiles et même nécessaires dans les opérations analytiques : mais dans ce cas-ci, la voie la plus expéditive et la plus commode pour le calcul numérique, est de chercher d'abord l'angle A par la formule (560); alors le troisième angle C est aussi connu; et ensuite AB se trouve par la 2e formule (559). Comme les quantités AC et sin. B sont communes à ces deux formules, on n'a que six logarithmes à chercher par cette méthode.

566. *Connaissant deux côtés et l'angle intercepté, trouver le troisième côté.*

Soient les données AB, AC, A; BC est le côté demandé. Fig. 2.
Menant une perpendiculaire CD sur l'un des côtés connus, on aura (531), $BC^2 = CD^2 + BD^2 = AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$. Mais $AD = AC \times \cos. A$, (530); dnc

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos. A)}.$$

En appliquant cette solution à la fig. 3 où A est obtus, on verra que le dernier terme est positif, c'est-à-dire tel que la seule considération des règles (66) aurait conduit à l'employer dans le calcul.

567. Cette formule est assez pénible à calculer. Pour la rendre

Fig. 2. plus commode dans la pratique, substituons $1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} A$ au lieu de cos. A, et nous aurons (28, 14),

$$BC = \sqrt{(AC \backsim AB)^2 + 4AB \times AC \times \sin.^2 \tfrac{1}{2} A}.$$

Actuellement par les transformations (441) nous aurons

$$\text{tang. } a = \frac{2\sin. \frac{1}{2} A}{AC \backsim AB} \sqrt{AB \times AC}; \text{ et}$$

$$BC = \frac{AC \backsim AB}{\cos a.}.$$

La première de ces équations donnera la valeur d'un arc a, qui, employée dans la seconde, fera connaître aussitôt le côté cherché.

568. Lorsque la différence ($AC \backsim AB$) des côtés est petite, le résultat peut se trouver plus exact en employant la somme. Pour cet effet, écrivons (566), ($2\cos.^2 \frac{1}{2} A - 1$) au lieu de cos. A; nous aurons $BC = \sqrt{(AB + AC)^2 - 4AB \times AC \times \cos.^2 \frac{1}{2} A}$; puis, (442),

$$\cos. m = \frac{2\cos. \frac{1}{2} A}{AB + AC} \sqrt{AB \times AC},$$

et

$$BC = (AB + AC) \sin. m.$$

569. *Connaissant deux côtés et l'angle intercepté, trouver un des deux autres angles.*

Solution I. Nommons les données AB, AC, A; soit B l'angle cherché. Du troisième angle C abaissons la perpendiculaire CD; nous aurons (529), tang. $B = \frac{CD}{BD}$. Mais (530), $CD = AC \times \sin. A$, et $BD = AB - AD = AB - AC \times \cos. A$. Donc

$$\text{tang. } B = \frac{AC \sin. A}{AB - AC \cos. A} = \frac{\text{tang. } A}{\frac{AB}{AC \cos. A} - 1}.$$

La dernière expression nous apprend que dans ce problème il n'est pas nécessaire de connaître la valeur absolue des côtés donnés, mais seulement leur rapport $\frac{AB}{AC}$.

570. Si A est obtus, cos. A et tang. A seront négatifs (73). Mais si A étant aigu, on a AC cos. A > AB, alors la valeur de tang. B sera négative, ou, ce qui revient au même, B sera obtus (77).

Soit dit au surplus, une fois pour toutes, *qu'il suffit de donner les formules, pour la résolution générale des triangles, en supposant tous les angles aigus.* C'est à quoi se réduit la règle (77).

571. Si au lieu de B on cherche l'angle C; en abaissant la perpendiculaire du point B sur la ligne AC, on trouvera par la même méthode

$$\text{tang. C} = \frac{\text{AB sin. A}}{\text{AC} - \text{AB cos. A}}.$$

572. On obtiendrait le même résultat en changeant seulement dans la formule précédente B en C et C en B, règle facile et générale.

573. Solution II. AB : AC :: sin. C : sin. B, (89). Donc AB + AC : AB — AC :: sin. C + sin. B : sin. C — sin. B :: tang. $\frac{1}{2}$ (C + B) : tang. $\frac{1}{2}$ (C — B), (II. 13ᵉ). Mais (93), tang. $\frac{1}{2}$ (C + B) = tang. $\frac{1}{2}$ (180° — A) = tang. (90° — $\frac{1}{2}$ A) = cot. $\frac{1}{2}$ A, (11). Donc

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}) = \text{cot. } \tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{AB} - \text{AC}}{\text{AB} + \text{AC}}; \text{ ou}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}) = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{AB} + \text{AC}}{\text{AB} - \text{AC}}.$$

574. Pour calculer l'une ou l'autre de ces formules, on nommera AC le plus petit des deux côtés donnés. On connaît déjà $\frac{\text{C} + \text{B}}{2}$ = 90° — $\frac{1}{2}$ A. Retranchant de cette quantité la valeur de $\frac{\text{C} - \text{B}}{2}$ donnée par la formule, on aura celle de B; en l'ajoutant, au contraire, on aura le plus grand angle C, (548); et cette addition donne l'angle obtus, quand il l'est effectivement.

575. Si la valeur des côtés AB, AC était donnée en logarithmes et non en nombres naturels, comme il arrive dans les tables astronomiques pour les distances des planètes au soleil, alors on ferait, (443),

$$\text{tang. } x = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}; \text{ et on aurait}$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}) = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{A tang. } (45° + x).$$

576. *Connaissant les trois côtés, trouver un angle.*

Fig. 2. SOLUTION I. Soit A l'angle cherché. De la formule (566) on tire

$$\cos. A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}.$$

577. Cette expression de cos. A sera plus commode pour le calcul sous la forme suivante, (28):

$$\cos. A = \frac{(AC + AB + BC)(AC + AB - BC)}{2AC \times AB} - 1.$$

578. SOLUTION II. En mettant, dans la formule que nous venons de trouver, $2\cos.^2 \frac{1}{2} A - 1$ au lieu de cos. A, on aura

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{AC+AB+BC}{2} \times \left(\frac{AC+AB+BC}{2} - BC\right)}{AB \times AC}}.$$

Cette solution me paraît la plus expéditive; cependant la suivante est plus usitée, parce que souvent on aime mieux chercher dans les tables le log. d'un sinus que celui d'un cosinus, et surtout parce qu'on n'a pas les petits angles avec exactitude par les cosinus.

579. SOLUTION III. Dans la formule (576), mettons $1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} A$ au lieu de cos. A; nous aurons $2\sin.^2 \frac{1}{2} A = 1 + \frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2AB \times AC} = \frac{(BC + AC - AB)(BC + AB - AC)}{2AB \times AC}$. Donc

$$\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AB\right)\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AC\right)}{AB \times AC}}$$

580. La table III, à la fin de cet Ouvrage, contient les solutions analytiques de toutes les questions que renferme ce problème: *Dans un triangle* ABC, *trois parties, dont au moins un côté, étant données, déterminer les autres parties.* Je dis *trois parties dont au moins un côté;* j'en excepte un seul cas, celui de deux angles connus, lesquels suffisent pour déterminer le troisième angle.

Les formules 1e, 2e, 10e, 11e, 19e, 20e, 28e, 29e, 55e, 56e, 82e, 83_e de la table III, naissent visiblement de la règle (89).

Les formules 30e, 93e, 48e, 57_e, 66e, 75e, 84e, 93e, 102e, sont fondées sur les art. 93, 73, et donnent celles qui les suivent immédiatement, comme on le reconnaîtra si l'on se rappelle les formules (II 1_e, 3_e, 5_e).

Les formules 8_e, 25e, 43_e, 77_e, 105e, sont démontrées aux articles 563, 566, 570, 569, 571.

Les formules 9ᵉ, 17ᵉ, 18ᵉ, 26ᵉ, 27ᵉ, se démontrent comme la 8ᵉ; ou plutôt la 9ᵉ se tire de la 8ᵉ, en changeant dans celle-ci A en B et B en A; et par des changemens semblables, la 9ᵉ donne la 17ᵉ et la 26ᵉ, et la 8ᵉ donne la 18ᵉ et la 27ᵉ.

Les 7ᵉ et 16ᵉ se démontrent comme la 25ᵉ, ou se tirent de la 25ᵉ en changeant convenablement les lettres.

Les 70ᵉ et 97ᵉ se démontrent comme la 43ᵉ, ou s'en déduisent en changeant les lettres.

Les formules 50ᵉ, 51ᵉ se démontrent comme la 77ᵉ, ou la 51ᵉ se déduit de la 77ᵉ, et la 50ᵉ de la 51ᵉ, en changeant les lettres. Il en est de même des 78ᵉ et 104ᵉ, comparées à la 105ᵉ.

La 3ᵉ est tirée de la 1ᵉ, en mettant dans celle-ci la valeur de sin. A, prise de la 31ᵉ, et divisant le numérateur et le dénominateur par sin. C. Les 4ᵉ, 12ᵉ, 13ᵉ, 21ᵉ et 22ᵉ, se tirent de même des 2ᵉ, 10ᵉ, 11ᵉ, 19ᵉ et 20ᵉ.

Les 5ᵉ, 6ᵉ, 14ᵉ, 15ᵉ, 23ᵉ et 24ᵉ sont faciles à tirer des formules 51ᵉ, 77ᵉ, 105ᵉ, 50ᵉ, 78ᵉ, 104ᵉ.

La 32ᵉ est tirée de la 28ᵉ, en substituant dans celle-ci la valeur de AB prise de la 7ᵉ. On déduira de la même manière les formules 33ᵉ, 59ᵉ, 60ᵉ, 86ᵉ, 87ᵉ des 29ᵉ, 55ᵉ, 56ᵉ, 82ᵉ, 83ᵉ.

Si on observe que $\sin. A = \sqrt{(1 - \cos.^2 A)}$, on verra que les 34ᵉ, 61ᵉ, 88ᵉ proviennent des 43ᵉ, 70ᵉ, 97ᵉ.

La 35ᵉ se déduit de la 28ᵉ, en y introduisant la valeur de BC prise de la formule 26ᵉ. On déduira de même les formules 36ᵉ, 62ᵉ, 63ᵉ, 89ᵉ, 90ᵉ des formules 29ᵉ, 55ᵉ, 56ᵉ, 82ᵉ, 83ᵉ.

En faisant attention que $\cos. A = \sqrt{(1 - \sin.^2 A)}$, on reconnaîtra que les formules 37ᵉ, 38ᵉ, 64ᵉ, 65ᵉ, 91ᵉ, 92ᵉ proviennent des 28ᵉ, 29ᵉ, 55ᵉ, 56ᵉ, 82ᵉ, 83ᵉ.

En observant que $\cos. A = \frac{\sin. A}{\text{tang.} A}$, et divisant la 32ᵉ par la 50ᵉ, on aura la 41ᵉ. On trouvera de la même manière les formules 42ᵉ, 68ᵉ, 69ᵉ, 95ᵉ, 96ᵉ.

La 44ᵉ est tirée de la 40ᵉ, en substituant dans celle-ci la valeur de sin. B prise de la 56ᵉ, et celle de cos. B prise de la 65ᵉ. Les 45ᵉ, 71ᵉ, 72ᵉ, 98ᵉ, 99ᵉ sont formées de même, en substituant respectivement dans les 40ᵉ, 67ᵉ, 94ᵉ, les valeurs contenues dans les 82ᵉ, et 91ᵉ, 83ᵉ et 92ᵉ, 28ᵉ et 37ᵉ, 29ᵉ et 38ᵉ, 55ᵉ et 64ᵉ.

On sait que tang. $A = \frac{\sin. A}{\cos. A}$; donc en divisant la 35e par la 44e, on aura la 53e. Les 54e, 80e, 81e, 107e, 108e sont formées de la même manière.

De plus, tang. $A = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 A} - 1\right)}$; d'où il est facile de conclure que les 52e, 79e, 106e proviennent des 43e, 70e, 97e.

Enfin en divisant la 28e par la 57e, on a la 46e, et l'on forme de la même manière les 47e, 73e, 74e, 100e, 101e.

581. La table IV, rejetée de même à la fin de cet Ouvrage, n'a pas besoin d'explication. J'ai cru devoir l'ajouter en faveur de ceux qui n'aiment pas les expressions dans lesquelles les parties du triangle sont désignées simplement par les lettres de l'alphabet. J'y ai réuni les solutions les plus commodes pour le calcul numérique.

582. On aura pu conclure des formules des tables III et IV, et en général de toutes les formules précédentes, que pour résoudre un triangle rectiligne obliquangle, il est nécessaire de connaître trois des parties qui le composent, et que l'une au moins de ces parties soit un côté par la même raison que celle qui a été donnée (532). Telle est la règle générale. Nous allons cependant donner des solutions pour des combinaisons différentes.

Fig. 7. 583. *Connaissant deux côtés* AB, AC, *et la différence* (C ∽ B) *des angles opposés, résoudre le triangle.*

De la seconde formule (573), dans laquelle, pour plus de généralité, je substitue ∽ à —, je déduis l'équation suivante :

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,A = \cot.\ \tfrac{1}{2}\,(C \backsim B) \times \frac{AB \backsim AC}{AB + AC};\ \text{ou}$$

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix}\text{demi-angle compris}\\ \text{entre les côtés donnés}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{cot. } \tfrac{1}{2} \text{ diff. donnée} \times \text{diff. des côtés donnés}}{\text{somme des côtés donnés}}.$$

L'angle A étant connu, la détermination des autres parties du triangle n'a plus de difficulté.

584. *Connaissant les angles et la somme* (AB + AC), *ou la différence* (AB ∽ AC) *de deux côtés, résoudre le triangle.*

Des deux dernières équations se déduisent les quatre suivantes :

$$(AB \backsim AC) = (AB + AC) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} A \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (C \backsim B),$$
$$(AB + AC) = (AB \backsim AC) \text{ cot. } \tfrac{1}{2} A \text{ cot. } \tfrac{1}{2} (C \backsim B), \text{ ou}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Diff. des côtés dont}\\ \text{la somme est donnée}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{som. de ces côtés} \times \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ angle compris}}{\text{cot. } \frac{1}{2} \text{ diff. des deux autres angles}};$$
$$\left.\begin{matrix}\text{Som. des côtés dont}\\ \text{la différ. est donnée}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{diff. de ces côtés} \times \text{cot. } \frac{1}{2} \text{ angle compris}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ diff. des deux autres angles}}.$$

L'une ou l'autre de ces deux formules donnera la valeur absolue de AB et de AC, (548).

585. *Connaissant un angle* A, *le côté opposé* BC, *et la somme* (AB+AC), *ou la différence* (AB ∽ AC), *des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

On a (III. 1e, 11e), $BC = \frac{(AB \backsim AC) \sin. A}{\sin. C \backsim \sin. B} = \frac{(AB \backsim AC) \sin. (C+B)}{\sin. C \backsim \sin. B} =$

(I. 6e, II. 23e) $\frac{(AB \backsim AC) 2 \sin. \frac{1}{2}(C+B) \cos. \frac{1}{2}(C+B)}{2 \sin. \frac{1}{2}(C \backsim B) \cos. \frac{1}{2}(C+B)} = \frac{(AB \backsim AC) \sin. \frac{1}{2}(C+B)}{\sin. \frac{1}{2}(C \backsim B)}$.

Mais $\sin. \frac{1}{2}(C+B) = \sin. \frac{1}{2}(180° - A) = \cos. \frac{1}{2} A$. Donc

$$\sin. \tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \frac{(AB \backsim AC) \cos. \frac{1}{2} A}{BC}, \text{ ou}$$

$$\sin. \left\{\begin{matrix}\frac{1}{2} \text{ différence des}\\ \text{angles inconnus}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{diff. donnée} \times \cos. \frac{1}{2} \text{ angle donné}}{\text{côté donné}}.$$

Cette formule sert à déterminer les angles (548), quand on connaît la différence des côtés.

586. Si la somme est donnée, au lieu de la différence, il faut changer, dans la démonstration qui précède, le signe ∽ en +, et au moyen de la formule (II. 19e), dans laquelle au contraire on mettra ∽ au lieu de —, on arrivera au résultat suivant, qui fera de même connaître la mesure des angles inconnus :

$$\cos. \tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \frac{(AB + AC) \sin. \frac{1}{2} A}{BC}, \text{ ou}$$

$$\cos. \left\{\begin{matrix}\frac{1}{2} \text{ différence des}\\ \text{angles inconnus}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{somme donnée} \times \sin. \frac{1}{2} \text{ angle donné}}{\text{côté donné}}.$$

587. Ayant trouvé par l'une des formules (585, 586) la demi-différence des angles, on connaîtra aussitôt par l'autre la somme ou la différence des côtés; et toutes les parties du triangle seront connues.

588. *Connaissant un angle, un côté adjacent, et la somme des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

Fig. 9. SOLUTION I. Soient les choses connues B, BC et (AB + AC). Que l'on prolonge AB de manière qu'on ait BD = (AB + AC), ou qu'on ait AD = AC; on connaîtra dans le triangle BCD les deux côtés BC, BD, et l'angle intercepté B, et l'on trouvera par la solution (573) la valeur de $\frac{1}{2}$(BCD — D), qui est celle de $\frac{1}{2}$ACB, puisque D = ACD par la construction. Cette valeur sera exprimée par l'équation suivante :

$$\text{cot.}\ \tfrac{1}{2}\,ACB = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B \times \frac{(AB + AC) + BC}{(AB + AC) - BC}, \text{ ou}$$

$$\text{cot.}\left\{\begin{matrix}\text{demi-angle inconnu}\\ \text{adjac. au côté connu}\end{matrix}\right\} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{angle donné} \times \frac{\text{som. donnée} + \text{côté donné}}{\text{som. donnée} - \text{côté donné}}.$$

589. SOLUTION II. Faisons (AB + AC) = s, et par conséquent AC = s — AB. Nous aurons (III. 16), $(s - AB)^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB\ \cos. B = s^2 - 2s \times AB + AB^2$; d'où se déduit $2AB \times (s - BC\ \cos. B) = s^2 - BC^2 = (s - BC)(s + BC)$. Substituons à s sa valeur; nous aurons aussitôt

$$AB = \frac{\frac{1}{2}(AB + AC - BC)\,(AB + AC + BC)}{(AB + AC) - BC\ \cos. B}.$$

Wisthon (*Prælect. Astron. Lem. VI*), et Paulin (*Institut. Analyticæ, Romæ*, 1738, *pag.* 198) ont donné des solutions laborieuses de ce problème. La collection complète de la table III fournit toujours les solutions les plus simples.

590. *Connaissant un angle, un côté adjacent, et la différence des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

Fig. 10. SOLUTION I. Soient les choses connues B, BC et (AB — AC). Qu'on prenne BD = (AB — AC), ou qu'on fasse AD = AC. Dans le triangle BCD, la valeur de $\frac{1}{2}$(BDC — BCD) est donnée par la solution (573). Mais BDC = 180° — ADC, BCD = ACB — ACD, et ADC = ACD par la construction. Donc la valeur susdite est celle de 90° — $\frac{1}{2}$ACB. Donc

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,ACB = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,B \times \frac{BC + (AB - AC)}{BC - (AB - AC)}, \text{ ou}$$

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix}\text{demi-angle inconnu}\\ \text{adjac. au côté connu}\end{matrix}\right\} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ang. donné} \times \frac{\text{côté donné} + \text{diff. donnée}}{\text{côté donné} - \text{diff. donnée}}.$$

591. Solution II. En procédant comme je l'ai fait (589), on trouvera

$$AB = \frac{\frac{1}{2}(BC - (AB - AC))(BC + (AB - AC))}{BC \cos. B - (AB - AC)}.$$

592. *Déterminer les parties inconnues d'un triangle, dans lequel on connaît un angle, le côté opposé, et le rectangle des deux autres côtés.*

Soient les parties connues C, AB et (AC × BC). Puisqu'on a AB : sin. C :: BC : sin. A, et AB : sin. C :: AC : sin. B, on aura, en multipliant les deux proportions l'une par l'autre, AB^2 : $\sin.^2 C$ :: AC × BC : sin. A sin. B. Mais (II. 17[e]), sin. A sin. B $= \frac{1}{2}\cos.(A-B) - \frac{1}{2}\cos.(A+B) = \frac{1}{2}\cos.(A-B) + \frac{1}{2}\cos. C$, (III. 93[e]). En introduisant cette valeur dans l'analogie, on en tire Fig. 7.

$$\cos.(A - B) = \frac{2(AC \times BC)\sin.^2 C - AB^2 \cos. C}{AB^2},$$

équation qui conduit à la détermination des angles inconnus (574).

593. Pour avoir les côtés inconnus, qu'on observe (III. 7[e]) que $AB^2 + 2AC \times BC \cos. C = AC^2 + BC^2 = (AC \overset{+}{\backsim} BC)^2 \mp 2AC \times BC$. Si au lieu de cos. C, on introduit une première fois $(2\cos.^2 \frac{1}{2}C - 1)$, en faisant usage des signes supérieurs, et une seconde fois $(1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2}C)$, mais en employant les signes inférieurs, on obtient

$$AC + BC = \sqrt{\left(AB^2 + 4(AC \times BC)\cos.^2 \tfrac{1}{2}C\right)},$$

$$AC \backsim BC = \sqrt{\left(AB^2 - 4(AC \times BC)\sin.^2 \tfrac{1}{2}C\right)}.$$

594. *Connaissant les trois angles et la somme des trois côtés, déterminer un côté quelconque.*

BC : sin. A :: AC : sin. B :: AB : sin. C :: BC + AC + AB : sin. A + sin. B + sin. C, par la XII[e] du 5[e] liv. d'*Euclide*. Donc

$$BC = \frac{(AB + AC + BC)\sin. A}{\sin. A + \sin. B + \sin. C}.$$

595. *Connaissant deux angles et le côté compris, trouver la perpendiculaire abaissée du troisième angle.* (Newton *Arith. univ.* Sect. 4. Cap. II. Prob. I.)

Soient A, B, AB, les données, CD la perpendiculaire cherchée. Fig. 2.

Fig. 2. Puisque (529), BD = CD cot. B, et qu'on a de même AD = CD × cot. A, on a donc aussi BD + AD = CD (cot. B + cot. A) $= \text{CD} \times \frac{\sin. (A+B)}{\sin. A \sin. B}$, (II. 22ᵉ). Donc

$$\text{CD} = \frac{\text{AB} \sin. A \sin. B}{\sin. (A+B)} = \frac{\text{AB} \sin. A \sin. B}{\sin. C}, \ (93),$$

équation qui a encore lieu, lorsque la perpendiculaire tombe en dehors du triangle, comme dans la fig. 3. Ce que je dis une fois pour toutes, (570).

696. *Les trois côtés étant donnés, trouver la perpendiculaire.*

Multipliez l'une par l'autre les deux formules (579, 578); vous aurez $\sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(BC + AC - AB)(BC + AB - AC)}{4 AB \times AC}} \times \sqrt{\frac{(BC + AC + AB)(AC + AB - BC)}{4 AB \times AC}}$. Mais $\sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \sin. A = \frac{CD}{2 AC}$, (530). Donc

$$\text{CD} = \frac{1}{2 AB} \times \sqrt{(BC + AC + AB)(BC + AC - AB) \times (BC + AB - AC)(AC + AB - BC)}.$$

597. *Connaissant un angle, le côté opposé, et la perpendiculaire abaissée de cet angle sur ce côté, déterminer les deux autres angles.*

Soient les données ACB, AB, CD; et désignons ACB par C. Puisque $\sin. A = \frac{BC \sin. C}{AB}$, et que $BC = \frac{CD}{\sin. B} = \frac{CD}{\sin. (A+C)}$, on a aussi $\sin. A = \frac{CD \sin. C}{AB \sin. (A+C)}$, ou $\frac{CD \sin. C}{AB} = \sin. (A+C) \sin. A = \frac{1}{2} \cos. C - \frac{1}{2} \cos. (2A + C)$, (II. 17ᵉ). Donc

$$\cos. (2A + C) = \cos. C - \frac{2CD \sin. C}{AB},$$

équation qui fait connaître l'angle A, et par conséquent aussi le troisième angle.

Si au lieu des angles on cherchait les côtés, je crois que la voie la plus courte serait encore de déterminer d'abord les angles par le moyen de cette formule.

598. *Trouver les angles, quand la base, les côtés et la perpendiculaire sont en proportion géométrique continue.* Newton, loc. cit. Prob. XV.

Soit ∺ AB : AC : BC : CD. On aura aussi AB : AC :: BC : CD; d'où suit, d'après la VIIe du 6e liv. des Élémens, que les triangles ACB, ACD sont semblables, et par conséquent que l'angle ACB est droit. Or ayant AB : AC :: AC : BC, on a aussi, par l'identité des rapports, 1 : cos. A :: 1 : tang. A. Donc tang. A = cos. A; et sin. A = cos.²A = 1 — sin.²A. Mais l'équation sin.²A + sin. A = 1 donne sin. A = $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ = cos. B. Donc les angles sont déterminés, et on a pour leur valeur, en négligeant les secondes, A = 38° 10′, B = 51° 50′, C = 90°.

599. *Connaissant l'aire, le périmètre et l'un des angles, trouver le côté opposé à cet angle.* Newton, Probl. VIII.

Soit A l'angle donné; nommons b^2 l'aire, p le périmètre, x le côté cherché BC. On a $b^2 = \frac{1}{2}$ AB × CD = $\frac{1}{2}$ AB × AC × sin. A. Or AB + AC = $p - x$, et par conséquent AB² + 2AB × AC + AC² = $p^2 - 2px + x^2 = p^2 - 2px$ + AB² + AC² — 2AB × AC cos. A, (III. 25e). Donc 2AB × AC (1 + cos. A) = $p^2 - 2px$. Mais de la valeur de b^2 ci-dessus, on tire AB × AC = $\frac{2b^2}{\sin A}$. Substituons cette expression; l'équation précédente deviendra $4b^2 \times \frac{1+\cos. A}{\sin. A}$ $= p^2 - 2px = 4b^2 \cot. \frac{1}{2} A$, (I. 41e). D'où $x = \frac{1}{2}p - \frac{2b^2 \cot. \frac{1}{2}A}{p}$.

600. *Sous-tendre à un angle d'un triangle scalène donné, une ligne droite égale au côté opposé à cet angle, et qui soit coupée par ce côté en deux parties égales.* Ce problème a été résolu synthétiquement par Boulliaud, Astron. Phil. lib. I, cap. XIV.

Soit ABC le triangle scalène donné. On demande de sous-tendre à l'angle A une droite DE = BC, desorte qu'on ait DF = FE = $\frac{1}{2}$ BC. Je fais CD = x, et je nomme F chacun des angles égaux BFE, CFD. Fig. 14.

Comme on a BC : sin. A :: DE : sin. A, on a aussi, attendu l'identité des rapports, AC : sin. B :: AD : sin. E :: AC — x : sin (B — F) :: AC — x : sin. B cos. F — cos. B sin. F. Mais

$\sin. F = \frac{CD \sin. C}{DF} = \frac{x \sin. C}{\frac{1}{2} BC}$, et par conséquent $\cos. F = \ldots\ldots$ $\sqrt{\left(1 - \frac{x^2 \sin.^2 C}{\frac{1}{4} BC^2}\right)} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \sin.^2 C)}}{\frac{1}{2} BC}$. Donc $AC : \sin. B ::$ $AC - x : \sin. B \times \frac{\sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \sin.^2 C)}}{\frac{1}{2} BC} - \cos. B \times \frac{x \sin. C}{\frac{1}{2} BC}$. Donc aussi $AC : BC \sin. B$, ou (III. 29e), $1 : \sin. A :: AC - x : 2 \sin. B \times \sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \sin.^2 C)} - 2x \sin. C \cos. B$; d'où je tire $AC \sin. A - x \sin. A = 2 \sin. B \sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \sin.^2 C)} - 2x \sin. C \cos. B$, ou encore $2 \sin. B \sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \sin.^2 C)} = AC \sin. A - x(\sin. A - 2 \sin. C \cos. B)$. Mais $\sin. A = \sin. (B + C)$, et $\sin. (B + C) - 2 \sin. C \cos. B = \sin. (B - C)$, (II. 16e). Donc $2 \sin. B \sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \sin^2 C)} = AC \sin. A - x \sin. (B - C)$. Élevant au quarré, et observant que $AC \sin. A = BC \sin. B$, on aura $-4x^2 \sin.^2 B \sin.^2 C = -2x \times AC \sin. A \sin. (B - C) + x^2 \times \sin.^2 (B - C)$; puis, en divisant par x,

$$x = \frac{2 AC \sin. A \sin. (B - C)}{\sin.^2 (B - C) + 4 \sin.^2 B \sin.^2 C}.$$

Ayant trouvé par cette équation le point D, de ce point comme centre, et de l'intervalle $\frac{1}{2}$ BC, on décrira un cercle qui coupera BC en un point F; et la ligne droite tirée par les points D, F, jusqu'à la rencontre de la droite AB prolongée, aura les conditions requises.

Il serait très-facile de déterminer aussi le point E. Car la même équation donnerait la valeur de BE, en changeant seulement AC en AB, et $(B - C)$ en $(C - B)$, comme on peut le reconnaître aisément dans la démonstration qui précède.

Fig. 2 et 3. 601. Passons au calcul des SEGMENS. Nous prévenons que dans un triangle quelconque ABC, nous nommons *base*, selon l'usage, le côté AB sur lequel on abaisse une perpendiculaire CD; et *angle vertical* l'angle C, duquel on abaisse cette perpendiculaire.

602. *Trouver les valeurs des segmens de la base* AB *du triangle* ABC.

Soient *donnés* d'abord *les trois côtés*. Puisque $CD^2 = AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$, il s'ensuit que $AC^2 \backsim BC^2 = AD^2 \backsim BD^2$, ou que $(AC \backsim BC)(AC + BC) = (AD \backsim BD)(AD + BD)$. Si la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, $(AD + BD) =$

AB; si elle tombe en dehors, $(AD \backsim BD) = AB$; ce que nous ne répéterons pas dans les deux solutions suivantes.

Donc, pour les deux cas,

$$AD \stackrel{+}{\smile} BD = \frac{(AC \backsim BC)\ (AC + BC)}{AB}, \text{ ou}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{la somme ou}\\ \text{la différence}\end{matrix}\right\} \text{des segmens} = \frac{\text{som. des deux côtés} \times \text{leur diff.}}{\text{la base}}.$$

603. Dans l'usage de cette formule il n'est nécessaire ni de faire attention au double signe, ni de savoir si la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors (570). La moitié de la valeur donnée par la formule, ajoutée à la moitié de la base ou de l'angle vertical, donnera toujours le plus grand segment, et la différence des deux moitiés le plus petit (548). Cette remarque s'applique aussi aux deux solutions suivantes; et nous en donnerons un exemple (612).

604. Soient *donnés* maintenant *les trois angles et la base* AB.

Par la règle (529) on a $CD = BD \times \text{tang. } B = AD \times \text{tang. } A$. Fig. 2.
Donc $BD : AD :: \text{tang. } A : \text{tang. } B$, et $BD + AD : BD \backsim AD :: \text{sin. } (A + B) : \text{sin. } (A \backsim B)$, (II. 11ᵉ).

Donc en général

$$BD \stackrel{+}{\smile} AD = \frac{AB \times \text{sin. } (A \backsim B)}{\text{sin. } (A + B)}, \text{ ou (III. 84}^e)$$

$$\left.\begin{matrix}\text{la diff. ou}\\ \text{la somme}\end{matrix}\right\} \text{des segmens} = \frac{\text{la base} \times \text{sin. diff. des ang. adjacens}}{\text{sin. de l'angle vertical}}.$$

605. *Trouver les valeurs des segmens de l'angle vertical.*

Soient *donnés l'angle vertical* ACB *et les deux côtés adjacens* AC, BC. On a (530), $CD = AC \times \text{cos. } ACD = BC \times \text{cos. } BCD$; donc $BC : AC :: \text{cos. } ACD : \text{cos. } BCD$; et $BC + AC : BC \backsim AC ::$ (II. 14ᵉ) $\text{cot. } \frac{1}{2}(BCD + ACD) : \text{tang. } \frac{1}{2}(BCD \backsim ACD) ::$ (I. 32ᵉ) $\text{cot. } \frac{1}{2}(BCD \backsim ACD) : \text{tang. } \frac{1}{2}(BCD + ACD)$. Donc en général pour les deux cas de la perpendiculaire située en dedans ou en dehors,

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\, BCD \stackrel{+}{\smile} ACD = \text{cot. } \tfrac{1}{2}\, ACB \times \frac{BC \backsim AC}{BC + AC}, \text{ ou}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} \left\{\begin{matrix}\text{diff. ou}\\ \text{somme}\end{matrix}\right\} \text{des segmens} = \text{cot. } \tfrac{1}{2} \text{ ang. vertical} \times \frac{\text{diff. des côtés adjac.}}{\text{somme de ces côtés}}.$$

606. *Trouver les valeurs des segmens d'un côté, formés par une ligne qui divise également l'angle opposé.*

Fig. 10. Soit BCD = ACD, et soient *donnés* dans le triangle ABC *les angles et le côté divisé* AB; *ou* encore soient *donnés les trois côtés*.

Par la règle (89) on a $CD = \frac{BD \sin. B}{\sin. BCD} = \frac{AD \sin. A}{\sin. ACD}$. Donc BD : AD :: sin. A : sin. B, et BD + AD : BD ∽ AD :: tang. $\frac{1}{2}$ (A + B) : tang. $\frac{1}{2}$ (A ∽ B), (II. 13ᵉ). Donc

$$BD \backsim AD = \frac{AB \text{ tang. } \frac{1}{2}(A \backsim B)}{\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{AB(BC \backsim AC)}{BC + AC}, (573); \text{ ou}$$

$$\text{diff. des segmens} = \frac{\text{côté divisé} \times \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ diff. des ang. adjacens}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ somme de ces angles}};$$

$$\text{diff. des segmens} = \frac{\text{côté divisé} \times \text{diff. des deux autres côtés}}{\text{somme de ces deux côtes}}.$$

607. Puisque (89), sin. A : sin. B :: BC : AC, on a donc BD : AD :: BC : AC, (606). Donc *les segmens d'un côté, formés par une ligne droite qui divise également l'angle opposé, sont proportionnels aux côtés qui leur sont adjacens.*

608. *Trouver les valeurs des segmens d'un angle, formés par une ligne qui partage également le côté opposé.*

Supposons AD = BD, et soient *donnés l'angle divisé* ACB *et les deux côtés adjacens* AC, BC.

On a (89), $CD = \frac{BD \sin. B}{\sin. BCD} = \frac{AD \sin. A}{\sin. ACD}$; et par conséquent sin. BCD : sin. ACD :: sin. B : sin. A :: AC : BC. Donc aussi AC + BC : AC ∽ BC :: tang. $\frac{1}{2}$ (BCD + ACD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BCD ∽ ACD), (II. 13ᵉ); et

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(BCD \backsim ACD) = \text{tang. } \frac{1}{2} ACB \times \frac{AC \backsim BC}{AC + BC}; \text{ ou}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ diff. des segmens} = \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ ang. divisé} \times \frac{\text{diff. des côtés adjac.}}{\text{somme de ces côtés}}.$$

609. *Résoudre un triangle isoscèle.*

Le triangle isoscèle se résout comme les triangles rectangles, au moyen d'une perpendiculaire qui partage en deux parties égales la base et l'angle vertical. Les deux analogies suivantes donnent la solution de tous les cas.

Un côté est à la moitié de la base, comme le rayon est au cosinus d'un angle à la base, ou comme le rayon est au sinus de la moitié de l'angle vertical.

Il est facile de vérifier ces proportions sur une figure avec le secours de la table (537).

610. Les exemples suivans pourront diriger pour l'usage des formules que nous avons données dans ce Chapitre.

Soit AC une distance de 585 pieds 5po. 6lig., AB une autre distance de 55pi. 3po. 4lig.; soit aussi connu CAB de 143° 36', et soit BC une distance cherchée. Fig. 3.

Ce cas est celui de la formule (IV. 3e). Pour prendre les logarithmes des deux distances connues, je convertis d'abord ces distances en lignes, et j'ai AC = 84306 lignes, et AB = 7960 lig. Voici le calcul de la formule.

$$\log. AC = 4,9258585$$
$$\log. AB = 3,9009131$$
$$\text{somme} \quad 8,8267716$$
$$\text{demi-somme} \quad 4,4133858$$
$$\log. 2 = 0,3010300$$
$$\log. \sin. \tfrac{1}{2} CAB = \log. \sin. 71° 48' = 9,9777108$$
$$\text{compl.} \log. (AC - AB) = \text{compl.} \log. 76346 = 5,1172137$$
$$\text{somme ou } \log. \text{tang. } a = 9,8093403$$
$$(429), \text{ compl.} \log. \cos. a = 0,0754710$$
$$\log. (AC - AB) \text{ pris de son compl. ci-dessus} = 4,8827863$$
$$\text{somme ou } \log. BC = 4,9582573$$

Et par conséquent BC = 90836 lig.

On résout ordinairement ce problème, en cherchant d'abord les deux angles inconnus, par la formule (IV. 4e), et ensuite le côté par la formule (IV. 1e). On a alors huit log. à chercher, et sept seulement par notre méthode, attendu que l'usage continuel que l'on fait du logarithme de 2 le fixe nécessairement dans la mémoire.

611. Employons actuellement les mêmes valeurs des trois côtés, pour donner un exemple de la formule (IV. 5); et cherchons un angle, par exemple B. Voici le calcul: nous y employons 90835,86 pour la valeur de BC, valeur prise ci-dessus, mais avec toute la

précision que peuvent donner les logarithmes, afin d'avoir l'angle B aussi exactement que nous l'aurions eu par la formule (IV. 4e) avec les données de l'article précédent.

log $\frac{1}{2}$ somme des trois côtés = log. 91550,93 = 4,9616627
log. ($\frac{1}{2}$ somme — AC) = log. 7244,93 = 3,8600342
compl. log. AB = 6,0990869
compl. log. BC = 5,0417427

somme ou log. cos.² $\frac{1}{2}$ B = 9,9625265
demi-somme ou log. cos. $\frac{1}{2}$ B = 9,9812632

Ce logarithme répond à cos. 16° 42′ 34″ $\frac{1}{2}$. Donc l'angle cherché B = 33° 25′ 9″. Le lecteur pourra s'exercer à le chercher par les formules (IV. 4e et 6e). On observera que l'usage du complément arithmétique (420) a dispensé des soustractions de log. AB et de log. BC.

Fig. 11. 612. On demande la largeur AD d'un fleuve qui passe au pied d'une tour CD. Sur le bord A on prendra, avec des instrumens, l'angle DAC, que je suppose de 27° 42′; on passera à un autre point quelconque B, dans le même plan vertical que A et C; on relevera de même l'angle B, que je suppose de 16° 23′, et on mesurera la distance horizontale AB, que je suppose de 125 mètres. Ces données suffisent pour trouver la valeur de AD, qui est le plus petit segment de la base AB du triangle ABC, prolongée jusqu'à la perpendiculaire CD. Voici le calcul de la formule (604); pour plus de commodité, je ne chercherai que la moitié de sa valeur; ce qu'on fera également pour toutes les formules semblables.

log. sin. (CAB — B) = log. sin. 135° 55′ = 9,842424
compl. log. sin. (CAB + B) = compl. log. sin. 168° 41′ = 0,707232
log. $\frac{1}{2}$ AB = log. 62,5 = 1,795880

somme ou log. $\frac{1}{2}$ (BD ♀ AD) = 2,345536
Donc $\frac{1}{2}$ (BD ♀ AD) = 221,6
et retranchant $\frac{1}{2}$ AB, on 62,5

on a (548), pour le petit segment, 159,1.

Donc la largeur cherchée ou AD = 159 mètres à très-peu-près.

613. Je crois devoir placer ici un théorème et deux problèmes relatifs aux figures inscrites dans le cercle. Je ne les crois pas inutiles.

Théorème. *Le rectangle des diagonales du quadrilatère inscrit dans un cercle est égal aux rectangles des côtés opposés.*

Nommons M, N, P, Q les arcs AMB, BNC, CPD, DQA. Fig. 43.
Nous avons (31), $AC \times BD = 2 \sin \frac{1}{2}(M + N) \times 2 \sin \frac{1}{2}(M + Q) = 2 \cos \frac{1}{2}(N - Q) - 2 \cos \left(M + \frac{1}{2}(N + Q)\right)$, (II. 17ᵉ). Mais $\frac{1}{2}(N + Q) = 180° - \frac{1}{2}(M + P)$. Donc $\cos \left(M + \frac{1}{2}(N + Q)\right) = -\cos \frac{1}{2}(M - P)$, (66). Donc $AC \times BD = 2 \cos \frac{1}{2}(N - Q) + 2 \cos \frac{1}{2}(M - P) = 2 \cos \frac{1}{2}(N + Q) + 4 \sin \frac{1}{2} N \sin \frac{1}{2} Q + 2 \cos \frac{1}{2}(M + P) + 4 \sin \frac{1}{2} M \sin \frac{1}{2} P$, en vertu de la formule citée. Et comme $\cos \frac{1}{2}(N + Q) = -\cos \frac{1}{2}(M + P)$, il reste $AC \times BD = 4 \sin \frac{1}{2} N \sin \frac{1}{2} Q + 4 \sin \frac{1}{2} M \sin \frac{1}{2} P$, ou

$$AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD.$$

614. Problème. *Connaissant les côtés du quadrilatère inscrit dans un cercle, trouver l'expression analytique de l'une de ses diagonales.*

On a (III. 16ᵉ), $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos ABC = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC \cos ADC = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC \times \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \times CD}$; d'où l'on tire $AC^2 (AD \times CD + AB \times BC) = AD \times CD (AB^2 + BC^2) + AB \times BC (AD^2 + CD^2)$; ou

$$AC = \sqrt{\frac{(AB \times AD + BC \times CD)(AB \times CD + AD \times BC)}{AB \times BC + AD \times CD}}.$$

615. Problème. *Étant données trois lignes droites*, AB, BC, Fig. 44.
CD, *déterminer le rayon du cercle dans lequel elles seraient les cordes de trois arcs dont la somme serait de* 180°.

Soit ABCD le demi-cercle dans lequel les trois lignes données rempliraient la condition imposée; soient M, N, S les arcs soustendus, E le centre; et faisons $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = x$; on aura, en imaginant une perpendiculaire du centre E sur AB, (530), $x : \frac{1}{2} a :: 1 : \sin \frac{1}{2} M = \frac{a}{2x}$. On aura de même $\sin \frac{1}{2} N = \frac{b}{2x}$, et $\sin \frac{1}{2} S = \frac{c}{2x}$. Mais $\sin \frac{1}{2} S = \sin \frac{1}{2}(180° - M - N)$

$= \cos. \frac{1}{2}(M + N) = \cos. \frac{1}{2} M \cos. \frac{1}{2} N - \sin. \frac{1}{2} M \sin. \frac{1}{2} N = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right)} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{4x^2}\right)} - \frac{ab}{4x^2} = \frac{c}{2x}$. Donc $\left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{4x^2}\right) = \left(\frac{ab}{4x^2} + \frac{c}{2x}\right)^2$. D'où l'on déduit

$$x^3 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)\, x - \frac{1}{4} abc = 0\,;$$

équation à laquelle Newton est aussi parvenu par d'autres voies, (*Arithm. univ.* Sect. 4, cap. 1).

CHAPITRE XII.

Des analogies différentielles des triangles rectilignes.

616. DANS les deux chapitres précédens, nous avons donné les solutions d'un triangle rectiligne. Considérons à présent deux triangles qui ont deux parties communes, ou, ce qui revient au même, un triangle qui, conservant deux parties constantes, éprouve un changement dans les quatre autres. Nous chercherons à déterminer par des analogies, qu'on nomme alors *analogies différentielles*, le rapport entre le changement d'une partie du triangle et le changement d'une autre partie; et cette recherche appliquée aux cas où une seule partie est constante, et où même aucune ne l'est, complétera les solutions de tous les problèmes déterminés que peut résoudre la Trigonométrie rectiligne. Je traiterai ce sujet d'une manière que je crois absolument neuve; je construirai les analogies dans la plus grande généralité, de sorte qu'elles soient applicables rigoureusement à toutes sortes de variations, de quelque grandeur qu'elles soient. Je nommerai ces analogies *différentielles finies*; j'en déduirai celles qu'on donne communément, qui ne sont exactes que pour les variations infiniment petites, et qui dé-

terminent aussi, mais par approximation, les variations finies et très-petites ; je nommerai *infinitésimales* ces dernières analogies.

617. Soient deux triangles ABC, ABD, ayant le côté AB et Fig. 12.
l'angle A communs ; ou soit un triangle ABC qui se convertisse en ABD, de sorte qu'*un côté* AB *et un angle adjacent* A *restent constans.*

Le côté AC, en devenant AD, augmente d'une quantité CD, que nous appellerons δAC, à la manière du calcul différentiel. On aura de même $BD = BC + \delta BC$. L'angle B, en devenant ABD, augmente aussi d'une quantité CBD, que nous appellerons δB ; et comme CBD est de même la diminution de l'angle C, qui devient D, puisqu'on sait que l'angle extérieur $C = D + CBD$, on aura $\delta B = -\delta C$.

618. On a déjà vu plus d'une fois dans ce Traité une équation entre deux membres de signes différens. En analyse, une quantité positive égalée à une négative, serait une absurdité. Mais le sens implicite d'une pareille notation est que, dans l'application de l'équation aux cas particuliers, on aura toujours changement de signe pour l'un des membres. Ainsi, quand nous avons trouvé (121), $\cos.(180° - a) = -\cos. a$, cela est très-exact, parce que toute valeur de a rendant négatif un des deux cosinus, (73), les deux membres deviendront ou tous deux négatifs, ou tous deux positifs, ce qui revient au même.

619. Actuellement, le triangle BCD donne (89), CD : sin. CBD :: BC : sin. D :: BD : sin. C. Donc, en substituant les dénominations adoptées, nous aurons (75)

$$\delta AC : \left\{ \begin{matrix} \sin. \delta B \\ ou - \sin. \delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \sin.(C + \delta C) :: BC + \delta BC : \sin. C.$$

620. J'ai fait $D = C + \delta C$, parce que, dans l'usage de toute formule différentielle, il faut donner aux *différences* le signe qui convient selon les cas, afin que les équations soient construites avec exactitude et entre membres de même signe (618). Par exemple, si l'angle C diminue, comme le représente cette fois la figure, on doit introduire avec le signe négatif, dans l'analogie, les valeurs de δC et de sin. δC (75) : elle devient alors δAC : sin. δC :: BC : sin. $(C - \delta C)$; supposant déjà substituées les

valeurs numériques de trois termes, pour en conclure la valeur du quatrième.

621. Pour faire ressortir d'autant plus la vérité de ces assertions, cherchons la première analogie (619) par le moyen du calcul différentiel. Pour cela, il faut choisir dans la table III une formule qui soit composée des parties constantes du triangle, et de variables dont les variations se trouvent dans le premier rapport de l'analogie. Mais pour obtenir des expressions différentielles finies, il faut de plus une autre condition, c'est que dans la formule sans fractions, aucun terme ne contienne plus d'une variable (204). Or la formule 14ᵉ, $AC = AB \cos. A + AB \sin. A \cot. C$, convient à notre but, puisque différentiée (186), elle donne $\delta AC = AB \sin. A \delta \cot. C = -\frac{AB \sin. A \sin. \delta C}{\sin. C \sin. (C + \delta C)}$ (II. 34ᵉ) $= -\frac{BC \sin. \delta C}{\sin. (C + \delta C)}$, (III. 20ᵉ).

622. Si l'on suppose que les variations soient infiniment petites, les proportions (619) deviendront (277, 193)

$$\delta AC : \delta B \text{ ou } - \delta C :: BC : \sin. C.$$

Et, à l'exception du signe négatif que l'on omet, telle est la forme ordinaire sous laquelle on donne cette analogie.

623. Avant de construire d'autres analogies différentielles, nous allons donner un exemple qui fera pressentir l'utilité de ces formules; il nous servira de plus à reconnaître les limites entre lesquelles on peut, sans erreur dans le calcul, faire usage des analogies infinitésimales, lorsque les variations sont petites, mais cependant finies et non pas infiniment petites..

Fig. 13. 624. Soit AC une hauteur à mesurer par la méthode (540). A quelle distance doit se placer l'Observateur, pour que l'erreur que peut commettre l'instrument dans la mesure de l'angle ABC, produise la moindre erreur possible dans le calcul de la hauteur?

Supposons que l'erreur dans la mesure soit en *plus*, que l'instrument donne, par exemple, ABD au lieu de ABC; la hauteur calculée sera AD au lieu de AC. On voit par la figure que ces erreurs n'influent ni sur le côté AB, ni sur l'angle A, qui demeurent constans. Appelant donc δB l'erreur dans l'angle observé, et δAC l'erreur qui en résulte dans le calcul de la hauteur, la première

analogie (619) donne $\delta AC = \sin. \delta B \times \frac{BC}{\sin.(C + \delta C)}$. Quelle que soit l'erreur δB, le *minimum* de la correspondante δAC résultera du *minimum* de la valeur du facteur $\frac{BC}{\sin.(C + \delta C)}$. Pour déterminer ce dernier *minimum*, il est nécessaire d'éliminer une des quantités BC, C, dépendantes entre elles de la situation cherchée du point B. Or ayant dans ce cas $A = 90°$, on a aussi (537, 8°), $BC = \frac{AC}{\cos C}$. Substituez cette valeur ; le facteur devient $\frac{AC}{\sin.(C + \delta C)\cos. C}$, fraction dans laquelle AC est une quantité qui ne varie pas, lorsque la position du point B varie. Par conséquent le *minimum* de la valeur de la dernière fraction correspond au *maximum* de son dénominateur. Mais il faut observer, 1° que l'angle B peut être donné, par les instrumens, ou plus grand ou plus petit que sa juste valeur ; pour satisfaire aux deux cas, on doit donc employer $\sin.(C \mp \delta C)$ au lieu de $\sin.(C + \delta C)$; 2°. que sin. C est à très-peu-près moyen arithmétique entre $\sin.(C - \delta C)$ et $\sin.(C + \delta C)$, quand δC n'excède pas quelques minutes, comme nous le supposons pour les erreurs que peuvent donner des instrumens, même grossiers. On embrassera donc les deux cas, en adoptant le dénominateur moyen sin. C cos. C, ou $\frac{1}{2}\sin. 2C$, (I. 6°), tel que le donnerait l'analogie infinitésimale (622). Or la plus grande valeur de sin. 2C a lieu lorsque $C = 45°$. L'observateur se placera donc, autant qu'il le pourra, à une distance $AB = AC$.

625. Appliquons maintenant cette solution à un exemple en nombres.

Supposons que l'instrument puisse commettre une erreur de Fig. 13.
$30' = \delta B$; que B ait été observé de 45°, et que la distance mesurée AB soit de 83 mètres ; dans ce cas, $AB = AC$, et $\sin. 2C = 1$. Donc $\delta AC = \frac{2AC \times \delta B}{\sin. 2C} = 2 \times 83 \times 30'$. L'arc de 30' se prendra dans la table (AA). Si l'on veut son logarithme, nous avons préparé (418) des moyens pour l'obtenir promptement, sans recourir à cette table. Quand il est nécessaire de réduire les minutes, et même les degrés, en secondes, cette opération se trouve faite

ordinairement en tête de chaque page dans les tables des logarithmes des nombres. Ici nous n'en avons pas besoin. Voici le calcul.

$$\begin{aligned} \log.\,(2 \times 83 = 166) &= 2,220108 \\ \log.\,30 &= 1,477121 \\ (416),\ \log.\,1' &= 6,463726 \\ \hline \text{somme ou } \log.\ \delta AC &= 0,160955 \end{aligned}$$

Le nombre correspondant à ce logarithme est 1,4486; une erreur de 30′ dans la mesure de l'angle B, produit donc sur la hauteur cherchée AC une erreur de 1,4486 mètres.

626. Ce résultat ne peut pas être absolument exact, parce qu'un arc de 30′ n est pas infiniment petit. En employant la formule différentielle finie, et supposant que l'angle B ait été relevé plus grand qu'il n'est en effet, ainsi que le donne la figure, auquel cas δC doit avoir le signe négatif, on a $\delta AC = \frac{AC \sin. \delta B}{\sin. (C - \delta C) \cos. C}$ $= \frac{83 \times \sin. 30'}{\sin. 44° 30' \cos. 45°}$; et faisant le calcul, on trouve log. $\delta AC =$ 0,164773, et $\delta AC = 1,4614$. En comparant ce résultat avec le précédent, on voit que l'erreur de la formule infinitésimale est de 0,0128, ou de $\frac{1^{m}}{80}$ à très-peu-près; ce qui ne mérite aucune attention; mais comme cette erreur peut être plus grande dans d'autres cas, il importe de savoir quand elle peut se négliger, et quand au contraire il faut avoir recours aux différentielles finies.

627. En général l'erreur dont il s'agit dépend de deux causes. La première et la plus faible serait d'avoir employé δB au lieu de sin. δB : mais, de 0° à 1°, il est aisé de voir, en comparant les logarithmes des sinus à ceux des arcs, que la différence est insensible dans les calculs ordinaires, surtout si l'on cherche une petite quantité. Par exemple, la différence de log. 30′ à log. sin. 30′, n'est que de 0,000006. Or pour le cas que nous venons de calculer (625), cette quantité de plus ou de moins dans le log. de δAC, n'altère en rien la valeur 1,4486 de δAC. Prenons donc pour règle générale dans les analogies différentielles, qu'on peut employer sans scrupule δA, δB, etc., au lieu de sin. δA,

sin. $\mathfrak{d}$B, etc., toutes les fois que l'arc $\mathfrak{d}$A, l'arc $\mathfrak{d}$B, etc. ne sera pas plus grand que d'un degré.

628. Il est clair que $\mathfrak{d}$A pourra même aller jusqu'à 2°, lorsque dans les formules infinitésimales, on aura $\frac{1}{2}$ $\mathfrak{d}$A au lieu de sin. $\frac{1}{2}$ $\mathfrak{d}$A. Mais quand on aura $\frac{1}{2}$ $\mathfrak{d}$A au lieu de tang. $\frac{1}{2}$ $\mathfrak{d}$A, et quand on aura 1 au lieu de cos. $\frac{1}{2}$ $\mathfrak{d}$A, il faudra, pour renfermer l'erreur dans les mêmes limites, que $\mathfrak{d}$A soit, dans le premier cas, moindre que de 1° 30′, et que dans le second il ne soit pas plus grand que de 1° 10′; ce qu'il est facile de comprendre, en examinant les tables.

629. Une seconde cause d'erreur, et la seule qui ait influé dans le calcul (625), vient de ce que nous avons employé 2 au lieu de $\frac{1}{\sin.\ 44°\ 30'\ \cos\ 45°}$; ce qui revient au même que d'avoir employé, dans le dénominateur, cos. 45° au lieu de sin. 44° 30′ = cos. 45° 30′, puisque cos.² 45° = $\frac{1}{2}$, (80). Il suffit d'ouvrir les tables pour voir que la différence d'un cosinus à un autre pour un intervalle $\mathfrak{d}$B, varie beaucoup à raison des différentes grandeurs de B. Soit, par exemple, $\mathfrak{d}$B = 30′; si B = 10°, on a cos. 10° — cos. 10° 30′ = 0,0015528. Mais si B = 80°, on a cos. 80° — cos. 80° 30′ = 0,0086006. Donc en général lorsque dans les analogies différentielles on emploie cos. A au lieu de cos. (A ± $\mathfrak{d}$A), l'erreur est d'autant plus grande que A approche plus de 90°. On voit de même par les tables, que si l'on emploie 1°. sin. A au lieu de sin. (A ± $\mathfrak{d}$A), 2°. tang. A au lieu de tang. (A ± $\mathfrak{d}$A), 3°. cot. A au lieu de cot. (A ± $\mathfrak{d}$A); l'erreur est d'autant plus grande, dans le premier et le troisième cas, que A est plus petit; et dans le second cas, d'autant plus que A approche davantage de 90°.

Au surplus, toutes les fois qu'on jugera l'erreur telle qu'on ne croira pas devoir la négliger, les formules différentielles finies que je donne, serviront à corriger le résultat des formules infinitésimales, ou à faire immédiatement les calculs avec une précision rigoureuse. Il sera bien de faire attention à l'erreur provenant de la seconde cause, lorsque $\mathfrak{d}$A ou $\frac{1}{2}$ $\mathfrak{d}$A ne sera pas moindre que de 30′.

630. Les logarithmes des arcs de 1″, de 1′, de 1°, (415 à 417), ne sont que les complémens arithmétiques du nombre de secondes

ou de minutes ou de degrés, contenu dans l'arc égal en longueur au rayon. En effet nommons, par exemple, R″ ce nombre de secondes; nous aurons (418), $R'' \times \text{arc } 1'' = \text{arc } R'' = R = 1$; et par conséquent l'arc de $1'' = \frac{1}{R''}$. On trouve de même que l'arc de $1' = \frac{1}{R'}$, et que l'arc de $1° = \frac{1}{R°}$.

631. Donc log. R″, log. R′, log. R° ne sont que les complémens arithmétiques des logarithmes (415 à 417). Nous les donnons ici, l'usage surtout de log. R″ et de log. $\frac{1}{R''}$ étant continuel dans le calcul des analogies infinitésimales.

log. R″ = 5, 31442 51331 76459 48047;
log. R′ = 3, 53627 38827 92815 84796;
log. R° = 1, 75812 26324 09172 21545.

Le nombre correspondant au premier logarithme est 206264,8 +. Tel est le nombre des secondes contenues dans l'arc égal au rayon; par conséquent cet arc est de 57° 17′ 44″ 48‴, etc. Il est facile de le tirer de la table (AA), et de pousser plus loin l'approximation.

632. Comme il est important de ne pas oublier d'employer R″ dans le calcul des analogies différentielles infinitésimales, nous l'insérerons dans toutes ces analogies, même dans celle qui a été donnée (622), que nous répéterons, ainsi que l'analogie (619), pour les rapprocher de toutes celles que nous allons trouver.

Fig. 12. (619), $\partial AC : \left\{ \begin{matrix} \sin. \partial B \\ ou - \sin. \partial C \end{matrix} \right\} :: BC : \sin.(C + \partial C) :: BC + \partial BC : \sin. C$

(622), $\partial AC : \frac{\partial B}{R''} \; ou \; - \frac{\partial C}{R''} :: BC : \sin. C$.

633. Il est clair que par cette dernière analogie, quand ∂B sera la chose cherchée, on aura $\partial B = \frac{\partial AC \times \sin. C \times R''}{BC}$, et qu'ainsi on aura ∂B, ∂C, etc. en minutes et secondes, par les tables des log. des nombres (625). Il ne doit plus rester actuellement de difficulté sur l'usage de la quantité R″; on pourra faire l'épreuve de ce que nous venons d'en dire, en traitant ∂B comme l'inconnue dans l'exemple (625). Poursuivons la formation des analogies différentielles.

634. Le triangle BCD donne (89), BD : BC :: sin. BCD : sin. D. D'où l'on tire, en procédant comme on a fait (573), cot. $\frac{1}{2}$ (BCD — D) : tang. $\frac{1}{2}$ CBD :: BD + BC : BD — BC. En substituant les dénominations adoptées (617), et observant que cot. $\frac{1}{2}$ (BCD — D) = cot. $\frac{1}{2}$ (180° — C — D) = tang. $\frac{1}{2}$ (C+D) = tang. (C + $\frac{1}{2}$ ∂C), (620), on aura tang. (C + $\frac{1}{2}$ ∂C) : tang. $\frac{1}{2}$ ∂B *ou* (75) — tang. $\frac{1}{2}$ ∂C :: 2BC + ∂BC : ∂BC, et par conséquent Fig. 12.

$$\tfrac{1}{2}\,\partial BC : \left\{\begin{matrix} \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial B \\ ou - \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial C \end{matrix}\right\} :: BC + \tfrac{1}{2}\,\partial BC : \text{tang.}\,(C + \tfrac{1}{2}\,\partial C).$$

635. Camerer ayant lu cette analogie dans la première édition de ce Traité, a suggéré (*Journ. Astron. de Bode*, Berlin, 1793) de la transformer en une autre semblable, qui est en effet plus commode quand ∂BC est la quantité inconnue. En transposant convenablement, notre analogie devient BC + $\frac{1}{2}$ ∂BC : $\frac{1}{2}$ ∂BC :: tang. (C + $\frac{1}{2}$ ∂C) : — tang. $\frac{1}{2}$ ∂C. Puis, (19), BC : $\frac{1}{2}$ ∂BC :: tang. (C + $\frac{1}{2}$ ∂C) + tang. $\frac{1}{2}$ ∂C : — tang. $\frac{1}{2}$ ∂C :: (II. 21e) $\frac{\text{sin.}\,(C + \partial C)}{\text{cos.}\,(C + \frac{1}{2}\partial C)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}\partial C}$: — tang. $\frac{1}{2}$ ∂C :: $\frac{\text{sin.}\,(C + \partial C)}{\text{cos.}\,(C + \frac{1}{2}\partial C)}$: — sin. $\frac{1}{2}$ ∂C, (I. 1e). Donc

$$\tfrac{1}{2}\,\partial BC : \left\{\begin{matrix} \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial B \\ ou - \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial C \end{matrix}\right\} :: BC : \frac{\text{sin.}\,(C + \partial C)}{\text{cos.}\,(C + \frac{1}{2}\partial C)}.$$

636. De chacune des deux précédentes formules rigoureuses, on déduit également l'infinitésimale ci-après, en substituant les arcs infiniment petits à leurs sinus et tangentes (277, 284), et supprimant les *différences* dans le dernier rapport, comme on l'a fait (622).

$$\partial BC : \frac{\partial B}{R''}\ ou - \frac{\partial C}{R''} :: BC : \text{tang.}\ C.$$

Dans les trois formules qui précèdent, ainsi que dans les deux suivantes, AB et A restent constans, comme on l'a supposé (617).

637. Le triangle BCD donne (585), sin. $\frac{1}{2}$ (BCD — D) = cos. $\frac{1}{2}$ CBD × $\frac{BD - BC}{CD}$. Mais sin. $\frac{1}{2}$ (BCD—D) = cos. (C + $\frac{1}{2}$ ∂C), (634), et cos. $\frac{1}{2}$ CBD = cos. $\frac{1}{2}$ ∂B = cos. $\frac{1}{2}$ ∂C, (75). Donc cos. (C + $\frac{1}{2}$ ∂C) = cos. $\frac{1}{2}$ ∂B × $\frac{\partial BC}{\partial AC}$. Et par conséquent

$$\partial AC : \partial BC :: \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial C : \text{cos.}\,(C + \tfrac{1}{2}\,\partial C).$$

638. D'où il suit qu'on aura pour l'infinitésimale, (289) ;

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos. C.$$

639. On peut observer dans les analogies précédentes (634 à 638), que quand l'angle C est obtus, ou plus rigoureusement parlant, lorsqu'on a $(C \pm \frac{1}{2}\delta C) > 90°$, la tangente et le cosinus de cet angle étant négatifs (73), BC alors diminue, tandis que AC et B augmentent, ou *vice versâ*. Cela est facile à reconnaître par une figure. Mais attendu l'application que j'ai faite des signes convenables aux différentielles dans mes analogies, si l'on observe de plus les règles (73), on n'aura besoin ni de réflexion ni d'une figure qui représente exactement l'espèce de chaque angle.

640. Prenons maintenant pour *quantités constantes un angle et le côté opposé*.

Fig. 14. Si le triangle ABC se convertit en ADE, de manière qu'on ait DE=BC, A et BC seront les quantités constantes; et comme la somme des angles d'un triangle rectiligne est toujours constante, on aura $\delta C = -\delta B$.

641. Cela posé, puisque (89), AB sin. A = BC sin. C, en différentiant (186, 212), on aura $\delta AB \sin. A = BC\, 2 \sin \frac{1}{2}\delta C \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Mais sin. A : BC :: sin. C : AB. Donc $\delta AB \sin. C = AB\, 2 \sin. \frac{1}{2}\delta C \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$, et par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\delta AB : \sin.\tfrac{1}{2}\delta C \text{ ou } -\sin.\tfrac{1}{2}\delta B :: AB : \frac{\sin. C}{\cos.(C+\frac{1}{2}\delta C)}.$$

642. Donc on aura pour l'infinitésimale

$$\delta AB : \frac{\delta C}{R''} \text{ ou } \frac{-\delta B}{R''} :: AB : \text{tang. } C.$$

643. On a aussi AC sin. A = BC sin. B. En différentiant, et donnant aux différentielles dans le premier rapport les signes convenables, conformément à la figure, on trouvera de la même manière

$$-\tfrac{1}{2}\delta AC : -\sin.\tfrac{1}{2}\delta B \text{ ou } +\sin.\tfrac{1}{2}\delta C :: AC : \frac{\sin. B}{\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)}, \text{ et}$$

644. $$-\delta AC : -\frac{\delta B}{R''} \text{ ou } +\frac{\delta C}{R''} :: AC : \text{tang. } B.$$

645. Maintenant si l'on divise l'une par l'autre les analogies

différentielles finies (641, 643), on aura $\frac{\partial\,AB}{-\partial\,AC} : 1 :: \frac{AB}{AC} : \frac{\sin. C \cos. (B + \frac{1}{2}\partial B)}{\sin. B \cos. (C + \frac{1}{2}\partial C)} :: 1 : \frac{\cos. (B + \frac{1}{2}\partial B)}{\cos. (C + \frac{1}{2}\partial C)}$, (89); et par conséquent

$$\partial\,AB : -\partial\,AC :: \cos. (C + \tfrac{1}{2}\partial C) : \cos. (B + \tfrac{1}{2}\partial B).$$

646. Donc on aura pour l'infinitésimale,

$$\partial\,AB : -\partial\,AC :: \cos. C : \cos. B.$$

647. Si $A = 90° = D$, en développant l'expression $\cos. (C + \frac{1}{2}\partial C)$ dans l'analogie (641), on a $\partial\,AB = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}\partial C \times AB}{\sin. C}(\cos. C \cos. \frac{1}{2}\partial G - \sin. C \sin. \frac{1}{2}\partial C) = (\text{I}. 6^e)\ AB \sin. \partial C \cot. C - AB \times 2 \sin.^2 \frac{1}{2}\partial C = AC \sin. \partial C - AB + AB \cos. \partial C$, (537, 3e), (I. 7e). Or $AB + \partial\,AB = BD$, et $\partial C = ACD = -ABD$; donc Fig. 15.

$$BD = AC \sin. ACD + AB \cos. ACD.$$

648. En opérant de même sur l'analogie (643), et considérant que $\sin. ABD = -\sin. ACD$, on trouvera

$$CD = AC \cos. ACD - AB \sin. ACD.$$

649. Si l'angle C, au lieu de croître, diminuait, comme ABC, il suffirait alors de changer le signe (75) de sin. ACD dans les deux formules précédentes.

650. Donc, deux triangles rectangles ayant l'hypoténuse commune, si on connaît la différence des angles ayant même sommet, et de plus deux côtés dans l'un de ces triangles, ces mêmes équations que nous venons de donner feront trouver les deux côtés de l'autre triangle. Ce cas se rencontre fréquemment dans l'Astronomie.

651. Mais comme il arrive aussi quelquefois qu'au lieu de la différence des angles on connaît leur somme ACD, il est à propos de faire voir qu'alors ces deux formules donnent encore les quantités cherchées, en faisant seulement un changement de signe dans le dernier terme. Fig. 16.

En effet (537, 4e), $BC = \frac{AB}{\sin. BCA} = \frac{BD}{\sin. BCD}$. Donc $AB : BD :: \sin. BCA : \sin.(ACD - BCA) :: \sin. BCA : \sin. ACD \times \cos. BCA -$

Fig. 16. sin. BCA cos. ACD :: 1 : sin. ACD cot. BCA — cos. ACD, (17). Donc BD = AB sin. ACD cot. BCA — AB × cos. ACD. Mais (537, 17e), cot. BCA $= \frac{AC}{AB}$. Donc

$$BD = AC \sin. ACD - AB \cos. ACD.$$

652. Par la même méthode, en partant des équations BC = $\frac{AC}{\cos.\ BCA} = \frac{CD}{\cos.\ BCD}$, on trouvera

$$CD = AC \cos. ACD + AB \sin. ACD.$$

653. Soient maintenant *deux côtés constans*, et soient ces Fig. 17. côtés AB, AC, ensorte que le triangle ABC se convertissant en ABD, AD soit égal à AC.

On a (89), AC : AB :: sin. B : sin. C :: sin. ABD : sin. D. Or on voit par la dernière proportion, que si ABD est > B, on doit avoir aussi D > C, pourvu que tous ces angles soient aigus, comme nous le supposons toujours (570), nonobstant même ce que la figure pourrait représenter, (541). Nous ferons donc $D = C + \vartheta C$, puisque la figure suppose $ABD = B + \vartheta B$.

654. On a donc $\sin.(B + \vartheta B) : \sin. B :: \sin.(C + \vartheta C) : \sin. C$. Donc aussi (19), (II. 13e), $\text{tang.}\frac{1}{2}(B + \vartheta B + B) : \text{tang.}\frac{1}{2}(B + \vartheta B - B) :: \text{tang.}\frac{1}{2}(C + \vartheta C + C) : \text{tang.}\frac{1}{2}(C + \vartheta C - C)$, et, en réduisant et transposant,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\vartheta B : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\vartheta C :: \text{tang.}(B + \tfrac{1}{2}\vartheta B) : \text{tang.}(C + \tfrac{1}{2}\vartheta C).$$

655. On aura donc pour l'infinitésimale

$$\vartheta B : \vartheta C :: \text{tang.} B : \text{tang.} C.$$

Ici le diviseur R' est inutile, parce qu'il diviserait également ϑB et ϑC.

656. Par la méthode employée (634), on tire du triangle BCD, $\cot.\frac{1}{2}(BCD - BDC) = \text{tang.}\frac{1}{2}CBD \times \frac{BD + BC}{BD - BC} = \text{tang.}\frac{1}{2}\vartheta B \times \frac{2\,BC + \vartheta BC}{\vartheta\,BC}$. Mais $BCD - BDC = (ACD - C) - (D + ADC) = -(C + D)$, parce que le triangle ACD est isoscèle. Donc $\cot.\frac{1}{2}(-D - C)$, ou $-\cot.(C + \frac{1}{2}\vartheta C) = \text{tang.}\frac{1}{2}\vartheta B \times$

$\frac{2(BC+\frac{1}{2}\partial BC)}{\partial BC}$; donc aussi

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\partial B : -\tfrac{1}{2}\partial BC :: \text{cot.}(C+\tfrac{1}{2}\partial C) : BC+\tfrac{1}{2}\partial BC.,$$ et

657. $$\frac{\partial B}{R''} : -\partial BC :: \text{cot.}\,C : BC.$$

658. Divisons l'une par l'autre les analogies (654, 656), et nous aurons

$$\text{taug.}\,\tfrac{1}{2}\partial C : -\tfrac{1}{2}\partial BC :: \text{cot.}(B+\tfrac{1}{2}\partial B) : BC+\tfrac{1}{2}\partial BC;$$

et par conséquent

659. $$\frac{\partial C}{R''} : -\partial BC :: \text{cot.}\,B : BC.$$

660. Dans le triangle BCD on a, (586), cos. $\frac{1}{2}(BDC \backsim BCD) = \text{sin.}\,\frac{1}{2}\,CBD \times \frac{BC+BD}{CD} = \text{sin.}\,\frac{1}{2}\,\partial B \times \frac{2(BC+\frac{1}{2}\partial BC)}{CD}$. Or (609), $\frac{1}{2}\,CD = AC\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,CAD = -AC\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,\partial A$, en appelant A l'angle BAC, qui en diminuant, devient BAD; et $\frac{1}{2}(BDC \backsim BCD) = C+\frac{1}{2}\,\partial C$, (656). Donc cos. $(C+\frac{1}{2}\,\partial C) = \text{sin.}\,\frac{1}{2}\,\partial B \times \frac{BC+\frac{1}{2}\partial BC}{-AC\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,\partial A}$; et par conséquent

$$\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\partial B : -\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\partial A :: AC\,\text{cos.}(C+\tfrac{1}{2}\partial C) : BC+\tfrac{1}{2}\partial BC.$$

661. Ce qui nous donne pour l'infinitésimale

$$\partial B : -\partial A :: AC\ \text{cos.}\ C : BC.$$

662. Si, au lieu du côté AC, le côté AB varie, comme dans la figure 18; en changeant C en B et B en C dans les deux analogies précédentes, nous aurons à l'instant, sans nous fatiguer à appliquer à cette figure la démonstration ci-dessus,

$$\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\partial C : -\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\partial A :: AB\,\text{cos.}(B+\tfrac{1}{2}\partial B) : BC+\tfrac{1}{2}\partial BC,$$ et

663. $$\partial C : -\partial A :: AB\ \text{cos.}\,B : BC.$$

664. En divisant l'une par l'autre les analogies (656, 660), ainsi que les analogies (658, 662), on aura

$$-\tfrac{1}{2}\partial BC : -\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\partial A :: AC\,\text{sin.}(C+\tfrac{1}{2}\partial C) : \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\partial B,$$ et

665. $$-\tfrac{1}{2}\partial BC : -\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\partial A :: AB\,\text{sin.}(B+\tfrac{1}{2}\partial B) : \text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\partial C.$$

Et les infinitésimales seront

666. $- \partial BC : - \frac{\partial A}{R^2} :: AC \sin. C : 1.$

667. $- \partial BC : - \frac{\partial A}{R''} :: AB \sin. B : 1.$

668. Si *deux angles* sont *constans*, et par conséquent le troisième; en faisant varier les côtés, on a deux triangles semblables, dans lesquels les variations des côtés sont proportionnelles aux côtés eux-mêmes, ou (89) aux sinus des angles opposés à ces mêmes côtés. La solution de ce cas appartient à la Géométrie plutôt qu'à la Trigonométrie.

669. Pour faciliter l'usage des analogies différentielles que nous avons trouvées jusqu'à présent, j'ai cru qu'il serait utile d'en composer une table. J'y ai exprimé les infinitésimales de la manière qu'on préfère le plus généralement, c'est-à-dire en dénommant les différentes parties du triangle. J'ai omis R'' pour plus de brièveté; on suppléera cette quantité dans le calcul : nous en avertissons à la fin de la table. J'ai disposé chaque analogie *infinitésimale* sous l'analogie *finie* correspondante; ensorte qu'on verra sur-le-champ dans celle-ci ce qui se trouve négligé dans celle-là, et qu'on en tiendra compte dans le calcul, lorsqu'il le faudra, et qu'on le pourra.

670. Les analogies différentielles finies donnent la valeur exacte de l'une quelconque des quantités contenues dans chacune d'elles. Il n'en est pas ainsi des infinitésimales, qui ne peuvent que donner à-peu-près la valeur finie de l'une des deux différentielles que chacune d'elles renferme. Et si ce n'était pas une différentielle qu'on cherchât par ces analogies; si, par exemple, connaissant ∂AC et ∂BC, on cherchait l'angle C par le moyen de l'analogie (638), $\partial AC : \partial BC :: 1 : \cos. C$, l'erreur pourrait être grave; car en général *dans l'usage même des formules rigoureuses, il n'est pas sûr de chercher les grandes quantités par le moyen des petites*, puisqu'alors une légère erreur dans les quantités données peut en produire une considérable dans les quantités cherchées : on en verra un exemple.

671. Au contraire, si dans l'analogie que nous venons de citer, on connaît une des deux différentielles, pour trouver la valeur

très-approchée de l'autre, il suffit de connaître à-peu-près l'angle C. Une légère erreur sur une grande quantité telle qu'on suppose cos. C relativement aux différentielles, ne produit ordinairement qu'une erreur insensible sur une petite quantité telle qu'on suppose la différentielle cherchée. On en a vu un exemple (626).

672. De ce que nous avons dit, il résulte que le calcul des analogies infinitésimales est extrêmement commode, puisqu'entre autres avantages on peut négliger les secondes dans la valeur des arcs, en employant leurs lignes trigonométriques.

673. Table des Analogies différentielles, finies et infinitésimales, *démontrées* (632 *à* 667).

Quantités constantes AB, A; ou *un côté et un angle adjacent.*

1ère anal. $\delta AC : \left\{ \begin{matrix} \sin. \delta B \\ ou - \sin. \delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \sin.(C + \delta C) :: BC + \delta BC : \sin. C$

(M)... La variation du *côté adjacent à l'angle constant* est à la variation de l'*un des angles*, comme le côté opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

2e $\frac{1}{2}\delta BC : \left\{ \begin{matrix} \text{tang.} \frac{1}{2}\delta B \\ ou - \text{tang.} \frac{1}{2}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC + \frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}(C + \frac{1}{2}\delta C).$

ou

3e $\frac{1}{2}\delta BC : \left\{ \begin{matrix} \sin. \frac{1}{2}\delta B \\ ou - \sin. \frac{1}{2}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \frac{\sin.(C + \delta C)}{\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)}.$

(N)... La variation du *côté opposé à l'angle constant* est à la variation d'*un des angles*, comme ce côté est à la tangente de l'angle opposé au côté constant.

4e $\delta AC : \delta BC :: \cos. \frac{1}{2}\delta C : \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C).$

(O)... La variation du *côté adjacent à l'angle constant* est à la variation du *côté opposé*, comme le rayon au cosinus de l'angle opposé au côté constant.

Quantités constantes BC, A; ou *un côté et l'angle opposé.*

5e $\frac{1}{2}\delta AB : \sin. \frac{1}{2}\delta C$ *ou* $- \sin. \frac{1}{2}\delta B :: AB : \frac{\sin C}{\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)}.$

6e $-\frac{1}{2}\delta AC : \sin.\frac{1}{2}\delta C$ *ou* $-\sin.\frac{1}{2}\delta B :: AC : \frac{\sin.B}{\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)}$.

(P)... La variation d'*un côté* est à la variation d'*un angle*, comme ce même côté à la tangente de l'angle opposé.

7e $\delta AB : -\delta AC :: \cos.(C+\frac{1}{2}\delta C) : \cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)$.

(Q)... Les variations des *côtés* sont proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

Quantités constantes AB, AC; ou *deux côtés*.

8e $\text{tang}.\frac{1}{2}\delta B : \text{tang}.\frac{1}{2}\delta C :: \text{tang}.(B+\frac{1}{2}\delta B) : \text{tang}.(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

(R)... Les variations des *angles opposés aux côtés constans* sont proportionnelles aux tangentes de ces mêmes angles.

9e $-\frac{1}{2}\delta BC : \text{tang}.\frac{1}{2}\delta B :: BC+\frac{1}{2}\delta BC : \cot.(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

10e $-\frac{1}{2}\delta BC : \text{tang}.\frac{1}{2}\delta C :: BC+\frac{1}{2}\delta BC : \cot.(B+\frac{1}{2}\delta B)$.

(S)... La variation du *côté* est à celle d'*un angle adjacent*, comme ce même côté à la cotangente de l'autre angle adjacent.

11e $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta B :: BC+\frac{1}{2}\delta BC : AC\cos.(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

12e $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta C :: BC+\frac{1}{2}\delta BC : AB\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)$.

(T)... La variation de l'*angle opposé au côté variable* est à celle d'*un angle adjacent*, comme le côté variable est au produit du côté constant opposé à cet angle adjacent, par le cosinus de l'autre angle adjacent.

13e $\sin.\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta B : AC\sin.(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

14e $\sin.\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta C : AB\sin.(B+\frac{1}{2}\delta B)$.

(V)... La variation de l'*angle opposé au côté variable* est à celle de *ce côté*, comme le rayon est au sinus de l'un des deux autres angles, multiplié par le côté constant contigu à cet angle.

Dans les analogies infinitésimales, nous supposons toujours que *les variations des angles* (lesquelles se prennent en secondes) sont divisées par R″, (631).

674. Les analogies précédentes, et surtout les infinitésimales, peuvent devenir plus nombreuses au moyen des substitutions. Par exemple, si l'on cherchait une des différentielles de l'analogie

δAB : δC :: AB : tang. C, (642), et que le côté AB fût inconnu, mais que les angles B et C et le côté AC fussent donnés, on pourrait trouver, par leur moyen, le côté $AB = \frac{AC \sin. C}{\sin. B}$, et employer ensuite la valeur numérique de AB dans cette analogie : mais si au lieu de cette valeur numérique, on substitue dans cette même analogie la valeur analytique de AB, telle que nous venons de la donner, la proportion deviendra δAB : δC :: AC cos. C : sin. B, et le calcul sera plus expéditif. Il en serait de même si on connaissait AB, AC et A, et que l'angle C fût inconnu ; en substituant la valeur (III. 105e) de tang. C, on aurait δAB : δC :: AC — AB $\times$ cos. A : sin. A. On fera donc ces substitutions quand elles seront nécessaires : nous les omettons ici ; mais nous nous proposons d'y suppléer dans les analogies différentielles de la Trigonométrie sphérique, qui sont d'un plus grand usage. On pourra recourir à celles-ci, même pour la Trigonométrie rectiligne, à l'usage de laquelle il est facile de les réduire, comme nous le verrons (1428).

675. Il y a deux manières de calculer les analogies différentielles finies, lorsque le second rapport contient aussi la différentielle cherchée : je suppose, par exemple, que l'on cherche δC par l'analogie (673, 1e), qui donne $\sin. \delta C = -\frac{\delta AC}{BC} \times \sin. (C + \delta C)$.

La première méthode déjà indiquée (335) consiste à employer sin. C au lieu de sin. (C + δC) qu'on ne peut employer, parce que δC est inconnu : on a alors une valeur approchée de δC, pourvu que δC soit très-petit relativement à C. En se servant de cette valeur approchée de δC, que l'on substitue dans le calcul sin. (C + δC) au lieu de sin. C, et on aura une autre valeur de δC plus approchée que la première. Si cette seconde valeur n'est pas encore aussi exacte qu'on le desire, on l'emploiera au lieu de la première, et on en trouvera une troisième beaucoup plus exacte, et ainsi de suite. Ordinairement on voit, dès le premier calcul, quelle est à très-peu-près la valeur exacte de δC.

676. Par la seconde méthode, je réduis l'équation de sorte que l'inconnue soit d'un seul côté. Je développe sin. (C + δC), (II. 1e) ; et divisant l'équation par sin. δC, j'ai

$$\cot. \delta C = -\cot. C - \frac{BC}{\sin. C \times \delta AC}.$$

Mais cette méthode, peu commode pour le calcul par logarithmes, donne en outre, dans de certains cas, une équation compliquée du second degré; par exemple, lorsqu'on cherche ∂C par la deuxième analogie, en développant $\text{tang.}(C+\frac{1}{2}\partial C)$, (II. 5ᵉ).

677. Si, par le résultat du calcul, $\cot.\partial C$ est une quantité négative, l'angle ∂C sera négatif (75, 68), et indiquera diminution de l'angle C. Quand le côté AC décroît, il est bien entendu qu'on doit donner le signe négatif à la valeur numérique de ∂AC.

678. Camerer (635) donne une troisième manière. Elle consiste à exprimer par le moyen d'une série la valeur de la différentielle cherchée, en délivrant de la différentielle inconnue le second membre de l'équation. En voici un exemple. La première analogie donne $\partial AC = -\frac{BC \sin.\partial C}{\sin.(C+\partial C)} = -\frac{BC \sin.\partial C}{\sin.C \cos.\partial C + \cos.C \sin.\partial C}$.
Exécutant la division, et faisant $\frac{BC\,\text{tang.}\partial C}{\sin.C} = P$, $\frac{\text{tang.}\partial C}{\text{tang.}C} = S$, on a $\partial AC = -P(1 - S + S^2 - S^3 + \text{etc.})$.

679. Cet habile auteur réduit à cette forme toutes les différentielles de ma Table (673). Cette marche est ingénieuse, et de plus elle serait utile, si les expressions qui en résultent n'étaient, presque sans exception, beaucoup plus laborieuses à calculer numériquement, que ne l'est la voie indirecte que j'ai proposée (675). Par exemple, pour tirer de la quatorzième analogie la valeur de ∂A, il faut écrire

$$\frac{(4AC \times AB \cos.A - \overline{2BC + \partial BC} \times \partial BC)(2BC + \partial BC)\partial BC}{4AC \times AB \sin.A\,(2AC \times AB \cos.A + \overline{2BC + \partial BC} \times \partial BC)} = P, \text{ et}$$

$$\frac{(4AC \times AB \cos.A - \overline{2BC + \partial BC} \times \partial BC)(2BC + \partial BC)\partial BC}{(2AC \times AB \cos.A + \overline{2BC + \partial BC} \times \partial BC)^2} = S;$$

puis on a $\partial A = P\left(1 - \frac{S}{2^2} + \frac{1.3S^2}{2^4.3} - \text{etc.}\right)$. Il est aisé de comparer le travail de ce calcul avec le travail assurément léger qu'exige mon analogie.

680. *Si une seule partie du triangle est constante*, nous allons voir que les mêmes analogies serviront encore; mais *il faut connaître deux variations pour pouvoir trouver toutes les autres.*

Je parle seulement des analogies infinitésimales; car on ne pourra que rarement, dans ce cas, appliquer la méthode suivante aux analogies différentielles finies, parce qu'elles exigent beaucoup de données et qu'elles se prêtent peu aux substitutions.

681. Supposons que le triangle DTS se convertisse en DES, le seul côté DS demeurant constant. Soit connue la valeur de EDT=ẟD, et celle de TSE=ẟS; et soit demandée, par exemple, la variation de DT qui devient DE. Fig. 19.

On prolongera DT, s'il est nécessaire, jusqu'à la rencontre de SE, et on considérera d'abord le triangle DTS converti en DRS, et conservant par conséquent comme constans *un côté* DS *et un angle adjacent* D. Puisqu'on connaît ẟS, on aura la variation TR de DT, qui dans ce cas est *le côté adjacent à l'angle constant* D, par l'analogie (M), qui donnera (ẟDT) : ẟS :: TS : sin T.

682. Je donne le signe positif aux deux différentielles, parce que j'observe que S est l'angle variable adjacent au côté constant, et qu'il occupe par conséquent la place de B dans la première analogie. La figure nous montre aussi le côté DT et l'angle S comme croissant l'un et l'autre. Mais on ne doit pas se fier aux figures, et il faut prendre les différentielles de toute analogie infinitésimale avec les mêmes signes que ceux des deux premiers termes de l'analogie correspondante finie.

683. La proportion (681) fait connaître la différence de DT à DR. Il reste à connaître celle de DR à DE; puisque la somme des deux différences avec les signes qu'elles ont, donne la variation entière que l'on cherche, de DT à DE. Pour distinguer de celle-ci la différence partielle (DT ∽ DR), je mets entre parenthèses l'expression équivalente ẟDT.

684. Considérons actuellement le triangle DSR converti en DSE, un *côté* DS *et l'angle adjacent* DSR demeurant constans. Puisqu'on connaît ẟD, et qu'on cherche la variation de DR, *côté opposé à l'angle constant*, l'analogie (N) est celle qui convient à ce cas; et on aura ẟDR : ẟD :: DR : tang. R. Je conclus de la comparaison des parties constantes entre elles, que D correspond à B dans la deuxième analogie; et par cette raison, je donne encore ici le signe positif aux deux différentielles.

685. Nous avons donc $\delta DT = (\delta DT) + \delta DR = \delta S \times \frac{TS}{\sin. T} + \delta D \times \frac{DR}{\text{tang. } R}$. En écrivant DT au lieu de DR, et T au lieu de R, comme nous avons toujours fait dans les analogies infinitésimales, où nous avons employé seulement les parties du triangle primitif ABC auquel correspond DTS dans le cas présent, on aura

$$\delta DT = \frac{TS \times \delta S + DT \times \cos. T \times \delta D}{\sin. T}.$$

686. Reste à observer que dans le calcul numérique du second membre, il faut changer les signes suivant les cas; savoir le signe de δS quand l'angle S décroît, celui de δD si l'angle D est décroissant, et celui de cos. T, quand l'angle T est obtus.

687. Le *triangle n'ayant qu'une seule partie constante*, que je nommerai *la première*, et étant données les variations de deux autres parties, que je nommerai *la seconde* et *la troisième*, la méthode générale pour connaître la variation de l'une quelconque des trois parties restantes du triangle, que je nomme la *quatrième*, sera celle qui suit :

Considérez comme *constantes la première et la seconde*; prenez dans la table (673) l'analogie convenable pour calculer la variation ou l'effet que la variation connue de la *troisième* produit sur la *quatrième*. Considérez ensuite comme *constantes la première et la troisième*, et cherchez de même l'effet que produit sur la *quatrième* la variation connue de la *seconde*. La somme de ces deux effets sera la variation cherchée, pourvu qu'on observe la règle (682).

On verra plusieurs applications de cette méthode (1519, 1527, etc.).

688. *Lorsqu'aucune des parties du triangle n'est constante, trois variations étant données, on trouvera toutes les autres* par la même méthode. Je nomme *première, seconde* et *troisième*, les trois parties dont les variations sont données; pour connaître la variation de l'une quelconque des trois autres parties, que je nomme *quatrième*, je suppose *constantes la première et la seconde*; je trouve, comme ci-dessus, l'effet que produit sur la *quatrième* la variation connue de la *troisième*; je suppose ensuite *constantes la première et la troisième*; je trouve l'effet que pro-

duit sur la *quatrième* la variation connue de la *seconde ;* enfin je suppose *constantes la seconde et la troisième*, et je trouve l'effet que produit sur la *quatrième* la variation connue de la *première.* La somme de ces trois effets, en observant la règle (682), sera l'effet total ou la variation cherchée.

La table (673) fournit donc les analogies différentielles pour tous les cas possibles.

689. Je crois à propos néanmoins de faire voir comment on peut arriver aux mêmes résultats par le moyen du calcul différentiel. Cherchons l'équation finale (685).

Dans le triangle DST, la seule partie constante est le côté DS; Fig. 19.
les variables sont S, D, DT. Je fais à volonté $S = A$, $D = B$, et $T = C$; puis je cherche dans la Table III une formule qui comprenne AB, A, B, BC, qui sont les parties du triangle ABC correspondantes aux parties ci-dessus nommées du triangle DST. La cinquième convient à ce cas; et j'ai $AB = BC \cos. B + BC \sin. B \cot. A$. Je différentie, en observant que AB est constant : le résultat est $o = \cos. B \delta BC - BC \sin. B \delta B + \sin. B \cot. A \delta BC + BC \cos. B \cot. A \delta B - \frac{BC \sin. B \delta A}{\sin.^2 A}$, ou (III. 11[e]), $\delta BC (\cos. B + \sin. B \cot. A) = BC \delta B (\sin. B - \cos. B \cot. A) + \frac{AC \delta A}{\sin. A}$. Je multiplie par sin. A, et je parviens (III. 85[e], 94[e]) à l'équation $\sin. C \delta BC = BC \cos. C \delta B + AC \delta A$, laquelle, en y replaçant les lettres D, T, S, sera l'équation cherchée.

690. Je terminerai ce chapitre par quelques expressions qu'on emploie fréquemment dans l'analyse infinitésimale.

Dans un triangle rectiligne rectangle, *lorsque la différence de l'hypoténuse au plus grand côté est très-petite, elle est égale à la moitié du quarré du plus petit côté, divisée par l'hypoténuse.*

Puisque dans un triangle ABC rectangle en A, on a (537, 14[e]), Fig. 20.
$BC - AB = \frac{AC^2}{BC + AB}$; en appelant δBC la différence de l'hypoténuse BC au plns grand côté AB, il s'ensuit que $AB = BC - \delta BC$, et que $BC - AB = \frac{AC^2}{2BC - \delta BC} = \frac{AC^2}{2(BC - \frac{1}{2} \delta BC)}$. Quand

δBC est très-petit par rapport à BC, on peut mettre BC au lieu de $(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, (622); donc alors $BC - AB = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{BC}$.

691. *Le sinus verse d'un arc très-petit est égal à la moitié du quarré de ce même arc.*

Prenant l'hypoténuse pour rayon, si l'on mène l'arc CD jusqu'à la rencontre de AB prolongé, on verra que $BC - AB = AD =$ sin. v. CD, (5), et que $AC =$ sin. CD. Mais quand le sinus est très-petit, on peut lui substituer l'arc, (627). Par ces substitutions, l'équation finale de l'article précédent devient sin. v. $CD = \frac{\frac{1}{2}CD^2}{BC} = \frac{1}{2}CD^2$, en faisant, comme à l'ordinaire, le rayon $BC = 1$.

C'est aussi la valeur que donnerait l'équation (289), puisque sin. v. $A = 1 - \cos. A = \frac{1}{2}A^2$, en négligeant les puissances plus élevées de A, qui ont une valeur insensible relativement à A^2, lorsque A est très-petit.

692. *Lorsque l'arc est très-petit, l'excès de sa sécante sur le rayon est égal à la moitié du quarré de ce même arc.*

Soit DE la tangente, et BE la sécante (10) du petit arc CD; on cherche la valeur de CE, quantité qu'on nomme aussi *l'écart de la tangente*, c'est-à-dire la distance de l'extrémité de la tangente à l'arc. Or AB : BC :: AD : $CE = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{BC \times \frac{1}{2}CD^2}{BC - \delta BC}$, (691, 690). Donc en négligeant comme ci-dessus δBC, CE $= \frac{1}{2}CD^2$.

693. On voit que dans le calcul infinitésimal, le *sinus verse se considère comme égal à l'excès de la sécante sur le rayon.*

On aura une expression exacte de cet excès, par la formule (I. 27^c), qui donne $\frac{1}{\cos. A} - 1$ ou séc. $A - 1 =$ tang. A tang. $\frac{1}{2}$A. Cette expression peut être utile dans plusieurs cas.

CHAPITRE XIII.

De l'usage de la Trigonométrie rectiligne sur le terrein.

694. Nous parlerons en premier lieu de la manière de mesurer mécaniquement une distance et un angle, puisque ce sont là les opérations fondamentales qui fournissent les données pour calculer les autres parties inconnues d'un triangle, ainsi qu'on l'aura déjà observé dans les exemples (84, 92, 540, etc.). Comme la mesure des angles est bien plus facile à relever que celle des côtés, on mesure ordinairement un côté seulement, et ce côté se nomme *la base*.

De la manière de mesurer la base.

695. Soit proposé de mesurer sur le terrein la distance AB. Fig. 21.

On commencera par planter verticalement, au moyen du fil à plomb, deux pieux bien droits, AC, BD, aux deux points extrêmes A et B. Ces pieux, qu'on nomme aussi *piquets* ou *jalons*, se terminent ordinairement d'un bout par une pointe ferrée, pour qu'ils pénètrent plus aisément en terre, et portent à l'autre bout un signal pour faciliter la direction du rayon visuel figuré par la ligne ponctuée CD. L'Observateur ayant l'œil appliqué en C ou en D, fera poser, de distance en distance, d'autres piquets toujours d'à-plomb, et qui soient en même temps dans la direction, ou, pour mieux dire, dans le plan vertical du rayon visuel CD; (le *plan vertical* est celui qui, prolongé, passerait par le centre de la Terre, que nous supposerons sphérique dans tout ce chapitre, parce que son ellipticité est tout-à-fait insensible dans les opérations dont il y est question). Ces piquets se multiplient autant qu'il est nécessaire pour que l'on puisse suivre par leur moyen la ligne droite AB

lorsqu'on la mesure, sans s'écarter de la direction de cette ligne, ni à droite ni à gauche. Si l'on veut procéder avec plus de sureté, on tracera un petit sillon de A en B, en appliquant de temps en temps l'œil aux jalons et dans leur plan vertical, pour conduire le sillon bien droit; ou bien on mènera une ficelle d'un jalon à l'autre. On prendra ensuite la mesure avec un grand compas, ou avec une chaîne de gros fil-fer, ou avec une perche d'une longueur connue. La longueur de la chaîne ou l'ouverture du compas, c'est-à-dire la distance de ses deux pointes, doivent être des parties aliquotes du mètre, ou de quelque mesure bien connue. Le compas doit être tel que son ouverture ne puisse varier pendant l'opération. On portera successivement les pointes du compas, ou la chaîne bien tendue, ou la perche, sur le sillon ou le long de la ficelle; et l'on mesurera ainsi avec précision le nombre des mètres de la distance AB. On opère plus promptement et plus surement encore, si l'on emploie deux perches égales, que l'on met successivement l'une au bout de l'autre, de manière que la première devienne la seconde, et ainsi de suite alternativement.

696. Cette manière de mesurer suppose que le terrein soit plan depuis A jusqu'en B, et la distance mesurée se nomme, dans ce cas, *distance horizontale*. Dans la rigueur mathématique, deux points de la surface de la terre, quelque voisins qu'ils soient, ne peuvent avoir leur horizon dans un même plan, à cause de la courbure du Globe. Mais cette sphéricité n'occasionne qu'une erreur absolument insensible dans ces sortes d'opérations. Les bases les plus longues que l'on ait mesurées jusqu'à présent, sont environ de 36000 pieds, mesure de Paris : cette distance répond à un arc un peu plus grand que de six minutes; ce qui se trouve par la proportion suivante : *Le rayon de la terre exprimé en pieds* (555) *est à un arc terrestre exprimé en pieds, comme le rayon de la table* (AA), *ou* 1, *est à l'arc de même degré pris dans la même table.* En appelant A cet arc de la table, on a donc, dans le cas dont il s'agit, $A = \frac{36000}{19610000}$. La différence de l'arc à la corde est $\frac{1}{24}A^3$, en ne prenant que le premier terme de la dernière série (278), les terme qui suivent étant insensibles. Cette différence, en parties de $R=1$, est donc $(\frac{36}{19610})^3 \times \frac{1}{24}$; il faut multiplier cette valeur par le rayon terrestre, ou par $R=19610000$, ce qui donnera la différence ci-

dessus exprimée en pieds et fractions de pieds; et on trouvera qu'un arc terrestre long de 36000 pieds est plus long que la corde qui lui est sous-tendue, de $\frac{5}{1000}$ de pieds seulement. On voit donc qu'un tel arc peut se prendre, sans le moindre scrupule, pour une ligne droite dans les opérations les plus délicates de la Géodésie.

Lorsqu'on voudra avoir l'arc en minutes et secondes, on emploiera R", (631), au lieu de 1, dans l'analogie ci-dessus.

697. Si le terrein de la base est incliné ou inégal, on procédera comme il suit. Après avoir fixé avec des jalons l'alignement de la Fig. 22. base BC, on en prendra la mesure en tenant toujours les perches horizontales, comme *ac*, *be*, etc. Les perpendiculaires ponctuées DC, E*c*, etc., représentent le fil à-plomb qui doit raser les extrémités des deux perches, supérieure et inférieure, pour qu'on soit assuré que l'une commence où l'autre finit, condition sans laquelle il est évident que la mesure ne serait pas juste. En opérant ainsi, la somme des perches *ac*, *be*, *dm*, *h*B, sera égale à la distance horizontale AC des points B et C.

698. Si cependant on voulait connaître *la distance effective* BC des mêmes points, on pourrait mesurer successivement les hauteurs *a*C, *bc*, *de*, *hm*, dont la somme est égale à AB; et connaissant AC et AB, on trouverait par le calcul (537, 18e), la longueur de l'hypoténuse BC. (Si le terrein monte et descend alternativement, il est clair que pour avoir AB, il faut soustraire la somme des différences des hauteurs des perches en descendant, de celle de ces différences en montant). Mais il est plus aisé de mesurer AB par le nivellement, méthode dont se servent ordinairement les Ingénieurs et les Arpenteurs. L'usage du baromètre (732) est encore plus facile. Enfin la voie la plus courte est de prendre avec des instrumens (705 et suiv.) la mesure de l'angle ACB; par le moyen de cet angle et du côté AC, on trouvera BC, (537, 8e).

699. Pour disposer les perches horizontalement dans la mesure des terreins inclinés, on se sert du niveau. Il y a des niveaux de plusieurs espèces et de plusieurs formes. La fig. 23 représente un *niveau d'air*. C'est un tube de verre, FE, fermé hermétiquement, et rempli d'une liqueur, ordinairement d'esprit-de-vin, sur laquelle

surnage une bulle d'air. On pose cet instrument sur la perche, dont on élève et abaisse celle des extrémités qui ne touche point au terrein, (par exemple l'extrémité *a* de la perche *ac* dans la fig. 22), jusqu'à ce que la bulle d'air s'arrête en G, dans la partie du milieu du tube, qui est ordinairement indiquée par deux traits. La perche est alors parallèle à l'horizon.

700. Ce que nous venons d'exposer est plus que suffisant pour les mesures ordinaires de l'Arpentage, de la Topographie et de la Géographie. Lorsqu'il est question d'opérations plus délicates, s'il s'agit, par exemple, de déterminer la longueur d'un degré de la Terre, il faut alors mettre en usage bien d'autres moyens, employer d'autres précautions, que nous omettrons, pour ne pas être diffus inutilement, puisqu'en pareil cas on ne peut se dispenser d'avoir sous les yeux des Traités particuliers, comme *la Figure de la Terre*, par Bouguer, *De Expeditione litterariâ*, par Boscovich, les Relations publiées par les Académies de Londres et de Paris, surles mesures géographiques prises en 1787, et qui lient la France à l'Angleterre; enfin la *Mesure de l'arc du Méridien entre les Parallèles de Dunkerque et de Barcelone.*

De la manière de relever les angles sur le terrein.

Fig. 24. 701. La *planchette* est le plus commode, et peut-être le plus ancien instrument qui ait été inventé pour prendre la mesure des angles sur le terrein. C'est effectivement une petite planche bien dressée, d'un pied et demi ou environ en quarré, soutenue ordinairement sur trois pieds, et montée avec divers mouvemens pour qu'on puisse l'incliner à volonté à l'horizon. Les meilleures planchettes sont celles qui peuvent se mouvoir en tout sens avec facilité, qui sont solides, fortes, conservant invariablement l'inclinaison sur laquelle on les fixe, et qui ne sont pas sujettes à se détruire ou à se déformer par les variations de la chaleur et du froid, de la
Fig. 25. sécheresse et de l'humidité. FG est une alidade, c'est-à-dire une règle de cuivre, garnie de deux pinnules qui servent à diriger le rayon visuel.

Fig. 24. Pour prendre l'angle formé par deux objets, comme B et C, vus d'un point de station auquel je suppose que réponde d'à-plomb un point A de la planchette; on fixera sur cet instrument un papier

bien tendu, sur lequel on appliquera l'alidade de manière qu'en regardant par les pinnules l'objet B, on puisse mener le long de la règle, qu'il faut contenir fermement, une ligne indéfinie A*b*. On mirera de même au travers des pinnules l'objet C, et l'on tirera une ligne A*c*; l'angle *c*A*b*, sur le papier, sera l'angle cherché CAB.

702. Il est facile de déterminer sur le terrein le point correspondant au point A du papier, en suspendant successivement aux bords *m*, *n* de la planchette, un fil à-plomb qui descende près de la superficie du sol, et portant sur le terrein, dans la direction de l'un des plombs vers l'autre, une des deux distances A*m* ou A*n* mesurée horizontalement.

703. Pour savoir le nombre des degrés de l'angle *b*A*c*, on en prend la mesure avec un demi-cercle de cuivre ou de corne. Si l'on veut cette mesure avec plus de précision, on prendra avec le compas une portion AD = AE sur les droites A*b*, A*c*, et DE Fig. 26.
sera la corde de l'angle A pour le rayon AE. On mesurera sur une échelle de parties égales les lignes AE, DE, et l'angle A sera connu par le moyen des tables des sinus, puisqu'on a AE : DE :: 1 : 2 sin. $\frac{1}{2}$A, (609).

704. C'est aussi la méthode la plus exacte pour former sur le papier un angle donné, en menant une ligne AE d'une longueur arbitraire, et de cette ligne comme rayon, et du centre A, décrivant un arc qu'on coupe en D, à un intervalle ED, qu'on détermine en calculant la même analogie. Quand ces deux opérations n'exigent pas une extrême exactitude, on peut éviter le calcul en faisant usage de l'échelle des cordes, que donne le compas de proportion.

705. Après la planchette, l'instrument le plus usité pour relever Fig. 27.
les angles sur le terrein, est le *graphomètre*. C'est un demi-cercle de métal, divisé de degré en degré, ou de demi-degré en demi-degré; il porte une alidade mobile EC, qui tourne sur le centre A de l'instrument, et qui est garnie de pinnules. Deux autres pinnules sont aussi fixées sur le demi-cercle, perpendiculairement à son plan, aux xtrémités du diamètre qui passe par les divisions marquées o et 180. Les deux extrémités de l'alidade portent ordinairement quelques divisions dont voici l'usage.

Fig. 27. 706. Supposons le graphomètre divisé de 30′ en 30′; si on prend un intervalle, par exemple, de quatorze divisions ou de sept degrés, et qu'un intervalle semblable soit divisé, sur chacune des extrémités de l'alidade, en quinze parties égales, il est clair que chacune de ces parties vaudra $\frac{7^\circ}{15}$ ou 28′. La première division, marquée o sur l'alidade, doit correspondre précisément au milieu des pinnules, c'est-à-dire qu'elle doit être dans le plan des fils verticaux, qui sont ordinairement fixés dans le milieu des pinnules. On appelle communément cette division de l'alidade *la ligne de foi;* elle indique à laquelle des divisions du graphomètre correspond la direction du rayon visuel. Je suppose donc que la ligne de foi tombe sur le graphomètre entre 40° et 40° 30′. Pour savoir combien il y a de minutes entre la division de 40° et le point du graphomètre qui correspond à zéro de l'alidade, on contiendra l'alidade, et on cherchera parmi ses divisions quelle est celle qui coïncide le plus exactement avec l'une de celles du demi-cercle. Supposons que ce soit la septième division de l'alidade : dans notre exemple, elle coïncidera nécessairement avec celle de 43° sur le graphomètre. Puisque l'intervalle de six espaces sur l'alidade, de la première à la septième division, vaut $6 \times 28' = 2° 48'$, il s'ensuit que la première division de l'alidade répond, sur le graphomètre, à un point situé à $43° - 2° 48' = 40° 12'$. Si c'eût été la huitième division de l'alidade qui eût coïncidé avec celle de 43° 30′, on aurait trouvé de la même manière, que le zéro de l'alidade serait tombé sur 40° 14′. Ces exemples font aisément comprendre que les divisions de l'alidade subdiviseront les espaces du demi-cercle, de 2′ en 2′.

Le limbe qui porte ces divisions se nomme le *nonius* ou le *vernier.*

707. Le graphomètre doit être monté sur un pied bien solide, et de manière qu'on puisse fixer le plan du demi-cercle dans toutes les positions, horizontale, verticale, et inclinée à l'horizon. Les graphomètres plus perfectionnés, sont en outre garnis de vis qui servent aux petits mouvemens, soit pour achever de mettre avec toute l'exactitude possible le plan de l'instrument dans l'inclinaison desirée, soit pour placer rigoureusement l'alidade dans la direction de l'objet qu'on veut mirer au travers des pinnules. Au lieu de pinnules, on se sert avec avantage de deux lunettes, l'une

fixée au demi-cercle parallèlement, au diamètre qui passe, ou réellement ou mentalement, par les divisions marquées o et 180. Cette lunette est placée au-dessous du demi-cercle, pour que l'alidade puisse tourner librement sur la surface supérieure. L'alidade porte la seconde lunette, laquelle doit être disposée de manière qu'elle puisse s'incliner un peu, verticalement, sur le plan de l'alidade. Chacune de ces lunettes doit avoir deux fils bien tendus en croix, au foyer commun des verres, ou au moins un seul fil tendu verticalement.

Enfin le graphomètre porte une boussole qui sert à déterminer l'angle que fait le rayon visuel avec la ligne méridienne, comme nous l'expliquerons plus clairement ci-après, (797).

708. Il est aisé de concevoir l'usage du graphomètre. Si l'on veut mesurer la distance angulaire de deux objets F, G, vus d'un point quelconque, on placera perpendiculairement sur ce point le centre A du graphomètre, et on inclinera l'instrument ou on le disposera, de manière qu'en regardant à travers les pinnules fixes, le fil vertical paraisse partager également l'un F des deux objets, et qu'en même temps le plan de l'instrument pût, s'il était prolongé, rencontrer l'autre objet G. Ensuite on fera tourner l'alidade EC, jusqu'à ce que le fil de ses pinnules partage également l'objet G. On observera à quel point du demi-cercle correspond la ligne de foi de l'alidade; la distance de ce point à la première division du graphomètre en B, est l'arc BC, qui indiquera de combien de degrés et minutes est l'angle cherché BAC ou FAG.

709. Cet angle, mesuré dans un plan commun aux trois points A, F, G, n'est égal à l'angle GAF, mesuré sur le plan horizontal du point A, que quand les points F et G sont situés dans ce dernier plan, comme nous le verrons (746). Nous donnerons (747) le moyen d'évaluer et de corriger cette différence; correction qu'on s'épargnera, si le graphomètre est armé de lunettes, lorsqu'un seul des objets sera situé hors de l'horizon de l'Observateur. Car alors on pourra mirer cet objet au moyen du petit mouvement vertical que nous avons supposé (707) à la lunette de l'alidade, en laissant toujours le plan du demi-cercle dans celui de l'horizon.

710. Avant de se servir d'un instrument, il est essentiel de

Fig. 27 s'assurer de sa bonté. On peut exiger de l'Artiste qui le fournit, qu'il en démontre la justesse, ou qu'il donne les moyens de la reconnaître. Pour les opérations ordinaires, les petites imperfections sont insensibles, les erreurs considérables sont aisées à découvrir; nous ne dirons donc que peu de mots sur ce point.

711. Il faut d'abord vérifier dans un graphomètre si les rayons visuels qui passent par les pinnules fixes et par celles de l'alidade, se coupent dans le point précis qui correspond au centre du demi-cercle; et si l'arc de 180° est juste, c'est-à-dire si les divisions marquées 0 et 180 sont aux points précis où elles doivent être. Pour ces vérifications, il suffit d'observer si les quatre fils se confondent ensemble dans un même plan, lorsque les zéros des nonius de l'alidade coïncident parfaitement avec les divisions marquées 0 et 180; si cela a lieu dans les deux positions de l'alidade, c'est-à-dire, soit lorsque la pinnule E est du côté de la pinnule D, soit lorsque cette pinnule E est du côté de la pinnule B; et enfin si, en tournant l'alidade, le bord des nonius couvre ou coupe une partie égale dans chacune des divisions du demi-cercle. Ces opérations feront reconnaître si le point A, sur lequel se meut l'alidade, est vraiment le centre de l'instrument; s'il est, comme il doit l'être, dans la commune intersection du plan des fils du demi-cercle et du plan des fils de l'alidade; enfin si l'arc de 180° est absolument juste. Après cette dernière vérification, on pourra reconnaître s'il y a des erreurs sensibles dans la position des autres divisions, en y présentant successivement le nonius, ou mesurant les cordes avec un compas à pointes très-fines.

Fig. 28. 712. Si le graphomètre est garni de lunettes, il n'exige alors qu'un nonius du côté de l'objectif de la lunette mobile: on mettra la ligne de foi de ce nonius en coïncidence avec la première division B du demi-cercle, et l'on observera si les fils verticaux des deux lunettes couvrent les mêmes points d'un même objet, comme C: (cette opération suppose que les deux fils soient bien verticaux; ce dont on peut s'assurer d'abord, en observant s'ils se confondent avec un fil à plomb pendant à une certaine distance). Ensuite on tournera l'alidade de manière que la ligne de foi du nonius soit en coïncidence avec la dernière division du demi-cercle en D. Si le fil vertical, ou l'intersection des deux fils, se trouvait ne pas tomber

alors sur des points remarquables d'un objet quelconque, il faudrait planter un jalon ou signal, tel que E. Après avoir reconnu avec certitude les points précis de l'objet E, couverts par le fil de la lunette mobile, et ceux de l'objet C, couverts par le fil de la lunette fixe, on tournera le graphomètre de manière que le point D se trouve où était d'abord le point B, et *vice versâ;* (ce qui s'obtient facilement si, avant de mouvoir le graphomètre, on marque sur le terrein, au moyen d'un fil à plomb, les points correspondans aux points B et D). Alors on observera si le fil de la lunette fixe étant dirigé sur les points remarqués de l'objet E, celui de la lunette mobile couvre de même aussi les points reconnus de l'objet C. Par cette opération, l'arc de 180° sera vérifié, ainsi que la position exacte du centre de l'instrument dans l'intersection commune aux plans verticaux des axes optiques des deux lunettes.

Les autres vérifications se feront comme nous avons dit (711).

713. Dans toutes ces opérations, que, pour plus de sureté, il est à propos de répéter plusieurs fois; s'il se trouvait quelque erreur, il faudra en apprécier la quantité par le moyen du nonius ou de la vis qui le fait marcher (707), si les mouvemens de cette vis sont mesurés par un index. Et en se servant de l'instrument, on tiendra compte des erreurs découvertes.

714. Un autre instrument, d'un usage très-étendu, est le *quart de cercle*, qui n'est que la moitié ABL du graphomètre. Aussi ne mesure-t-il les angles obtus que lorsqu'on les a divisés en deux angles aigus, par le moyen d'un objet intermédiaire quelconque. Dans la vérification de cet instrument, il faut comparer l'arc de 90° à quatre angles droits pris successivement, en faisant mouvoir l'instrument autour de son centre, comme nous l'avons dit (712) pour la comparaison de l'arc de 180° du graphomètre à deux angles de 180° chacun. Lorsqu'il s'agit du graphomètre, l'erreur trouvée par la comparaison est le double de l'erreur de l'arc de 180°; et si l'on opère avec le quart de cercle, l'erreur trouvée en mesurant le quatrième angle est le quadruple de l'erreur de l'arc de 90°. Fig. 27.

715. C'est le quart de cercle qu'on emploie dans les opérations les plus délicates, parce qu'à volume et poids égaux, il peut avoir un rayon plus grand que le graphomètre; et que plus le rayon est

grand, plus on a les angles avec une précision rigoureuse. Quant aux méthodes des vérifications scrupuleuses du quart de cercle pour parvenir à reconnaître jusqu'à une seconde d'erreur, cette matière a été épuisée par Boscovich, dans l'Ouvrage cité (700). On peut encore avoir recours aux Éphémérides de Milan pour 1782; on y trouvera un résumé bien fait des vérifications des instrumens de l'Observatoire de Milan, auxquelles on a apporté la plus grande exactitude. Enfin le Liv. XIV de l'Astronomie de M. Lalande réunit d'excellens préceptes pour la vérification de toutes sortes d'instrumens astronomiques.

716. Mais l'instrument le plus propre à mesurer les angles avec une précision merveilleuse, c'est le cercle entier armé de deux lunettes, invention moderne. En multipliant les observations en divers points du limbe, on a un résultat tel, que de petits cercles, du diamètre de 6, de 12, de 18 pouces au plus, équivalent à de grands instrumens : souvent la somme des trois angles d'un triangle ne diffère pas de 180° jusqu'à une seconde, lorsque par les moyens usités auparavant, l'erreur peut facilement aller à 30 secondes. On trouve dans les Relations françaises et anglaises citées (700), les détails de la construction, de l'usage et des avantages des cercles entiers.

717. Tobie Mayer a aussi imaginé un instrument très-simple, et commode pour relever les angles. On peut en voir la description dans le Tom. II des Actes de Gottingue, et dans l'Ouvrage (324) de Toaldo.

718. Il serait trop long d'énoncer et de décrire tous les instrumens qui ont été imaginés pour relever les angles. Nous nous contenterons d'avoir dit quelque chose de ceux qui sont les plus connus et les plus en usage. Nous nous réservons de parler de la boussole, (789).

Nous terminerons en observant que si dans ces instrumens on préfère les lunettes aux pinnules, c'est qu'avec celles-ci, comme on ne distingue pas bien les objets éloignés, on ne peut répondre d'une erreur de 2'.

De la mesure des hauteurs.

719. *On demande la hauteur d'un clocher*, représentée par la Fig. 25. ligne ponctuée AB, B étant le centre de la base du clocher, ou le point correspondant perpendiculairement au point A.

A une distance convenable (624), j'établis le graphomètre monté verticalement, c'est-à-dire dans le plan de la ligne verticale AB, (il en serait de même du quart de cercle), de sorte qu'en même temps le diamètre CD soit parallèle à l'horizon; ce dont je m'assure par le fil à plomb, qui, dans ce cas, appliqué légérement au plan de l'instrument, doit battre à-la-fois sur la division marquée 90 et sur le centre N. Je fais tourner l'alidade EF jusqu'à ce que j'apperçoive sur le milieu du fil de ses pinnules ou de sa lunette le sommet A du clocher. Les degrés et minutes de l'arc FD sur le graphomètre, seront la mesure de *l'angle d'élévation* ANH. Du point G sur le terrein, auquel correspond à plomb le centre N de l'instrument, je mesure (695) et suiv.) la distance horizontale GK = NH, en suivant toujours la direction de la lunette CD; j'ajoute à GK la distance BK = MH. Connaissant NM et ANM, je trouverai AM, comme dans l'exemple (540); j'y ajouterai (ce qu'on doit faire dans toutes les opérations semblables) l'élévation, au-dessus du terrein, de la lunette fixe, c'est-à-dire GN = KH = BM, et j'aurai la hauteur cherchée AB.

720. Proposons-nous de *déterminer une hauteur inaccessible par le pied.*

Soit CD la hauteur qu'on veut déterminer. Puisque la rivière AD empêche de mesurer une distance horizontale du point D à la station de l'Observateur; on mesurera une ligne horizontale AB dans le plan de la hauteur CD, et on prendra les angles d'élévation B et CAD. Dans le triangle CAB on connaîtra les trois angles et le côté AB; on cherchera la valeur de l'un des deux autres côtés, (559); et alors on aura CD = AC sin. A, ou bien CD = BC sin. B, (530). Fig. 11.

721. *Déterminer une hauteur, dans le plan de laquelle on ne peut mesurer une distance horizontale.*

Soit AB la hauteur cherchée. Choisissez deux stations, C et D, dont l'une au moins soit dans le même plan horizontal que le point A, et telles que vous puissiez mesurer leur distance effective CD, (698). Mesurez les angles BCD et CDB, en plaçant l'instrument dans le plan oblique des trois points B, C, D. De celle des deux stations qui est dans le plan horizontal de A, prenez, Fig. 10.

avec l'instrument dirigé verticalement, l'angle d'élévation BDA, ou BCA. Connaissant les angles et l'un CD des côtés dans le triangle BCD, vous trouverez l'un des deux autres côtés BC, BD; et vous aurez AB = BD sin. BDA, ou bien AB = BC sin. BCA.

On verra (805) comment, étant en B, et une hauteur AB étant donnée, on peut déterminer une distance horizontale CD.

722. Lorsque l'Observateur est à une distance considérable de l'objet, les hauteurs déterminées par les méthodes précédentes ont besoin de quelques corrections.

En premier lieu, l'horizon de l'Observateur n'est pas le même Fig. 31. que celui de l'objet observé. Soit C le centre de la Terre, R la cime d'une montagne, A le point d'où l'on a observé l'angle d'élévation RAB; ORI, perpendiculaire à CR, est l'horizon du point R, et BAD, perpendiculaire à CA, est l'horizon du point A. Si on prend CE = CA, RE sera la vraie hauteur de la montagne, relativement au point A. Si on mène la corde ponctuée AE, *le véritable angle d'élévation* de la montagne serait RAE; mais RAB est *l'angle d'élévation apparent*, c'est-à-dire celui qui a été observé avec les instrumens, lequel est toujours relatif à l'horizon BAD de l'Observateur. Donc la hauteur de la montagne, déterminée par les méthodes précédentes, sera BR, et non RE.

723. De plus, dans le calcul des hauteurs, nous avons toujours supposé RBA = 90°; à la rigueur RBA égale la somme des deux angles intérieurs C et BAC, ou RBA = 90° + C; mais comme C n'est jamais que de très-peu de minutes (696), on peut résoudre le triangle RBA comme rectangle en B, sans qu'il en résulte une erreur sensible dans le calcul de la hauteur BR.

724. BE est donc la seule erreur dépendante de la différence des horizons, de laquelle il soit nécessaire de tenir compte. Pour la calculer, on se servira avec avantage de la formule (690) qui donne $BE = \frac{AB^2}{2BC}$. En voici un exemple.

Les Académiciens français (Bouguer, *Figure de la Terre*) mesurèrent au Pérou une base inclinée (697), dont la longueur AR se trouva de 6274,057 toises, et ils observèrent l'angle RAB de 1° 5′ 45″, l'effet de la réfraction (725) déduit. En faisant BR =

AR × sin. RAB, on trouve BR = 119,93 toises. Pour calculer BE, on peut prendre AR au lieu de AB, et CE au lieu de BC, les erreurs qui en résultent étant insensibles. On a déjà le log. de AR employé dans le calcul de BR, et 2CE est le diamètre de la Terre. Le diamètre moyen, que j'ai déduit (*Notizie Astronomiche*, 88) des mesures de dix degrés, est exactement de 6536467 toises, (1559). Avec ces données, on fait promptement le calcul qui suit :

$$\begin{aligned} \text{log. AR} &= 3,797548 \\ \text{idem} &= 3,797548 \\ \text{compl. log. 2CE} &= 3,184380 \\ \hline \text{log. BE} &= 0,779476 = \text{log. } 6,02. \end{aligned}$$

En ajoutant BE à BR, on a la hauteur vraie de la montagne, ou RE = 125,95 toises. Et en effet, par un calcul rigoureux, en résolvant le triangle RAC, au moyen de la formule (IV. 4ᵉ), puis le triangle REA au moyen de la 1ᵉ, on trouve de même RE = 125,95.

Par la formule $BE = \frac{AB^2}{2BC}$, on reconnaît aisément si BE peut se négliger. Par exemple, lorsque AB = 1000 mètres, BE = 0,15 mètres seulement.

725. En second lieu, les réfractions produisent une erreur, lorsqu'on prend les angles d'élévation, comme RAB. Les rayons de lumière, qui traversent l'atmosphère obliquement, se plient continuellement vers la Terre, à cause de l'attraction progressivement plus grande qu'ils éprouvent en traversant les couches de plus en plus denses de l'atmosphère. Ce changement de direction se nomme *réfraction*; il en résulte que les rayons décrivent une ligne courbe, et que l'œil voyant l'objet par la tangente de cette courbe, *l'effet de la réfraction est de faire voir les objets plus élevés qu'ils ne le sont réellement.* Le développement de la théorie de ce phénomène n'entre pas dans le plan de ce Traité; mais le fait est constant, et il est facile de s'en convaincre par l'expérience.

726. Soit donc C le centre de la Terre. Par la nature des triangles rectilignes, on a C = 180° — CRA — CAR ; mais CRA = 90° — IRA, et CAR = 90° + RAB. Par la substitution de ces

Fig 31. deux valeurs, la première équation devient C = IRA — RAB. L'angle C est toujours connu quand on connaît AR que l'on peut employer sans erreur sensible, au lieu de l'arc AE, dans la proportion donnée (696). Si donc se plaçant en R, on mesure avec un instrument l'angle IRA, et du point A l'angle RAB, et que la différence de ces deux angles ne se trouve pas égale à C, ce dont il s'en faudra sera la somme des deux réfractions. En effet si, l'Observateur étant en R, la réfraction fait voir le point A plus élevé qu'il n'est, l'angle observé IRA sera donc plus petit qu'il n'est réellement. Par la même raison, si de A on voit le point R au-dessus de sa vraie position, l'angle RAB sera donné trop grand par l'observation. La différence de ces deux angles sera donc trouvée un peu trop faible, et ce qui lui manquera est la somme des deux erreurs causées par la réfraction qui, par ce moyen, sera connue et déterminée.

727. **Exemple.** Boscovich et Maire rapportent (*de Expeditione litterariâ*) qu'observant, de l'embouchure de *l'Ausa*, la cime du mont *Carpegna*, ils trouvèrent l'angle RAB d'élévation apparente (que j'appelle h) = 2° 7'. Du point R ils observèrent *l'angle de dépression apparente* IRA (que je nomme d) = 2° 24' 10". (La dépression *vraie* serait l'angle formé par RA et par une corde parallèle à AE, qui, partant du point R, se terminerait au rayon CA prolongé). Donc $d - h$ = 17' 10". Mais la distance AR, réduite, pour plus d'exactitude, à AE, avait déjà été calculée, par la méthode donnée (92), de 18218,25 toises; ce qui donne C = 19' 9", (696). La somme des deux réfractions est donc 19' 9" — 17' 10" = 1' 59", et la demi-somme est 59",5; donc on a 2° 6' 0",5 pour la valeur réelle de l'angle RAB, et 2° 25' 9",5 pour celle de IRA.

728. Quand on a calculé l'angle C, on connaît aussi BAE = $\frac{1}{2}$ C, puisque l'angle formé par la tangente et par la corde, est égal à la moitié de l'arc intercepté. On trouve dès-lors promptement la hauteur RE par la solution du triangle REA. En le considérant, pour abréger, comme rectangle en E, on a RE = AE tang. RAE = 18218,25 × tang. 2° 15' 55" = 718,92.

On arrive plutôt encore au même résultat, et sans calculer la réfraction, par cette formule de M. Delambre, RE = AE tang. $\frac{1}{2}(h+d)$. En effet $\frac{1}{2}(h+d) = \frac{1}{2}$(2° 7' + 2° 24' 10") = 2° 15' 55", valeur ci-dessus de RAE.

729. Quand la différence de hauteur, entre deux objets, est très-petite, on peut avoir un angle de dépression, tant d'un côté que de l'autre. Alors les deux horizons se rencontrent entre les deux objets. Par exemple le point B observé du point E, est déprimé de la quantité BEF, EF étant l'horizon du point E; et si du point B, ayant BR pour horizon, on observe le point E, on le voit déprimé de la quantité RBE. En procédant, comme on a vu (726), on trouvera dans ce cas BCR = BEF + RBE; et comme chacun de ces deux angles paraît, à cause de la réfraction, plus petit qu'il n'est réellement, leur somme dans ce cas sera moindre que BCR, de la somme des deux réfractions. Fig. a

730. En faisant un grand nombre d'observations de ce genre, on peut en conclure une règle ordinairement assez juste pour corriger l'effet de la réfraction sur un angle observé, lorsqu'on ne peut ou qu'on ne veut pas déterminer chaque fois cette correction par l'observation des deux angles. Boscovich et Maire établissent que l'effet de la réfraction est la 18[e] partie de l'arc de la Terre intercepté; ce qui se trouve à-peu-près exact dans l'exemple (727), dans lequel C étant de 19′, la réfraction donnée par l'observation est de 1′. Selon Lambert, (*Propriétés remarquables de la route de la Lumière*, 109), la réfraction est la 14[e] partie de l'arc de la Terre intercepté : MM. de la Lande, et quelques autres, ont adopté de même la 14[e] partie : MM. Laplace et Delambre évaluent ce rapport à 0,08. On peut prendre le milieu entre ces estimations; car à cause de l'inconstance des réfractions, on ne doit pas compter sur une très-grande précision. Boscovich et Maire enseignent que moins l'objet est élevé sur l'horizon, plus la réfraction est sujette à varier d'un moment à l'autre. Ils recommandent d'éviter, pour ces observations, les heures trop voisines du lever et du coucher du soleil, et de ne pas avoir le soleil en face. Observons de plus, que les réfractions sont en général très-irrégulières, lorsque quelque cause météorologique fait varier rapidement le baromètre.

731. La hauteur des montagnes peut difficilement être déterminée avec précision par les méthodes précédentes; l'angle d'élévation est toujours trop petit, de sorte qu'une légère erreur dans la mesure de cet angle (624) en produit une sensible dans la hauteur

cherchée. Et il est très-facile de commettre une erreur d'une minute au moins, soit par l'inconstance des réfractions, soit par la difficulté de l'observation, attendu les vacillations que les objets terrestres paraissent éprouver dans la lunette à raison des vapeurs de l'atmosphère, soit enfin parce que le vent permet rarement de faire avec exactitude l'observation très-essentielle du fil à plomb (719).

Fig. 31. Supposons que les observations du P. Maire aient été affectées d'une erreur de 35" en plus dans l'angle RAE, (728) ; on trouvera que 18218,25 × tang. 2° 15′ = 715,8. Donc une erreur de 35" seulement en produit une de près de quatre toises sur la hauteur cherchée de la montagne. Et Boscovich prévient (Liv. 4, art. 258) que la dernière des causes que nous venons de citer, c'est-à-dire l'oscillation du fil à plomb, occasionnée par l'agitation de l'air, peut seule avoir apporté dans ces observations une erreur de plus d'une minute.

732. Pour mesurer plus exactement et avec plus de sureté la hauteur d'une montagne, il vaut mieux se servir du baromètre, en observant les préceptes de M. de Luc dans ses *Recherches sur les modifications de l'atmosphère*, et surtout en faisant usage de la formule donnée par M. Laplace, (Mécanique Céleste, Tome IV, pag. 289 et suiv.).

De la mesure des distances.

Fig. 7. 733. Soit BC la largeur d'une rivière, ou un intervalle quelconque, dont l'un au moins des points extrêmes, par exemple C, soit accessible ; on demande la valeur de BC.

Je mesure (694 et suiv.) une base comme AC, dans la direction et de la longueur les plus convenables (768 et suiv.). Je relève (705 et suiv.) les angles A et C ; le troisième, B, me sera connu, et je calculerai la distance BC, comme dans l'exemple (92).

734. Si on opère avec la planchette, on procédera comme il suit. On formera sur le papier, de la manière indiquée (701), un angle *a* égal à l'angle A sur le terrein; on plantera un piquet au point A ; on transportera la planchette en C; et là, après avoir

placé, au moyen des pinnules, la ligne *ca* dans le plan vertical de CA, et de sorte que le point *c* réponde d'à-plomb au point C, on tournera l'alidade, en la centrant au point *c*, jusqu'à ce que l'objet situé en B se trouve de même au milieu des pinnules. Alors on mènera le long de la règle la ligne *cb* jusqu'à la rencontre de la ligne *ab*; et on aura sur le papier un triangle *cab* semblable au triangle CAB sur le terrein. En supposant que la base mesurée AC soit de mille mètres, si on appelle x le nombre des mètres de l'intervalle cherché BC, on aura $ac : bc :: 1000 : x = 1000 \times \frac{bc}{ac}$. Pour connaître x, il suffit donc de connaître le rapport entre *bc* et *ac*; or on a facilement ce rapport par une échelle quelconque de parties égales, en déterminant exactement avec un compas combien de ces parties répondent à l'intervalle *bc*, et combien à l'intervalle *ac*.

Il est évident que la longueur de *ac*, qui représente la base sur le papier, est arbitraire, et que de cette ligne dépend la grandeur du triangle *abc*.

735. Déterminer la distance CD, dont les deux points extrêmes sont l'un et l'autre inaccessibles. Fig. 32.

Mesurez une base AB, que vous choisirez aussi avantageusement qu'il sera possible (768 et suiv.) : relevez, du point B, les angles CBD, CBA, et du point A, les angles CAD, DAB; dans les triangles CAB, DAB, vous connaîtrez alors les trois angles et un côté AB; calculez (IV. 1e) les côtés AC, AD, ou les côtés BC, BD; et deux côtés avec l'angle compris vous étant connus dans le triangle CAD, ou dans le triangle CBD, vous trouverez (IV. 3e) le troisième côté, qui est la distance cherchée CD.

736. Si les angles ont été pris avec la planchette, les lignes tirées sur le papier seront 1°. la base *ab* d'une longueur à volonté; 2°. les lignes indéfinies *ac*, *ad*, que l'on mène, en relevant les angles au point A; 3°. les lignes *bc*, *bd*, menées respectivement jusqu'à la rencontre des deux précédentes, pour former les angles relevés du point B. Cela posé, entre les points d'intersection *c* et *d* on mènera la ligne *cd*, et on aura sur le papier une figure *abdc*, semblable au quadrilatère ABDC sur le terrein; et par conséquent,

Fig. 32. le nombre des mètres de AB étant connu, on aura par une échelle de parties égales, le rapport $\frac{cd}{ab}$, et on déduira de la proportion $ab : cd :: AB : CD$ la valeur en mètres de la distance cherchée CD.

737. On voit combien l'usage de la planchette est commode; puisqu'elle donne les distances, sans qu'il soit besoin de connaître la grandeur des angles, ni de résoudre aucun triangle. Observons cependant qu'elle les donne avec moins de précision, les opérations graphiques ne pouvant jamais atteindre à l'exactitude du calcul.

738. Si les points A, B, C, D, ne sont pas tous dans un même plan, la somme des angles CAD et DAB, mesurés dans le plan de chaque triangle respectif, ne sera pas égale à l'angle CAB, comme nous le verrons bientôt (764), et de même on n'aura point $CBD + ABC = ABD$. Cette erreur ne peut être corrigée dans l'usage de la planchette; mais elle est ordinairement légère et même insensible. Dans les opérations délicates on se sert du quart de cercle, et on corrige l'erreur par le calcul, (745 et suiv.), ou, pour éviter toute erreur sur la distance cherchée CD, on mesure aussi les angles CAB, ABD, et on n'emploie pour la solution de chaque triangle (735) que les angles de ce triangle, qui ont été donnés immédiatement par l'observation.

739. Si on ne pouvait mesurer commodément une base AB, telle que de deux de ses points, A et B, on pût découvrir les objets C et D; alors on ferait, pour déterminer la distance AB, les opérations indiquées (733, 734), ou celles qui ont été exposées (735, 736), selon que se trouvera située la base qu'on pourra mesurer. L'intervalle AB étant ainsi connu, on en déduira CD, comme nous l'avons dit.

Il est facile de concevoir qu'une seule base étant mesurée, on peut, en ne mesurant plus que les angles, passer de triangle en triangle, et déterminer les distances respectives de tous les lieux d'une province, d'un royaume, etc.

De la réduction des angles au centre de la station.

740. Il arrive rarement qu'on puisse relever un angle en établissant l'instrument au centre de l'objet qu'on a observé des autres points de station. Si cet objet est, par exemple, la croix d'un clocher, la cime d'un arbre, une cheminée, etc., l'angle relevé ne peut être le même que s'il eût été observé précisément du centre de ces signaux, et il faut alors le réduire à ce point. La correction n'est ordinairement que de quelques secondes; on ne la calcule alors que dans les opérations où l'on apporte le plus grand scrupule. Voici comment on la détermine.

741. Soit *mnro* la base d'un clocher dont la pointe élevée verticalement sur le centre C, a été observée de la station A ou B, en relevant l'angle CAB ou ABC; et soit ACB l'angle qu'on veut connaître. Si l'on ne peut placer commodément l'instrument qu'au point E, l'angle observé sera AEB; il faut le réduire à l'angle ACB. Pour y parvenir, faisons ACB — AEB $= \delta$E, et observons que les deux triangles ACB, AEB ont un côté commun AB; nous aurons (687), au moyen de la formule (S), (673), Fig. 33.

$$\delta E = -\left(\frac{\delta AE \cot. A}{AE} + \frac{\delta BE \cot. B}{BE}\right) R'.$$

742. Pour calculer cette formule, il faut connaître δAE et δBE. Si on prend AD = AG = AE, AF = AC, on aura δAE = GC = DF. Quand on ne pourra mesurer GC, il sera toujours facile de mesurer DF, en prenant à vue d'œil sur le terrein deux points, D, F, à-peu-près aussi distans du point A, que les points E et C; les petites erreurs sur cette mesure sont insensibles dans le calcul. (On s'y prendrait de même pour connaître δBE = CH). Quant aux autres quantités de la formule, il suffit de les connaître à-peu-près.

743. Il y a un moyen plus expéditif, qui est celui qu'on enseigne ordinairement, mais qu'on n'a appliqué aux différens cas que par des règles un peu étendues. Il consiste à mesurer GE, EH. Alors on a GAE $= \frac{GE}{AE} \times R'$, en prenant l'angle GAE au lieu du

Fig. 33. sinus; on a de même $EBH = \frac{EH}{BE} \times R''$: or $GAE + EBH = AEB - ACB$; et par conséquent

$$GAE + EBH = - \delta E.$$

On donnera le signe négatif au petit angle GAE, quand il sera en dedans de l'angle BAE; on en usera de même pour le petit angle EBH, quand il sera en dedans de l'angle ABE.

744. Concluons qu'il y a deux positions à choisir de préférence, lorsqu'on le peut. La plus avantageuse est d'établir le centre de l'instrument en un point comme G ou H, sur la direction de l'une des lignes AC ou BC. Alors l'un des deux petits angles est nul, et le calcul de l'autre seulement donne la réduction au centre par le moyen de la dernière équation. Si l'on ne peut prendre cette position, on placera, s'il est possible, l'instrument de manière qu'on ait $\delta AE = 0$, ou $\delta BE = 0$. Alors le calcul de la formule (741) sera réduit à un seul terme.

De la réduction des triangles d'un plan à un autre plan.

745. Après la réduction de chaque angle observé, au centre de chaque station respective, il faut ordinairement réduire les parties d'un ou de plusieurs triangles à un même niveau.

Fig. 34. Supposons que les lignes AP, AE, PE soient trois cordes d'arcs terrestres, ou, ce qui revient au même, que les points A, P, E soient à égale distance du centre de la Terre; supposons encore le point R plus élevé que ces trois points, de la quantité RE : il s'agit de réduire au triangle APE le triangle APR, dont les parties auront été déterminées par les méthodes précédentes. Nous considérerons RE comme étant perpendiculaire aux cordes AE, PE, quoique chacun des angles REA, REP, soit égal à 90°, plus la moitié de l'arc soutenu par chacune de ces cordes respectivement, comme il est aisé de le voir dans la figure 31, pour l'angle REA formé par une corde et une sécante. Dans la pratique, il ne résulte qu'une erreur insensible de cette supposition, d'ailleurs très-avantageuse pour simplifier les corrections et trouver des règles générales pour la réduction des triangles d'un plan à un autre.

746. Avant d'aller plus loin, il est bon de se convaincre que les parties du triangle APR ne sont point égales aux parties correspondantes du triangle APE, à l'exception du côté commun AP. En effet AR est $>$ AE, comme il est facile de le reconnaître dans la fig. 31. Par la même raison PR est $>$ PE; et en comparant les triangles APR, APE aux triangles ACB, AEB de la fig. 33, qui sont dans les mêmes circonstances, mais couchés sur un plan commun, on verra d'un coup-d'œil que le triangle qui a deux côtés plus longs, n'a pas les angles égaux à ceux du triangle qui a deux côtés plus courts.

747. Cela posé; on demande que le triangle APR soit réduit au triangle APE, dont les trois sommets A, P, E, sont supposés à une égale distance du centre de la Terre. Nous appellerons *horizon commun* de ces trois points, la section ou le plan qui leur est commun. Cherchons d'abord l'angle PAE, étant donnés l'angle PAR et l'angle vrai d'élévation RAE, (722).

Dans les deux triangles rectangles AER, PER, qui ont un côté commun RE, on a $RE^2 = AR^2 - AE^2 = PR^2 - PE^2$; donc $AR^2 - PR^2 = AE^2 - PE^2$. Ajoutant des deux côtés AP^2, et divisant l'équation par 2AP, on aura $\frac{AP^2 + AR^2 - PR^2}{2AP} = \frac{AP^2 + AE^2 - PE^2}{2AP}$. Donc (576), cos. PAR $\times$ AR $=$ cos. PAE $\times$ AE; et par conséquent (530).

$$\cos. PAE = \frac{\cos. PAR}{\cos. RAE}.$$

On trouvera de même $\cos. APE = \frac{\cos. APR}{\cos. RPE}$.

748. De là résulte cette règle générale pour réduire les angles qui ont leur sommet sur le plan de réduction : *Le cosinus de l'angle réduit est égal au cosinus de l'angle observé, divisé par le cosinus de l'angle d'élévation.*

749. Lorsqu'on aura réduit les angles en A et en P, le troisième, E, sera connu. Cependant nous allons donner une formule pour réduire, quand on le voudra, l'angle R indépendamment des deux autres. Cette formule nous sera encore utile pour la solution d'un autre problème intéressant (805).

Dans les deux triangles APR, APE, qui ont un côté commun AP, on a (III. 7ᵉ), $AP^2 = AR^2 + PR^2 - 2AR \times PR \times \cos. ARP = AE^2 + PE^2 - 2AE \times PE \times \cos. AEP$. De la dernière équation on tire $\cos. AEP = \frac{AR \times PR \times \cos. ARP - RE^2}{AE \times PE}$; ce qui donne (529, 530)

$$\cos. AEP = \frac{\cos. ARP - \sin. RAE \sin. RPE}{\cos. RAE \cos. RPE};$$

D'où je déduis cette règle pour réduire l'angle unique ayant son sommet hors du plan de réduction : *Le cosinus de l'angle réduit est égal au cosinus de l'angle observé, duquel on aura soustrait le rectangle des sinus des angles d'élévation, et qu'ensuite on aura divisé par le rectangle des cosinus de ces mêmes angles.*

750. Sous la forme qui suit, l'équation devient facile à calculer par les logarithmes.

Je nomme E, R, A, P les angles désignés dans cette équation. J'ai $1 - \cos. E = \frac{\cos. A \cos. P - \cos. R + \sin. A \sin. P}{\cos. A \cos. P} = \frac{\cos. (A \backsim P) - \cos. R}{\cos. A \cos. P}$ $= \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(R - \overline{A \backsim P}) \sin. \frac{1}{2}(R + \overline{A \backsim P})}{\cos. A \cos. P}$, (II. 24ᵉ). Donc, quel que soit le plus grand, A ou P, j'aurai toujours, (I. 7ᵉ), $2 \sin.^2 \frac{1}{2} E = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(R + P - A) \sin. \frac{1}{2}(R + A - P)}{\cos. A \cos. P}$; et par conséquent

$$\sin. \tfrac{1}{2} AEP = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(ARP + RPE - RAE) \sin. \frac{1}{2}(ARP + RAE - RPE)}{\cos. RAE \cos. RPE}}.$$

751. La réduction des côtés n'a nulle difficulté. $AE = AR \cos. RAE$, $PE = PR \cos. RPE$.

752. Quand on veut procéder avec plus d'exactitude; au lieu de faire les réductions précédentes, on peut résoudre les triangles RAE, RPE, comme obliquangles (745); et après avoir déterminé les côtés du triangle APE, calculer les angles par les formules (IV. 5ᵉ ou 6ᵉ, etc.).

753. Quoiqu'indépendamment des angles d'élévation, il soit toujours bien d'observer aussi les angles correspondans de dépression, puisqu'ils se servent réciproquement de vérification, et qu'ils donnent ensemble la valeur actuelle de la réfraction (726, 727);

cependant nous n'en faisons aucune mention dans les formules précédentes, parce qu'un triangle se réduit ordinairement au plan des points les plus bas. Au surplus les formules sont les mêmes dans les deux cas.

754. Soit maintenant le triangle ARr, dont on demande la réduction au plan AEe, où les points E, e, des lignes verticales RE, re, sont supposés à même distance du centre de la Terre, que le point A. Fig. 35.

Qu'on prolonge le plan AEe jusqu'en P, c'est-à-dire jusqu'à la rencontre de la ligne RP, menée par les points R, r. Les verticales RE, re, sont toujours supposées perpendiculaires au plan AEeP, et par conséquent aux lignes de ce même plan, avec lesquelles elles se rencontrent.

755. Voyons en premier lieu comment nous réduirons l'angle connu RAr à l'angle EAe.

Du point r imaginons sur RE une perpendiculaire, qui sera parallèle et égale à Ee. Nous aurons (531), $Rr^2 = Ee^2 + (RE - re)^2 = Ee^2 + RE^2 + re^2 - 2RE \times re = Ee^2 + AR^2 - AE^2 + Ar^2 - Ae^2 - 2RE \times re$. Donc $AE^2 + Ae^2 - Ee^2 = AR^2 + Ar^2 - Rr^2 - 2RE \times re$; et par conséquent (576), $2AE \times Ae \times \cos. EAe = 2AR \times Ar \times \cos. RAr - 2RE \times re$; ou

$$\cos. EAe = \frac{AR \times Ar \times \cos. RAr - RE \times re}{AE \times Ae} = \frac{\cos. RAr - \sin. RAE \sin. rAe}{\cos. RAE \cos. rAe};$$

formule qui, transformée par la méthode (750), devient

$$\sin. \tfrac{1}{2} EAe = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(RAr + RAE - rAe) \sin. \frac{1}{2}(RAr + rAe - RAE)}{\cos. RAE \cos. rAe}}.$$

756. Quoique les réductions se fassent d'ordinaire, comme nous l'avons dit, au niveau du point le plus bas, cependant, si des deux objets, R, r, l'un était élevé et l'autre abaissé, on changerait dans la formule le signe de l'angle de dépression.

757. *Si les angles d'élévation*, RAE, rAe, *des deux objets sont égaux*, la formule devient alors

$$\sin. \tfrac{1}{2} EAe = \frac{\sin. \frac{1}{2} RAr}{\cos. rAe}; \text{ ou}$$

le sinus de la moitié de l'angle réduit est égal au sinus de la moitié de l'angle observé, divisé par le cosinus de l'élévation.

Fig. 35. 758. Si l'un des deux objets était élevé et l'autre abaissé, de manière que l'angle d'élévation fût égal à l'angle de dépression, alors (755), $\sin.^2 \frac{1}{2} \mathrm{EA}e = \frac{\sin. \frac{1}{2} (\mathrm{RA}r + 2\mathrm{RAE}) \sin. \frac{1}{2} (\mathrm{RA}r - 2\mathrm{RAE})}{\cos.^2 \mathrm{RAE}}$ $= \frac{\cos.^2 \mathrm{RAE} - \cos.^2 \frac{1}{2} \mathrm{RA}r}{\cos.^2 \mathrm{RAE}}$, (II. 27e). Donc (I. 5e)

$$\cos. \tfrac{1}{2} \mathrm{EA}e = \frac{\cos. \frac{1}{2} \mathrm{RA}r}{\cos. r\mathrm{A}e}.$$

759. Pour réduire l'angle ARP à AEP ou AEe, par le moyen de la formule (750), il faut connaître l'angle RPE. Or si l'on observe qu'ayant PR : Pr :: RE : re, on a PR : PR — Pr :: RE : RE — re, et que PR : RE :: 1 : sin. RPE; on en conclura que Rr : RE — re :: 1 : sin. RPE $= \frac{\mathrm{RE} - re}{\mathrm{R}r} = \frac{\mathrm{AR} \sin. \mathrm{RAE} - \mathrm{A}r \sin. r\mathrm{A}e}{\mathrm{R}r}$. Prenant les sinus des angles au lieu des côtés opposés, on a

$$\sin. \mathrm{RPE} = \frac{\sin. \mathrm{R}r\mathrm{A} \sin. \mathrm{RAE} - \sin. \mathrm{AR}r \sin. r\mathrm{A}e}{\sin. \mathrm{RA}r}.$$

760. Pour réduire l'angle ArR à l'angle AeE, on réduira d'abord, au moyen de la formule (750), l'angle ArP à l'angle AeP; le supplément de celui-ci sera l'angle cherché AeE.

761. On a déjà vu (751) comment se réduisent les côtés adjacens aux angles d'élévation. Quant au côté Rr, il est facile de trouver que Ee = Rr cos. RPE.

762. J'ai donné les moyens directs pour parvenir aux réductions. Du reste, lorsque l'angle RAr est converti (755) en EAe, et les côtés AR, Ar, en AE, Ae; en résolvant le triangle EAe, on détermine ses autres parties peut-être plus promptement que par les voies indiquées (759, 760).

763. On s'épargnera les réductions précédentes, (qui ne sont point applicables à la planchette), lorsque le plan du quart de cercle ou du graphomètre sera disposé horizontalement, et que les lunettes pourront se mouvoir verticalement et se diriger vers les objets, soit au-dessus soit au-dessous du plan de l'instrument. L'angle se mesure alors sur le plan de l'horizon, puisque l'instrument est dans ce même plan, et que le mouvement vertical

de la lunette ne change rien à la position de l'alidade. Observons cependant que dans ce cas chaque angle est mesuré sur le plan horizontal de chaque station respective, et non sur un plan exactement commun à tous les angles; ensorte que si les distances étaient considérables, l'inclinaison, par exemple, de l'horizon BA Fig. 34. du point A à l'égard de l'horizon OI du point R, pourrait quelquefois mériter attention. Cette inclinaison est visiblement égale à l'angle C, ou à l'arc de la Terre compris entre les diverses stations.

764. Si l'on suppose que du point A on ait observé les distances angulaires de trois objets E, *r*, P, l'un desquels, *r*, soit plus élevé Fig. 35. que les autres, il est clair maintenant, par la formule (747), que la somme des deux angles EA*r*, *r*AP, sera plus grande que l'angle EAP, comme nous avions promis (738) de le démontrer.

765. Soit C le centre de la Terre; et soit représenté par la corde AB le plan vu de côté d'un triangle réduit, dans toutes ses Fig. 36. parties, à un horizon commun, par les méthodes précédentes. Si on veut abaisser ce triangle au plan de la corde DE, cela n'altèrera les angles en rien, puisque les deux plans sont parallèles; il faut seulement diminuer les côtés. Cette correction est facile; on a (668), $\delta AB : \delta BC :: AB : BC ::$ (609) $2 \cos. BAC : 1 :: 2 \sin. \frac{1}{2} C : 1$. Connaissant $\delta BC = BE$, quantité de laquelle on veut que le plan du triangle soit abaissé, on trouvera par l'une quelconque des trois analogies précédentes, la valeur de δAB, ou la diminution à faire sur chaque côté du triangle qu'il s'agit d'abaisser.

Quand on a une chaîne de triangles, dans chacun desquels on a fait les réductions précédentes; par la dernière réduction ci-dessus, on les ramène tous à un même niveau, s'ils ne s'y trouvent pas. Ordinairement c'est au niveau de la mer que se fait la réduction générale.

766. Si au lieu des cordes on voulait avoir les arcs correspondans, il est facile de les déduire des cordes; car la première équation (278) donne $A - 2 \sin. \frac{1}{2} A = \frac{\sin.^3 \frac{1}{2} A}{3} = \frac{(2 \sin. \frac{1}{2} A)^3}{24}$. Je n'emploie que le premier terme de la série, parce que les termes ulté-

rieurs sont insensibles. On observera que pour avoir la valeur de l'arc A, en parties de la corde exprimées, par exemple, en pieds, toises, etc., il faut diviser l'expression $\frac{(2 \sin. \frac{1}{2} A)^3}{24}$, par le quarré du rayon de la Terre exprimé en parties de même espèce que celles de la corde; ce qui est conforme aux règles données (104, 696).

Des conditions les plus avantageuses des triangles; et de la construction des signaux.

767. On ne doit pas se contenter de mesurer deux angles dans un triangle; il faut toujours, lorsqu'on le peut, mesurer aussi le troisième. Si la somme des trois angles réduits au centre des stations respectives est à très-peu-près de 180°, plus ou moins, on sera sûr de les avoir bien observés, et on partagera l'erreur également entre tous trois, lorsqu'on n'aura aucun motif particulier de douter d'une observation plus que d'une autre : si, par exemple, la somme des trois angles observés est de 180° 0′ 30″, on diminuera de 10″ chaque angle, avant de calculer les côtés et de faire la réduction à un horizon commun. Cette erreur est la plus grande qu'on puisse commettre, lorsqu'on observe attentivement, et qu'on emploie les instrumens les plus en usage (716), vérifiés avec le scrupule nécessaire, comme on peut le voir dans les Ouvrages que nous avons cités (700). Mais si le rayon du quart de cercle ou du graphomètre n'est que d'un demi-pied, l'erreur peut aller jusqu'à 3′, lorsque le nonius donne la minute; jusqu'à 6′, lorsqu'il donne les deux minutes, et ainsi de suite. Puisqu'il est donc impossible d'éviter absolument toute erreur en relevant les angles, il devient essentiel de chercher, comme nous l'avons fait (624), de quelle grandeur doivent être les angles, pour que l'erreur dans leur mesure influe le moins possible sur les côtés, dont la détermination est le but de ces opérations. Il est vrai que les circonstances locales permettent rarement de choisir les triangles conformément aux règles que nous trouverons.

L'exposition de ces règles sera néanmoins très-utile, soit parce qu'elle fournira les moyens de s'y conformer, au moins d'aussi près qu'il sera possible, soit parce que, quand on sera forcé de

s'en éloigner beaucoup, on pourra encore évaluer à-peu-près l'incertitude des résultats.

768. On sait que dans un triangle rectiligne la mesure des angles ne suffit pas (582) pour qu'on puisse déterminer les côtés : il est donc nécessaire d'avoir dans chaque triangle un côté, ou mesuré immédiatement, ou déterminé trigonométriquement par le moyen d'autres triangles dans le premier desquels il faudra toujours qu'on ait mesuré une base à la toise. Le choix de la base est donc l'opération fondamentale. Aussi nous allons chercher d'abord quelle doit être sa longueur et sa direction, en supposant qu'on soit libre de les établir l'une et l'autre à volonté.

769. Dans un triangle quelconque ABC, on a (III. 1°), AB sin. A = BC sin. C. Soit AB la base, que nous supposerons mesurée sans erreur, parce que dans ces sortes de mesures, lorsqu'on y apporte quelque attention, l'erreur ne peut être sensible, et que d'ailleurs nous ne nous proposons ici que d'examiner l'erreur des angles. Faisant donc AB constant, et différentiant l'équation, on a AB cos. $A\,\partial A = \sin. C\,\partial BC + BC \cos. C\,\partial C$. Comme on ne connaît pas la grandeur précise de chacune des erreurs ∂A et ∂C des angles A et C, (l'angle B n'entre pas dans le calcul de BC), on supposera ces erreurs égales, d'autant plus qu'elles sont commises avec un même instrument. Pour abréger, désignons par e chacune des erreurs; l'équation donnera $\partial BC = e \times \frac{AB \cos. A - BC \cos. C}{\sin. C}$; Fig. 7.

et en substituant $\frac{BC}{\sin. A}$ à $\frac{AB}{\sin. C}$, on aura

$$\partial BC = e \times BC\,(\cot. A - \cot. C).$$

Cette équation (dans le calcul de laquelle on se souviendra que e, pris en secondes, doit être divisé par R″) donne l'erreur ∂BC que produiraient dans le calcul de BC les erreurs des angles A et C. Pour que ces erreurs (supposées égales) n'influent point sur le côté BC, il suffit donc qu'on ait A = C; car il est évident qu'alors l'équation se réduit à zéro.

770. Mais comme les deux erreurs ∂A, ∂C, que la différentiation suppose dans un même sens, pourraient avoir été commises en sens opposés, et qu'alors on aurait $\partial BC = \pm e \times BC$

Fig. 7. (cot. A + cot. C), il faut chercher de quelle grandeur doivent être les angles A et C, pour que la somme de leurs cotangentes ait la moindre valeur possible; il est clair, par l'équation, que ce sera le cas de la moindre valeur de dBC. Or (II. 22), cot. A + cot. C $= \frac{\sin.(A+C)}{\sin. A \sin. C} = \frac{\sin.(A+C)}{\frac{1}{2}\cos.(A \backsim C) - \frac{1}{2}\cos.(A+C)}$, (II. 17e), ou cot. A + cot. C $= \frac{2 \sin. B}{\cos.(A \backsim C) + \cos. B}$, (III. 57e, 66e). Donc quelle que soit la grandeur de l'angle B, la valeur du second membre sera toujours la moindre possible, lorsque cos. $(A \backsim C)$ sera le plus grand possible, c'est-à-dire quand on aura $A = C$.

771. D'où nous conclurons, pour règle générale, que *la condition la plus avantageuse d'un triangle, quand on veut déterminer un côté seulement, est que la base soit égale au côté cherché.* Telle est la condition essentielle. Quant à l'angle compris B, il est sans doute avantageux, dans le cas de cot. A + cot. C, qu'il soit le plus petit possible; mais sa grandeur est indifférente dans le cas de cot. A − cot. C, (en supposant l'égalité des deux erreurs); et il est inutile de s'imposer des restrictions générales, à moins d'une nécessité générale. On donnera donc à la base la direction qui paraîtra la plus commode, en observant seulement que les angles A et C ne soient pas trop petits.

772. Puisque par la règle précédente la base doit être égale au côté cherché, il est évident que *la condition la plus avantageuse d'un triangle, quand on veut déterminer deux côtés, est que le triangle soit équilatère.*

773. Rarement il arrive que l'on puisse mesurer commodément une base qui soit aussi longue que les côtés cherchés. En supposant donc que la longueur de la base soit limitée, mais qu'au moins sa direction puisse être choisie à volonté, cherchons quelle doit être cette direction, dans le cas où l'on veut déterminer l'un seulement des deux autres côtés du triangle.

774. Soit toujours AB la base, BC le côté cherché. Il faut trouver la moindre valeur de cot. A $\mp$ cot. C, lorsqu'on ne peut avoir $A = C$.

Or, 1°. dans le cas du signe négatif, on a (III. 51e, 104e),

$$\cot. A - \cot. C = \frac{AB - BC \cos. B}{BC \sin. B} - \frac{BC - AB \cos. B}{AB \sin. B} = \frac{AB^2 - BC^2}{AB \times BC \sin. B}.$$

On suppose que, par des circonstances locales, les grandeurs de BC et de AB ne soient pas arbitraires; autrement on accourcirait BC ou on alongerait AB, jusqu'à ce qu'on eût $AB = BC$, (771). Donc, AB et BC étant constans, on voit clairement dans la dernière expression, que la moindre valeur de cot. A — cot. C a lieu lorsque $B = 90°$.

775. 2°. Dans le cas du signe positif, on a (III. 101e), $\cot. A + \cot. C = \cot. A + \frac{\sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}{AB \sin. A} = \cot. A + \sqrt{\frac{BC^2}{AB^2 \sin.^2 A} - 1}$. En raisonnant comme dans le cas précédent, on voit que la moindre valeur de la fraction sous le signe radical, aura lieu lorsqu'on aura $A = 90°$. Mais alors aussi cot. A disparaît, (49) : donc la moindre valeur de cot. A + cot. C a lieu lorsque $A = 90°$. Telle est la règle générale que donne Bouguer, (*Fig. de la Terre*, p. 88). Mais nous avons trouvé que dans le cas de cot. A — cot. C, il faut qu'on ait $B = 90°$. Donc comme les angles A et B ne peuvent être tous deux droits, il est à propos, à ce qu'il nous semble, d'embrasser tous les cas en prenant un milieu, et faisant $A = B$.

776. Si l'on applique au côté AC tout ce que nous avons dit du côté BC, on aura des résultats semblables. Donc en général, *quand la base ne peut être égale au côté ou aux côtés cherchés, la condition la plus avantageuse du triangle est que la base soit la plus longue qu'il est possible, et que les deux angles sur la base soient égaux.*

Je dis que *la base doit être la plus longue qu'il est possible*, de peur que, de ce qu'on a trouvé qu'il serait avantageux que chacun des angles sur la base fût de 90°, quelqu'un ne conclût qu'il est à propos que la base soit la plus courte possible. La règle fondamentale est que la base soit égale aux côtés cherchés (771, 772); c'est une règle qu'il ne faut enfreindre que le moins qu'il se pourra, et c'est seulement pour diminuer les erreurs qui résulteraient d'une infraction forcée, que nous disons qu'il est à propos de faire le triangle isoscèle.

777. L'équation $\delta BC = e \times BC\,(\cot. A \mp \cot. C)$ fait voir que la quantité $e\,(\cot. A \mp \cot. C)$ que nous avons examinée jusqu'à présent, constitue l'erreur δBC plus grande ou plus petite, en proportion de la grandeur de BC. En supposant donc qu'on ait
Fig. 37. le choix de déterminer une distance BC par le moyen d'un seul triangle équilatère ABC, ou bien, en la divisant en plusieurs parties, par le moyen de plusieurs triangles équilatères plus petits, BDE, EDG, etc., il convient de discuter auquel des deux partis on doit donner la préférence.

778. Soit donc BC divisé en trois parties égales BD, DF, FC, et soit BE la base au lieu de AB. En résolvant le triangle BDE, on trouve BD et DE. De là prenant DE pour base, on résoudra le triangle DGE pour trouver DG. Connaissant DG, on résoudra le triangle DGF pour trouver DF, FG; et poursuivant ainsi, on déterminera toutes les parties de BC. Or dans cette opération il faut observer qu'il y a deux causes d'erreur dans la résolution du second triangle DGE; l'une est l'erreur commise dans l'observation de ses angles, erreur dont nous avons traité jusqu'à présent; l'autre est l'erreur sur la base DE, produite par celles des angles dans la résolution du premier triangle BDE.

Pour savoir quelle erreur produit sur le côté cherché l'erreur de la base, supposons constans les angles opposés (688), et nous aurons (668) les erreurs proportionnelles à la grandeur des côtés. Soit supposée d'un pied l'erreur produite par celles des angles sur chacun des côtés BD, DE du premier triangle. Il s'ensuit que l'erreur de DG sera de deux pieds, dont un à raison du côté DE, et l'autre à raison des angles du triangle DGE. L'erreur de DF et de FG sera de trois pieds, savoir deux à cause de DG, et un à cause des angles du triangle DFG. En procédant ainsi, on trouve cinq pieds pour l'erreur de CF. Si BC eût été divisé en quatre parties, l'erreur de la quatrième eût été de sept pieds, et les erreurs croîtraient ainsi toujours en progression arithmétique, si le nombre des parties de BC était plus considérable. Maintenant si l'on somme les erreurs 1, 3, 5 pour BD, DF, FC, on aura neuf pieds pour l'erreur totale de la distance BC déterminée par le moyen de cinq triangles. Au contraire en n'employant qu'un seul triangle ABC, l'erreur ne serait que de trois pieds, c'est-à-dire du triple de l'erreur de

BD, puisque BC = 3BD, et que l'erreur provenant des angles est proportionnelle au côté cherché, comme nous l'avons vu (777). Il semble donc qu'on devrait en conclure qu'il ne faut multiplier les triangles que le moins qu'il se pourra.

779. Mais on doit réfléchir que l'erreur de neuf pieds sur BC est le résultat de l'accumulation de toutes les erreurs des cinq triangles; ce qui suppose toutes ces erreurs commises dans le même sens. Or cette accumulation non-seulement est infiniment peu probable, mais elle est même démentie et réduite, pour ainsi dire, à zéro par l'expérience. Pour des déterminations importantes et délicates, on mesure deux bases, l'une au commencement, l'autre à la fin des triangles, comme, par exemple, BE, CH; c'est le moyen le plus sûr pour vérifier la justesse des opérations trigonométriques intermédiaires. Or les Académiciens français ne trouvèrent, au Pérou, que deux pieds d'erreur entre la mesure et le calcul, sur la dernière base, à laquelle ils parvinrent par une série de 28 triangles qui servirent à déterminer une distance BC de 180 milles, ou à-peu-près de 75 lieues communes de France. De même l'erreur ne fut pas de cinq pieds sur la seconde base, après une chaîne de onze triangles, par lesquels Boscovich détermina une distance de 130 milles ou de 54 lieues environ. Et si les erreurs s'étaient accumulées, en les supposant de 15" par chaque angle, l'erreur de la seconde base eût été à-peu-près de 28 toises au Pérou, et de 19 en Italie, en faisant les calculs d'après ma supposition des triangles équilatères. On ne peut desirer une preuve plus claire de ce que démontrent d'ailleurs les règles de probabilité, que les erreurs se compensent lorsqu'on multiplie les triangles. Il est évident, au surplus, que cette compensation a lieu d'autant plus surement, lorsqu'on observe chacun des trois angles de chaque triangle, et qu'on réduit leur somme à 180°, (767).

780. Peut-être pensera-t-on que les règles précédentes sont rarement utiles, parce qu'on ne trouve pas facilement des clochers et autres objets élevés et distincts, sur lesquels on puisse diriger les instrumens, pour former des triangles avec les conditions les plus avantageuses. Mais on peut très-souvent suppléer à ces objets par des signaux plantés exprès dans les positions où on les desire. Boscovich élevait des espèces de cabanes quarrées ou circulaires,

de quatorze pieds de diamètre, et d'une élévation quelquefois plus grande, et construites avec de longues branches enfoncées profondément en terre, inclinées entre elles vers le faîte, et unies par des branches transversales assujéties avec des cordes et des clous. Ces cabanes, revêtues de feuillages, s'appercevaient, même avec de faibles lunettes, jusqu'à une distance de cinquante milles, lorsqu'elles étaient posées sur le sommet des hauteurs les plus élevées, de manière à ce que leur image fût projetée sur le Ciel. Sans cette dernière condition, il faut, pour les appercevoir, ou diminuer la distance, ou couvrir les signaux avec des draps ou autres matières tirant sur le blanc. Une toile de chanvre enduite de chaux fait distinguer le signal à vingt-quatre milles de distance. Mais ces signaux présentent un aspect différent, suivant qu'ils sont diversement éclairés par le soleil à des heures différentes. Aussi les Anglais (*Relations* citées (700)) ont-ils adopté l'usage des réverbères et autres feux dont l'éclat est vif et la matière facile à transporter.

De la manière de lever les Plans et de dresser les Cartes topographiques et les Cartes géographiques de peu d'étendue.

781. On nomme *plan* d'un terrein, d'une ville, etc., un dessin où sont tracées les lignes qui représentent les contours du terrein et de ses principales parties, de sorte que ces lignes, prises ensemble, forment une figure parfaitement semblable à celle du terrein ou de la ville considérée sur un plan horizontal, abstraction faite des élévations. Supposons qu'un clocher soit rasé au niveau du sol; la figure que formeront les bords extérieurs et intérieurs des murs du clocher, vus sur la surface plane du terrein, sera ce qu'on appelle le plan du clocher. Quand on fait le plan d'un seul bâtiment, on peut désigner l'épaisseur des murs par un double trait; mais lorsque le plan contient un espace plus étendu, on ne peut ordinairement y tracer le périmètre des édifices que par de simples lignes.

782. Un plan est *topographique*, lorsqu'il présente toutes les particularités du terrein dessiné, par exemple, les églises, les maisons ou les groupes de maisons, les moulins, les parcs, les

jardins, les deux rives des rivières, les canaux, les torrens, les aqueducs, les chemins, grands ou petits, etc. Les cartes *géographiques* désignent simplement la situation des villes, des bourgs, des forêts et des montagnes, et le cours des fleuves. Nous ne parlerons pour le moment que de celles de pays peu étendus; car la construction de la carte d'un Royaume, ou de plusieurs Etats, exige, comme nous le verrons, la connaissance de la Trigonométrie sphérique.

783. Nous avons vu (756) comment on forme avec la planchette le quadrilatère *abdc*, exactement conforme au quadrilatère ABDC sur le terrein; ou, ce qui revient au même, comment on détermine la position des deux objets C et D, relativement aux deux stations A et B. On déterminera absolument de même la position d'un nombre quelconque d'objets qu'on puisse appercevoir des stations A et B, au moyen de lignes tirées des points *a* et *b* dans la direction de chacun de ces objets, comme on a fait pour les lignes *ac*, *ad*, *bc*, *bd*. Ces lignes sont ordinairement tracées au crayon, et s'effacent avec la gomme élastique ou la mie de pain, lorsqu'on a marqué à l'encre les points C, D, etc. La base même s'efface aussi, lorsqu'on a déterminé les positions de tous les objets qui en dépendent. Fig. 32.

Si l'on veut, de plus, tracer sur le plan le contour d'un champ, d'un jardin, etc., on marquera à l'encre les lignes du périmètre, tirées successivement d'un angle à l'autre, telles que AB, BD, CD, AC, en supposant que ABDC soit le contour du champ, du jardin, etc.

784. Quant aux objets qu'on ne verrait des stations A et B que sous des angles trop inégaux (772, 776), on fera bien de se transporter, pour déterminer leurs positions par l'observation, aux extrémités de l'un des côtés (par exemple de AC, ou de CD, ou de BD, etc.) qu'on aura d'abord déterminés des stations A et B, et en choisissant celui de ces côtés qui donnera les angles les moins inégaux. Sur ce côté choisi, qu'on peut appeler une seconde base, on opérera de la même manière que sur la première base AB; et l'on passera ainsi de base en base, jusqu'à ce que l'on ait sur la carte la position de tous les objets qu'on veut relever.

785. La première chose que l'on doive faire est de former au bas du plan une échelle correspondante à la grandeur qu'on veut donner au dessin Sur cette échelle on prendra la longueur que doit avoir la base qu'on aura mesurée à la toise. Je suppose que cette base soit longue de mille toises, et que l'échelle soit divisée en pouces et lignes; si on prend sur cette échelle un intervalle de 8 pouces 4 lignes, ou de 100 lignes, pour représenter la base sur le papier, alors un espace d'une ligne sur le dessin, répondra à 10 toises sur le terrein. On fera ensorte que la base soit, autant qu'il sera possible, au milieu du terrein dont on levera le plan, et que les extrémités de cette base soient situées de manière que de ces points on puisse découvrir un grand nombre d'objets à comprendre dans le plan. Selon la situation de la base sur le terrein, relativement à son périmètre, on décrira de même sur le papier la ligne qui représentera la base, en la plaçant soit au milieu, soit plus haut ou plus bas, plus à droite ou à gauche, et prenant la longueur de cette ligne, comme nous l'avons dit, sur l'échelle. Cela fait, les intersections des lignes tirées d'après l'observation de chaque objet, faite de deux stations différentes, donneront la position respective de chaque objet sur la carte, et le plan sera levé.

786. Pour éviter les méprises, il est à propos d'écrire à l'extrémité de chaque ligne le nom de l'objet dans la direction duquel elle a été menée. On ne notera que quelques points des chemins, pour ne pas multiplier confusément les lignes sur le dessin; on préférera les points extrêmes et ceux des points intermédiaires qui se trouvent aux angles les plus marqués des routes; s'il ne s'y trouvait pas des objets distincts à pointer, on y ferait planter des piquets ou d'autres signaux. Tout ceci doit s'entendre aussi des rivières. Nous verrons bientôt comment on peut représenter sur le dessin les routes entières et les fleuves avec leurs tortuosités et leur largeur; de même que les contours des églises, des maisons, etc., pour lesquels il faut employer les méthodes précédentes pour déterminer sur le plan les deux points extrêmes de la largeur d'une face quelconque, en préférant toujours celle qu'on peut observer le plus favorablement de deux points de station.

787. Si le plan qu'on veut lever est celui d'une ville, il faut établir les stations dans les carrefours, et mesurer exactement à la

toise la distance de l'une à l'autre de ces stations, lorsque chacune des distances ne sera pas déterminée sur le dessin par l'intersection des lignes tirées de deux diverses stations. Il est à propos de commencer par la place la plus grande, et pour en lever le plan, d'établir à-peu-près au milieu le point de station. Du centre de l'alidade on tirera sur le papier une ligne vers chacun des angles des rues qui aboutissent à la place: on mesurera avec attention à la toise toutes les distances de chacun de ces angles, au point du terrein sur lequel répond à plomb le centre de l'alidade; ensuite l'échelle donnera les longueurs des lignes du plan, correspondantes à celles du terrein. Ayant ainsi fixé les extrémités de ces lignes, on les joindra les unes aux autres, en laissant néanmoins en blanc les intervalles correspondans à la largeur des rues qui donnent dans la place. On aura de cette manière un assez grand nombre de points fixes qui serviront pour lier entre elles toutes les rues, à partir de la place. Mais il serait trop long de détailler minutieusement tous les procédés de l'art de lever les plans; on en apprendra plus en un jour d'exercice, que par la lecture de préceptes multipliés.

788. Lorsqu'un Ingénieur fait beaucoup d'usage de la planchette, surtout à la campagne, il peut, avec le temps, être en état d'estimer à l'œil simplement les angles et les distances: muni au plus d'un demi-cercle ou d'un rapporteur, quelque petit qu'il soit, avec une alidade quelconque pour diriger le rayon visuel, il relevera les angles, à un degré près, plus ou moins; et s'il est exercé à mesurer les distances au pas, il pourra dessiner un terrein avec une exactitude très-approchante de la vérité. C'est en cela que consiste surtout l'habileté des Ingénieurs-militaires, qui ont rarement le temps et la liberté d'employer la planchette ou autres instrumens pour lever leurs plans. Les Géographes eux-mêmes n'ont souvent pas besoin d'une plus grande précision pour placer sur la carte les lieux de peu d'importance, quand ils ont déterminé avec exactitude les positions des villes et autres lieux remarquables. Rarement les cartes géographiques sont d'une échelle assez grande pour qu'un demi-mille y occupe un espace sensible.

789. La largeur des routes se mesure à la toise. Pour avoir celle des rivières, on peut mirer, de chacune de deux stations, comme

à l'ordinaire, deux objets ou signaux posés l'un en face de l'autre sur les deux rives. Mais le moyen le plus expéditif pour relever les sinuosités des routes et des rivières, ainsi que leur largeur, Fig. 38. c'est d'employer la *boussole*. Il faut qu'elle soit d'un grand diamètre, autant qu'il sera possible, très-sensible, et bien montée dans une boîte quarrée, dont les côtés doivent être parallèles aux lignes AB, CD, destinées à indiquer le nord, le sud, l'est et l'ouest. L'intérieur de la boîte doit être circulaire et divisé en 360 parties, ou même, pour avoir le demi-degré, en 720; la pointe de l'aiguille aimantée doit raser le bord de ces divisions sans les toucher, pour qu'on puisse voir avec plus de certitude et de précision à laquelle d'entre elles correspond cette pointe. En dehors de la boîte est une pièce EF de forme prismatique, parallèle au diamètre AB ou à la ligne nord et sud, et qui porte sur ses extrémités deux pinnules que l'on n'a pas dessinées sur la figure, pour éviter la confusion. La vis V sert à fixer la pièce EF, qui cependant doit pouvoir tourner à frottement dur sur la partie lisse de la vis, ensorte qu'on puisse diriger les pinnules vers les objets hauts ou bas, tandis que la boîte de la boussole reste toujours parallèle à l'horizon, pour que les mouvemens de l'aiguille s'exercent avec liberté et exactitude.

Fig. 1. 790. Cela posé, soient K, H, deux objets dont on veut prendre la distance angulaire vue du point C. De ce point on observera par les pinnules l'un des objets, par exemple K. Je suppose que dans cette position de la boussole l'aiguille aimantée se trouve dans la direction CF. La direction CK des pinnules étant parallèle au diamètre AB (fig. 38) de la boussole, il s'ensuit que l'angle que fait l'aiguille aimantée avec ce diamètre, est égal à l'angle FCK. On notera la grandeur de cet angle, indiquée par les divisions, et on tournera la boussole de manière à observer par ses pinnules l'objet H : l'aiguille aimantée prendra encore la direction CF, et indiquera dans ce cas l'angle FCH. La différence des deux angles observés sera l'angle cherché KCH.

Il est évident que si les deux objets étaient N, K, c'est-à-dire s'ils étaient situés l'un à la droite, l'autre à la gauche de la direction CF de l'aiguille aimantée, l'angle cherché NCK serait la somme des deux angles observés NCF, FCK.

791. Actuellement il nous sera facile de dessiner les sinuosités du cours d'une rivière et sa largeur. On plantera des piquets aux points D, E, F, G, H, c'est-à-dire aux points où les courbures du Fig. 39. rivage seront plus sensibles; on mesurera à la toise les distances DE, EF, FG, GH, et, avec la boussole, les angles qu'elles font entre elles. Je suppose que la direction de l'aiguille aimantée soit successivement DN, EN, FN, GN, HN. Il est clair que, du point G, par exemple, en observant l'objet H, on aura l'angle NGH, et en observant l'objet F, l'angle NGF; la somme de ces deux angles retranchée de 360°, dans le cas de la figure, donnera l'angle cherché FGH.

792. Pour ne pas multiplier trop les stations; en même temps qu'on mesurera les bases DE, EF, etc., on mesurera aussi leurs distances perpendiculaires au rivage, lorsque ces distances varieront notablement entre elles; elles sont exprimées dans la figure par les lignes ponctuées qui tombent sur GH. On mesurera de même les distances des stations G, H, etc. au rivage. Ces perpendiculaires dispenseraient d'observer les angles, pour indiquer le cours de la rivière, si l'on traçait les bases GH, FG, etc., sur le plan, dans la direction et dans les proportions de grandeur qui leur conviennent, lors du relèvement des objets au travers des pinnules ou de la planchette ou de la boussole.

On releverait par les mêmes méthodes les contours irréguliers d'un terrein, d'un bois, etc., et les tortuosités des chemins.

793. Si on veut prendre la largeur d'une rivière par le moyen de la boussole, on observera de deux stations, comme F et G, un objet ou signal S placé sur la rive opposée. En retranchant des angles NGS, NFS, les angles NGF, NFG, on aura les angles SGF, SFG. Ceux-ci, formés sur la base FG du plan, donneront le point S.

Il faut faire cette opération dans tous les points où la largeur de la rivière varie sensiblement.

794. Lorsque l'on a sur le plan l'une des faces (786) d'un édifice, d'un enclos, d'un groupe de maisons, etc. on mesure à la toise les longueurs des autres côtés, et on relève à la boussole les angles

qu'ils font entre eux; c'est ainsi qu'on peut porter tous leurs contours sur le plan.

795. On se sert aussi de la boussole pour relever les angles dans les mines, dans les souterreins. On mesure à la toise les longueurs des galeries du souterrein, et on parvient ainsi à déterminer sur terre, à ciel découvert, les directions et les sinuosités des mines, et à trouver à-peu-près le point où il est avantageux d'ouvrir un nouveau puits qui puisse aboutir à un filon donné. Mais, dans cet usage de la boussole, la direction de l'aiguille magnétique est quelquefois troublée par la proximité des mines de fer, du voisinage desquelles il faut se défier.

796. Avec la boussole et le *loch*, on peut encore lever à-peu-près le dessin d'une plage, d'un port, etc. apperçus d'un navire. La boussole donne les distances angulaires entre les promontoires et autres objets situés le long de la côte; le loch fait connaître le chemin parcouru par le bâtiment entre deux observations, faites à des heures différentes (772 et suiv.), des distances angulaires des mêmes objets. Le chemin parcouru sert de base, et sa direction est donnée par la boussole. En formant sur le plan, aux deux extrémités de cette base, tous les angles relevés, les intersections des lignes tirées de ces extrémités donneront les positions de tous les points observés.

797. Enfin la boussole est surtout essentielle pour orienter les plans; c'est à cet effet que les graphomètres sont ordinairement garnis d'une boussole, (707). Sur un plan quelconque on indique par une croix les quatre points cardinaux, en distinguant le nord par une flèche ou par une fleur-de-lys. Cette croix fait connaître la vraie position de tous les objets compris dans le plan, relativement aux points cardinaux. Il est à propos de fixer ces points avec exactitude, et de se souvenir, lors de cette opération, que l'aiguille aimantée n'indique pas précisément le vrai point du nord, et que sa déclinaison varie dans des temps et dans des lieux différens; à Paris elle est actuellement environ de 22° à l'ouest, quantité qui, comme l'on voit, ne peut pas être négligée. L'imperfection des petites boussoles dont se servent la plupart des Arpenteurs, le peu d'attention qu'ils font à la déclinaison, et la sécurité avec laquelle

ils relèvent les petits angles même, donnent lieu à de grandes erreurs dans leurs plans. Maire assure dans l'ouvrage cité (700), qu'il a observé jusqu'à 10 milles d'erreur dans des cartes particulières de quelques provinces de l'État de l'Église, et que trois villages situés réellement sur une même ligne, ont plus d'une fois formé sur la carte un triangle équilatéral.

On peut rapporter à une ligne quelconque, dans un plan, l'indication des quatre points cardinaux : il est plus sûr de la rapporter à la base. On observera l'angle que l'aiguille aimantée fait avec cette base sur le terrein, comme on a fait plus haut pour les bases DE, EF, etc.; on tiendra compte de plus, dans cette opération, de la déclinaison de l'aiguille en telle année et en tel lieu. Cet angle ainsi corrigé se formera, dans le plan, en menant sur la base une ligne tracée au crayon, laquelle indiquera le nord, et servira de règle pour former la croix dans la partie du plan où il paraîtra plus commode de la placer. L'usage est de disposer les plans de manière que la partie septentrionale occupe le haut de la carte.

798. Nous avons vu comment on se sert de la planchette et de la boussole pour relever les plans. Il ne faut pas employer la dernière lorsqu'on veut une grande précision. De même aussi on préférera le graphomètre et le quart de cercle à la planchette, surtout quand il s'agira de grands triangles et de la carte géographique d'une province.

799. Lorsqu'avec ces instrumens on a mesuré au moins deux angles dans chaque triangle, et qu'on a calculé toutes les réductions, de manière à avoir la grandeur définitive des angles sur un horizon commun, il faut les former sur la carte, en commençant par les angles sur la base. Mais en employant pour cette opération la méthode même la plus sûre (704), les lignes tirées à la main ne peuvent jamais avoir une exactitude mathématique, et les erreurs peuvent se multiplier jusqu'à rendre inconciliables les positions éloignées de la base. Pour éviter cet inconvénient et quelques autres, on a imaginé de rapporter chacun des points principaux de la carte à une seule ligne, qu'on appelle *méridienne* (1009), et dont la direction est en effet précisément du septentrion au midi. Voici comme on s'y prend.

Fig. 50. 800. Soient A, B, C, D, F, etc. les points que l'on veut placer convenablement sur la carte. Après avoir réduit tous les angles BAC, ACB, etc., il faut résoudre les triangles du polygone pour calculer toutes les distances ou les côtés AB, AC, CD, etc. On choisira un méridien qui passe à-peu-près par le milieu du polygone; telle est, par exemple, dans la figure, la ligne AN, qui représente le méridien du point A. Il faut connaître en premier lieu l'un des angles BAN, CAN. Soit ☉ le soleil couchant; on observera la distance angulaire entre le soleil et le point B, c'est-à-dire l'angle BA☉. L'Astronomie donne des règles pour connaître facilement et exactement l'angle NA☉ au moment où le soleil se couche. La différence de ces deux angles, dans le cas de la figure, est l'angle cherché BAN; en le retranchant de BAC, on a aussi CAN. Soient B*e*, C*m* perpendiculaires sur la méridienne; connaissant AB et BAN, on résoudra le triangle rectangle A*e*B pour trouver A*e*, B*e*; la première de ces lignes est *la distance* du point A *à la perpendiculaire* qui part du point B; la seconde est *la distance* du point B *à la méridienne*. De même, connaissant AC et CAN, on trouvera A*m*, C*m*, distances semblables à celles ci-dessus, relativement au point C. Retranchant AB*e* de ABC, on a CB*e*, qui, ajouté à FBC, donne l'angle FB*u*, par le moyen duquel et de FB, on trouvera F*u* ou *se*, et B*u*. Ajoutant *se* à A*e*, on a A*s*; retranchant B*u* de B*e*, on a $eu = Fs$.

On calculera de même les distances du point A à la perpendiculaire de chacun des points qu'on veut mettre sur la carte, et la longueur de cette perpendiculaire elle-même, ou la distance de chacun de ces points à la méridienne. Avec ces deux seules déterminations, on fixera sur la carte la position de chaque point, B, C, etc.

On voit donc qu'ayant une fois établi sur la carte le point A et le méridien AN, toutes les positions se marqueront indépendamment les unes des autres.

Il est clair que si au lieu de l'angle BAN qu'on déduit de l'observation du soleil couchant, on voulait avoir l'angle CAN, on le trouverait de la même manière, en observant le soleil à son lever.

801. C'est par cette méthode que, dans le siècle dernier, on a levé le plan géométrique très-étendu de la France, divisé en 180 cartes, et fondé sur la mesure de 19 bases qui confirment l'exactitude des opérations et des calculs trigonométriques sur un très-grand nombre de triangles. Mais si cette méthode diminue les erreurs qui proviennent de la main du Géographe, elle ne remédie pas à d'autres erreurs qui tiennent à la nature même de l'opération. La Terre n'est ni plane, ni ronde; elle est à très-peu-près de la forme d'un sphéroïde, ensorte que de la réduction des points A, B, C, etc., à distance égale du centre, il résulte que les plans ABC, BCF, CDF, etc. sont inclinés entre eux, et ne forment pas un même plan ACDFB : les droites B*e*, C*m*, etc. peuvent bien être perpendiculaires au plan du méridien figuré par AN, mais elles ne peuvent tomber sur une seule et même ligne droite AN, puisqu'elles sont dans les plans de leurs triangles respectifs, c'est-à-dire dans des plans différens. Nous traiterons (1200) de la réduction à la Terre sphérique, et (1563) de la réduction à la Terre sphéroïdale.

Problèmes.

802. *Déterminer la position d'un lieu, duquel on apperçoit trois points dont la position est connue, tandis que de ces mêmes points on ne peut appercevoir ce lieu;* ce qui arrive lorsque, par exemple, on ne voit que la pointe d'un clocher, à laquelle on ne pourrait s'élever pour appercevoir le lieu D d'où l'on a observé cette pointe.

Soient A, B, C les trois points dont la position est donnée, de sorte que l'on connaisse toutes les parties du triangle ABC; et soit D le lieu à déterminer; il s'agit de trouver, par l'observation des angles m, n, faite du point D, les distances BD, AD, CD. Fig. 41.

Dans les triangles ABD, ACD, qui ont un côté commun AD, on a $AD = \frac{AC \sin. ACD}{\sin. n} = \frac{AB \sin. ABD}{\sin. m}$. Donc sin. ABD : sin. ACD :: AC sin. m : AB sin. n; et par conséquent (II. 13[e]),

$$\frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(ABD + ACD)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(ABD - ACD)} = \frac{AC \sin. m + AB \sin. n}{AC \sin. m - AB \sin. n}.$$

Fig. 51. D'où résulte, par la méthode (443),

$$\text{tang.}\, a = \frac{\text{AB sin.}\, n}{\text{AC sin.}\, m}, \quad \text{et}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\text{ABD}-\text{ACD}) = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\text{ABD}+\text{ACD})\,\text{cot.}\,(45^\circ+a).$$

La somme ABD+ACD est connue, puisque le quadrilatère ABDC donne ABD+ACD = 360° — BAC — BDC. On trouve donc, par le moyen de ces formules, la valeur absolue (548) de ABD et de ACD; après quoi la détermination des distances cherchées dans ce problème n'a plus de difficulté.

Lorsque tang. $\frac{1}{2}$(ABD — ACD) se trouvera être négative, on écrira + tang. $\frac{1}{2}$(ACD — ABD), au lieu de — tang. $\frac{1}{2}$(ABD—ACD), (75).

Cette solution subsisterait, lors même que le point A serait situé sur la droite BC, pourvu que l'on connût les distances BA, AC.

803. Si l'on ne desire pas de connaître les distances AD, BD, CD, mais seulement la position convenable du point D sur une carte, on la trouve plus promptement par la construction suivante. Imaginez un cercle qui passe par les points A, B, D; vous aurez $\frac{1}{2}$AB = sin. m. Ce sinus est proportionnel au rayon du cercle supposé: il sera donc facile (39) de déterminer ce rayon, en divisant $\frac{1}{2}$AB par sin. m pris dans les tables. De même $\frac{\text{AC}}{2\,\text{sin.}\, n}$ sera le rayon du cercle qui passerait par les points A, C, D. Si donc on décrit les deux cercles, et d'un rayon tel, pour chacun d'eux respectivement, qu'on l'aura calculé, ils se couperont en A et en un autre point qui marquera sur la carte la position cherchée du point D.

804. De la construction précédente il suit clairement que si B = n, on a aussi C = m, et réciproquement; car alors les deux cercles coïncident, à cause de l'égalité des rayons. Dans ce cas, le nombre des positions du point D, qui satisferaient à la question, est infini, et le problème est indéterminé.

805. *Du sommet d'une hauteur donnée, mesurer la distance horizontale entre deux objets situés plus bas.*

Fig. 34. Soit R un point élevé de la quantité donnée RE, sur l'horizon commun aux objets A, P, et soit à déterminer, du point R, la distance AP. On prendra l'angle de distance ARP, et les angles de

dépression, ou les complémens de PRE, ARE. Le premier, ARP, se réduira à AEP, au moyen de notre formule (750); les deux autres, avec le côté RE, serviront à calculer AE, PE; et l'on aura ainsi toutes les données nécessaires pour trouver le côté AP. (IV. 3e).

Pour donner une idée des applications utiles de ce problème, il suffit de dire que comme il est facile de mesurer une hauteur avec une grande précision par le baromètre (732), on peut, d'un point saillant, sur une montagne escarpée, déterminer les positions des bourgades dans l'enfoncement des vallées, sans qu'il soit besoin de mesurer une base.

806. *Déterminer la distance d'un objet* A *perpendiculairement à la distance* CD *entre deux objets inaccessibles* C *et* D, *et la longueur des segmens de* CD *formés par la perpendiculaire.* Fig. 32.

Qu'on imagine une perpendiculaire du point A sur la ligne CD. En mesurant une base AB, et opérant comme on a dit (735), on connaîtra les valeurs des côtés AC, AD, et de l'angle compris CAD. Alors, par la formule (605), on trouvera les segmens de cet angle, et l'on aura par conséquent deux données dans chacun des deux triangles rectangles formés par la perpendiculaire; et les formules ordinaires (557) donneront la valeur de cette ligne et les valeurs des segmens de CD.

807. *Par un point accessible* A, *mener une parallèle à une droite inaccessible* CD.

Après avoir fait ce que nous avons enseigné (735) pour connaître AC, AD et CAD, on résoudra le triangle CAD, pour trouver la valeur de CDA. Alors, pour avoir la parallèle cherchée, il ne reste plus qu'à former au point A, avec la ligne AD, un angle égal à CDA. Cet angle se formera au moyen des instrumens; et en plantant des jalons dans la direction indiquée par la lunette ou par les pinnules, on aura la position de la parallèle, déterminée sur le terrein.

808. *Continuer une ligne droite sur le terrein par-delà un obstacle qui ne permet pas de voir la direction de cette ligne.* Fig. 42.

Soit CD la ligne qu'on veut continuer en EF. On choisira un point A duquel on apperçoive les objets C et D, et d'où l'on

puisse aussi découvrir le terrein où l'on cherche à déterminer la position de EF. On mesurera CD à la toise; et après avoir relevé les angles du triangle CDA, on calculera AC. On mesurera avec un instrument l'angle CAE, prenant pour AE la direction qu'on jugera la plus commode. Supposant CD prolongé jusqu'en E, on connaîtra dans le triangle CAE les angles et le côté AC, et l'on trouvera AE. Sur la direction AE donnée par l'instrument, on mesurera à la toise une distance AE égale à celle qui a été donnée par le calcul; et on connaîtra le point E par lequel passerait la ligne CD prolongée. Alors on formera en E un angle AEF égal au supplément de l'angle connu AEC, et on aura la direction cherchée EF.

809. Si la distance CD était inaccessible, il faudrait mesurer une autre base AB; en opérant sur cette base, comme nous l'avons dit (735), on déterminerait AC et AD, ou bien BC et BD, et de là l'angle DCA, ou l'angle DCB. Le reste est évident et conforme à la marche que nous venons de suivre pour trouver EF. (*)

(*) Le Cercle répétiteur, préférable au Quart de cercle et pour la commodité et même pour l'exactitude des résultats, est d'un usage assez rare jusqu'à présent en Italie. On n'y connait de même que depuis peu, les Ouvrages composés en France, dans ces derniers temps, et qui contiennent des formules nouvelles plus générales et plus précises que celles qu'elles remplacent, surtout pour les grandes mesures sur le terrein. Aussi M. Cagnoli, dans cette seconde édition, n'a-t-il presque rien ajouté aux règles qu'il avait exposées dans la première, relativement à l'usage de la Trigonométrie rectiligne sur le terrein, règles qui sont l'objet de ce 13ᵉ Chapitre. On peut consulter, à cet égard, le *Traité de Géodésie* de M. Puissant, les *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien*, par MM. Delambre et Legendre, et le premier volume récemment publié de la *Base du Système métrique décimal*, par M. Delambre. (*Note du Traducteur.*)

CHAPITRE XIV.

Résolution numérique de toutes les Équations du second, du troisième et du quatrième degré, par le moyen de la Trigonométrie.

810. TOUTE équation du *second degré* est représentée par cette formule générale :

(A)...... $x^2 + px = q$.

D'où l'on tire

(B)...... $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

811. Si p et q sont des quantités ou grandes ou fractionnaires, le calcul de cette équation devient laborieux; mais la Trigonométrie donne des moyens aussi prompts que faciles pour en tirer la valeur de x, soit exacte, soit approchée, suivant les cas. Car on sait que si la quantité sous le signe radical n'est pas un quarré parfait, il n'est pas possible d'avoir la valeur de x autrement que par approximation.

812. Si l'on examine le cas où le radical est positif, l'équation (B) se peut alors exprimer ainsi : $x = -\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$, (26).
En faisant, (438),

(C)...... tang. $A = \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

et par conséquent $\frac{1}{2}p = \frac{\cos. A\sqrt{q}}{\sin. A}$, on aura $x = -\frac{\cos. A\sqrt{q}}{\sin. A} \times \left(1 - \frac{1}{\cos. A}\right) = \frac{\cos. A\sqrt{q}}{\sin. A} \times \frac{1 - \cos. A}{\cos. A} = \frac{1 - \cos. A}{\sin. A} \times \sqrt{q}$. Donc (I. 40°)

(D)...... $x =$ tang. $\frac{1}{2}A\sqrt{q}$.

Or on a déjà par l'équation (C) la valeur de A ; on aura donc celle de x par l'équation (D).

813. Supposons maintenant, dans l'équation (B), le radical négatif; l'équation (C) sera la même, et on aura $x = -\frac{1}{2}p \times \left(1 + \frac{1}{\cos. A}\right) = -\frac{\cos. A \sqrt{q}}{\sin. A} \times \frac{1 + \cos. A}{\cos. A} = -\frac{1 + \cos. A}{\sin. A} \times \sqrt{q}$.
Donc la seconde valeur de x sera (I. 41e),

(E)...... $x = -\cot. \frac{1}{2} A \sqrt{q}$.

814. On trouvera, par la même méthode, que les formules précédentes s'appliquent aussi au cas où l'équation à résoudre (A) est de cette forme, $x^2 - px = q$. La seule différence est que la valeur négative de x est donnée par l'équation (D), et sa valeur positive par l'équation (E).

815. Soit maintenant l'équation à résoudre (A) de cette forme, $x^2 + px = -q$; on aura $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Or on sait que, lorsque q est négatif, il faut qu'il ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}p^2$; autrement la quantité sous le signe radical serait imaginaire, et il n'existerait aucune valeur réelle de x qui satisfît à l'équation.

816. Cela posé, en considérant d'abord le radical comme positif, on a $x = -\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$. Et en faisant, (442),

(F)...... $\sin. A = \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

ce qui donne $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\sin. A}$, on aura $x = -\frac{\sqrt{q}}{\sin. A}(1 - \cos. A) = -\operatorname{tang}. \frac{1}{2} A \sqrt{q}$, (I. 40e), c'est-à-dire qu'on aura l'équation (D) avec le signe négatif au second membre.

817. Considérons actuellement le radical comme négatif; ce qui n'altère pas l'équation (F) ; nous aurons $x = -\frac{1}{2}p(1 + \cos. A) = -\frac{\sqrt{q}}{\sin. A}(1 + \cos. A) = -\cot. \frac{1}{2} A \sqrt{q}$, (I. 41e); c'est-à-dire que, dans ce cas, nous aurons l'équation (E).

818. Si l'équation à résoudre (A) était de cette forme, $x^2 - px = -q$, ce qui n'altère pas l'équation (F), on trouverait par

la même méthode que dans le cas du radical négatif, la valeur de x est celle de l'équation (D), et dans le cas du radical positif, celle de l'équation (E), avec le signe positif pour le second membre.

819. Concluons que les équations (D), (E) donnent les deux valeurs de x dans tous les cas; q est-il positif? on aura l'arc A par la formule (C), et les deux valeurs de x seront toujours de signes contraires: q est-il négatif? on cherchera l'arc A par la formule (F), et les valeurs de x seront toutes deux négatives si p est positif, toutes deux positives si p est négatif.

820. Exemple. Soit à résoudre l'équation $x^2 + \frac{7}{44} x = \frac{1695}{12716}$. On aura, (C), (D),

$$\text{tang. } A = \frac{88}{7} \sqrt{\frac{1695}{12716}},$$

$$x = \text{tang. } \tfrac{1}{2} A \sqrt{\frac{1695}{12716}};$$

équations dont voici le calcul.

log. 1695 = 3,2291697
compl. log. 12716 = 5,8956495

somme 9,1248192

demi-somme 9,5624096
log. 88 = 1,94448267
compl. log. 7 = 9,15490196

somme ou log. tang. A = 0,6617942 = log. tang. 77° 42′ 31″, 72

log. tang. $\frac{1}{2}$ A = 9,9061115
demi-somme ci-dessus 9,5624096

Somme ou log. x = 9,4685211 = log. 0,2941176.

821. Pour savoir si cette valeur positive approchée de x peut être exprimée par une fraction exacte, dont les deux termes soient des nombres entiers de peu de chiffres; je prends le complément de log. x, et le considérant comme un logarithme négatif (340), je trouve — 0,5314789 = log. $\frac{1}{3,4}$ exactement; et multipliant cette fraction par 5, j'ai $x = \frac{5}{17}$.

822. Ceux qui voudront calculer cette valeur de x par le moyen de la formule ordinaire (B), auront lieu de reconnaître combien la solution trigonométrique est plus prompte et plus facile.

823. Dans le calcul précédent (820), si au lieu de log. tang. $\frac{1}{2}$ A, on emploie son complément, on aura log. $-x = 9{,}6562981 =$ log. $-0{,}4532085$. C'est la valeur approchée négative de x, selon la formule (E). Si l'on prend le complément de log. $-x$, on trouve $x = -\frac{1}{2,20649}$, ce qui n'est pas non plus une valeur exacte ; de sorte qu'on ne peut, dans ce cas, la réduire en une fraction exacte et composée d'entiers dans ses deux termes. Mais d'ailleurs il suffit d'avoir trouvé la valeur exacte de $+x$; on sait que q est le produit de toutes les racines, et que dans le cas présent les deux valeurs de x doivent avoir des signes contraires (819) ; donc, en divisant $\frac{2695}{13716}$ par $\frac{6}{17}$, on aura $-\frac{339}{748}$ pour la seconde valeur exacte de x. On peut vérifier le calcul par le moyen de cette autre règle, que la somme des deux racines doit être égale à p.

824. Passons à la solution des équations du *troisième degré*. On sait qu'après avoir fait évanouir le second terme, on peut représenter toute équation du troisième degré par cette formule générale :

(G)...... $x^3 + px + q = 0$.

La solution analytique de cette équation est

(H)... $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}\right)}$.

Je l'écris sous la forme suivante (26) : $x = \ldots\ldots\ldots$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)};$$

et faisant, (438), $\frac{4p^3}{27q^2} = \text{tang.}^2 \text{B}$, ou

(K)...... tang. B $= \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$,

il en résulte $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 - \frac{1}{\cos. \text{B}}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 + \frac{1}{\cos. \text{B}}}\right)}$.

825. Soit, pour plus de simplicité, $2\sqrt{\frac{1}{3}p} = \text{R}$, ce qui donne $p = \frac{3}{4}\text{R}^2$; l'équation (K) deviendra tang. B $= \frac{\text{R}^3}{4q}$; d'où l'on

tire $q = \frac{R^3}{4 \text{tang.} B}$. En substituant cette valeur de q, on a $x =$
$\sqrt[3]{-\frac{R^3}{8 \text{tang.} B} \times \frac{\cos. B - 1}{\cos. B}} + \sqrt[3]{-\frac{R^3}{8 \text{tang.} B} \times \frac{\cos. B + 1}{\cos. B}} =$
$\frac{1}{2} R\left(\sqrt[3]{\frac{1-\cos. B}{\sin. B}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos. B}{\sin. B}}\right) = \frac{1}{2} R(\sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B} - \sqrt[3]{\cot. \frac{1}{2} B})$,
(I. 40e, 41e), ou $x = - R \times \frac{\sqrt[3]{\cot. \frac{1}{2} B} - \sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B}}{2}$: mais (I. 38e),
$\cot. 2 A = \frac{\cot. A - \text{tang.} A}{2}$; en comparant les deux dernières équations, et faisant

(L)...... $\text{tang.} A = \sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B}$,

et parconséquent $\cot. A = \sqrt[3]{\cot. \frac{1}{2} B}$, on aura $x = - R \times \cot. 2 A$. Donc, en remettant la valeur de R, on a pour équation finale

(M)...... $x = - \cot. 2A \times 2 \sqrt{\frac{1}{3} p}$.

Ainsi l'on parvient à trouver la valeur de x par le moyen de trois équations très-simples : 1°. par l'équation (K) on trouve un arc B; 2°. par l'équation (L) on trouve un arc A; 3°. par l'équation (M) on a la valeur cherchée de x.

826. Si l'équation à résoudre (G) était de cette forme, $x^3 + px - q = 0$, alors dans la solution analytique (H), $-\frac{1}{2} q$ deviendrait positif. En procédant comme ci-dessus, on parviendrait aux mêmes équations (K), (L), (M), avec cette seule différence que le second membre de la dernière aurait le signe positif.

827. Supposons maintenant que l'équation à résoudre (G) soit de cette forme :

$$x^3 - px + q = 0;$$

ce qui rend $\frac{1}{27} p^3$ négatif dans la solution analytique (H). On aura $x =$
$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$.
Si on fait (442), $\frac{4p^3}{27q^2} = \sin.^2 B$, ou

(N)...... $\sin. B = \frac{p}{3q} \times 2 \sqrt{\frac{1}{3} p}$,

il en résulte $x = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \times \overline{1-\cos.B})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \times \overline{1+\cos.B})}$. Mais l'équation (N) donne $q = \frac{R^3}{4\sin.B}$, en faisant toujours $R = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, et par conséquent $p = \frac{3}{4}R^2$. Donc $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1-\cos.B}{\sin.B}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}R^3 \times \frac{1+\cos.B}{\sin.B}} = -R \times \frac{\sqrt[3]{\tang.\frac{1}{2}B} + \sqrt[3]{\cot.\frac{1}{2}B}}{2}$. Mais (I. 9e), $\frac{\tang.A + \cot.A}{2} = \frac{1}{\sin.2A}$. Donc, en adoptant l'équation (L), on aura $x = -\frac{R}{\sin.2A}$, ou

(O)...... $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin.2A}$.

On trouve donc ainsi la valeur de x par le moyen des trois équations (N), (L), (O).

828. On reconnaîtra que les mêmes équations servent encore, lorsque l'équation à résoudre (G) est de cette forme :

$$x^3 - px - q = 0.$$

Mais le second membre de l'équation (O) devient positif.

829. Les deux dernières formes exigent que $\frac{4p^3}{27q^2}$ ne soit pas une quantité plus grande que 1 ; autrement on ne pourrait supposer $\frac{4p^3}{27q^2} = \sin.^2B$, puisqu'un sinus ne peut jamais être plus grand que le rayon.

830. Si donc il arrive que p étant négatif, $4p^3$ soit $> 27q^2$, ou $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, la quantité $\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}$ se présente sous une forme imaginaire, et c'est ce qu'on a nommé le *cas irréductible*, parce qu'on n'a pu en trouver une solution analytique générale délivrée d'imaginaires, si ce n'est sous la forme de séries infinies. On sait cependant que, dans le cas irréductible, l'équation a ses trois racines réelles, quoiqu'elle n'en ait qu'une dans tous les autres cas que nous venons d'examiner et de résoudre.

831. Je comprends, avec d'autres Auteurs, sous le nom général de *cas irréductibles*, toutes les équations du 3e degré, qui ont trois racines réelles. Il est inutile, autant qu'étranger à mon but,

d'entrer dans les distinctions de l'analyse sur la définition précise de ce cas; d'autant plus qu'il est indifférent pour la Trigonométrie, que les racines soient rationnelles ou irrationnelles; elle découvre les unes et les autres avec une égale facilité.

832. Pour y parvenir, il faut abandonner la solution analytique embarrassée de quantités imaginaires, et, parmi les formules trigonométriques, en chercher une qui soit comparable à l'équation

$$x^3 - px \pm q = 0,$$

qu'il s'agit de résoudre.

833. Deux formules sont de cette nature, savoir la quatrième de chacune des deux tables (480, 482). Mais ponr l'usage de ceux de nos lecteurs qui n'auraient pas étudié le chap. IX, nous chercherons, par le seul secours des tables I et II, celle des formules indiquées, que nous emploierons.

$\sin. 3A = \sin. (2A + A) = \sin. 2A \cos. A + \cos. 2A \sin. A = 2\sin. A \cos.^2 A + (1 - 2\sin.^2 A) \sin. A = 2\sin. A (1 - \sin.^2 A) + \sin. A - 2\sin.^3 A$. D'où $\sin. 3A = 3\sin. A - 4\sin.^3 A$, équation qui, rendue homogène (104), devient $R^2 \sin. 3A = 3R^2 \sin. A - 4\sin.^3 A$; en divisant par 4, et transposant, on aura

(P)...... $\sin.^3 A - \frac{3}{4} R^2 \sin. A + \frac{1}{4} R^2 \sin. 3A = 0$.

834. Comparant cette équation terme à terme avec l'équation proposée (832), dans laquelle je prends d'abord q comme positif; si on fait $x = \sin. A$, on aura 1°. $p = \frac{3}{4} R^2$, ce qui donne $R^2 = \frac{4}{3} p$, et $R = 2\sqrt{\frac{1}{3} p}$; 2°. $q = \frac{1}{4} R^2 \sin. 3A = \frac{1}{3} p \sin. 3A$; d'où l'on tire $\sin. 3A = \frac{3q}{p}$. Ce sinus étant proportionnel au rayon de l'équation, qui est, comme nous venons de le voir, $2\sqrt{\frac{1}{3} p}$, il faut donc (39), pour le trouver dans les tables, le diviser par ce même rayon, et alors on aura

(Q)...... $\sin. 3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3} p}}$.

835. La valeur de 3A étant connue par cette équation, celle de A le sera aussi, et par conséquent celle de $x = \sin. A$. Mais comme sin. A se prend dans les tables, où $R = 1$, il faut en-

suite le multiplier par le rayon de l'équation. Donc

(S)...... $x = \sin. A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

836. Si dans l'équation (P) on met $360° + 3A$ au lieu de $3A$, il faudra mettre $120° + A$ au lieu de A. Mais $\sin.(360° + 3A) = \sin. 360° \cos. 3A + \cos. 360° \sin. 3A = \sin. 3A$, (73); l'équation (Q) est donc la même quand, au lieu de $x = \sin. A$, on fait $x = \sin.(120° + A)$. C'est donc une seconde valeur de x qui satisfait à l'équation (P). Mais $\sin.(120° + A) = \sin.(60° - A)$, (54). On aura donc

(T)...... $x = \sin.(60° - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

837. De même, si dans l'équation (P) on met $720° + 3A$ au lieu de $3A$, ce qui donne $240° + A$ au lieu de A, on aura aussi $\sin.(720° + 3A) = \sin.(360° + \overline{360° + 3A}) = \sin. 3A$, et l'équation (Q) subsistant toujours, on aura une troisième valeur de x, qui sera $x = \sin.(240° + A)$. Mais $\sin.(240° + A) = \sin.(180° + \overline{60° + A}) = -\sin.(60° + A)$. Donc

(Z)...... $x = -\sin.(60° + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

838. L'équation (Q) suppose évidemment (829) que l'on n'ait pas $4p^3 < 27q^2$. Aussi ces solutions ne sont applicables aux cas résolus (827, 828) que quand $4p^3 = 27q^2$ précisément: alors les formules (S), (T) donnent deux valeurs égales de x, et la formule (Z) une troisième valeur, tandis que la méthode (827) ne donne qu'une valeur de x, c'est-à-dire la dernière (Z).

839. Qu'on remarque le grand avantage des solutions trigonométriques pour le cas irréductible. Par le moyen de quatre équations seulement, (Q), (S), (T), (Z), dont le calcul est très-court, puisqu'elles renferment toutes un facteur commun, $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ces solutions font connaître les trois valeurs ou exactes ou approchées de x, valeurs que l'analyse ne trouve ordinairement que par des voies laborieuses.

840. Ces mêmes quatre équations, en changeant seulement le signe du second membre des trois dernières, donnent encore les valeurs cherchées, lorsque q est négatif, de sorte qu'on ait pour l'équation à résoudre, $x^3 - px - q = 0$. En effet, dans ce cas,

sin. 3A devenant négatif, on doit prendre 180° + 3A, (73), au lieu de 3A, et par conséquent mettre 60° + A au lieu de A. Alors les formules se convertissent, savoir (S) en (Z), (T) en (S), et (Z) en (T), avec le changement de signe.

841. On reconnaîtra facilement qu'en ajoutant plus de deux fois la circonférence du cercle (836, 837), on n'aurait jamais d'autres valeurs de x que les trois déjà trouvées : ce qui confirme la théorie des équations, suivant laquelle l'équation (P) ne peut avoir que trois racines.

Il y a donc trois sinus qui résolvent l'équation (P), savoir sin. A, sin. (60° — A), et — sin. (60° + A).

842. De la même manière que nous avons eu ces trois racines, on trouvera facilement celles de chacune des équations des tables (480 à 483). Il faut seulement observer qu'il est nécessaire d'élever au quarré celles qui sont impliquées de quantités irrationnelles; alors le nombre des racines devient double, chacune d'elles ayant deux formes, l'une positive et l'autre négative.

En général, nA étant le multiple de A, et faisant $c = 360°$, les racines des équations (480) pour n impair, et des équations (483) pour n pair, sont : sin. A, sin. $\left(\frac{c}{n} + A\right)$, sin. $\left(\frac{2c}{n} + A\right)$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière sin. $\left(\frac{(n-1)c}{n} + A\right)$. En écrivant cos. au lieu de sin., ces racines sont celles de toutes les équations (482).

Si n est pair, alors, dans la table (480), sin. nA se convertit en sin.$^2 n$A, qui équivaut à $\frac{1 - \cos. 2nA}{2}$; d'où résulte évidemment que l'arc multiple est réellement $2n$A. Ainsi, pour avoir les racines, il faut dans les quantités ci-dessus mettre $2n$ au lieu de n, si ce n'est dans le numérateur de la dernière, qui reste le même ainsi que les précédens, et donner à chacune le signe double $\pm$. Les mêmes raisonnemens s'appliquent facilement aux équations (481), et, pour n impair, aux équations (483).

Ces préceptes peuvent être appliqués par ceux de mes Lecteurs qui n'auraient pas étudié le chap. IX; puisque quand on cherche les racines d'une équation, il n'importe pas de savoir comment

elle s'est formée; et c'est pour que ces règles soient utiles à tous également, que je les ai placées ici.

843. *Exemples de la résolution des équations du troisième degré, par la Trigonométrie.*

Soit à résoudre l'équation $x^3 + 2x + 33 = 0$. C'est le cas de la formule (G). On aura donc

$$\text{tang. B} = \frac{2}{3 \times 33} \times 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{2}{99} \times \sqrt{\tfrac{8}{3}}$$
$$\text{tang. A} = \sqrt[3]{\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\text{B}}$$
$$x = -\ \text{cot.}\ 2\text{A} \times \sqrt{\tfrac{8}{3}}.$$

Voici le calcul de ces équations.

log. 8 = 0,90308999
compl. log. 3 = 9,52287875
somme 0,42596874
demi-somme 0,21298437 = log. $\sqrt{\tfrac{8}{3}}$
log. 2 = 0,30103
compl. log. 99 = 8,00436481
log. tang. B = 8,5183792
B = 1° 53′ 22″, 16
log. tang. ½ B = 8,2172311
le tiers de log. tang. ½ B, ou log. tang. A = 9,4057437
A = 14° 16′ 49″, 49
log. cot. 2 A = 0,2641368
log. $\sqrt{\tfrac{8}{3}}$ = 0,2129844
somme ou log. − x = 0,4771212 = log. − 3.

843. * Dans l'expression log. − x que nous venons d'employer, ainsi que dans l'article 823; laissant à part la question (366) sur les logarithmes des quantités négatives, nous entendons (et nous entendrons toujours) que le logarithme d'une quantité négative est le même que celui de la même quantité positive; ensorte qu'en écrivant (823), log. − x = 9,6562981, nous n'avons d'autre but que d'avertir le Calculateur qu'il doit donner le signe négatif à la valeur de x, c'est-à-dire au nombre correspondant à ce logarithme, lorsque les tables lui auront donné ce nombre.

844. Proposons-nous maintenant de résoudre l'équation $x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0$, dans laquelle p étant négatif, il faut d'abord reconnaître combien de racines réelles elle doit avoir. Or $4p^3 = 4 \times (\frac{403}{441})^3$, et $27q^2 = 27 \times (\frac{46}{147})^2$; et $\log. 4p^3 = 0{,}485$, $\log. 27q^2 = 0{,}422$. Donc $4p^3 > 27q^2$. C'est donc le cas que l'analyse regarde comme *irréductible*. Nous aurons par conséquent (Q),

$$\sin. 3A = \frac{3 \times 46}{147} \times \frac{441}{403} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{403}{3 \times 441}}} = \frac{414}{403} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1612}{1323}}}.$$

Les trois valeurs de x seront donc

1°. $x = \sin. A \sqrt{\frac{1612}{1323}}$;

2°. $x = \sin. (60° - A) \sqrt{\frac{1612}{1323}}$;

3°. $x = -\sin. (60° + A) \sqrt{\frac{1612}{1323}}$.

Voici le calcul de ces quatre équations.

log. 1612 =	3,2073650	
compl. log. 1323 =	6,8784402	
somme	0,0858052	
demi-somme	0,0429026	log. constant
compl. du log. constant	9,9570974	
log. 414 =	2,6170034	
compl. log. 403 =	7,3946949	
Donc log. sin. 3 A =	9,9687927	= log. sin. 68° 32′ 18″, 55
log. sin. A =	9,5891206	
log. constant	0,0429026	
1°............ log. x =	9,6320232	= log. 0,4285714
log. sin. (60° — A) =	9,7810061	
log. constant	0,0429026	
2°............ log. x =	9,8239087	= log. 0,6666666
log. sin. (60° + A) =	9,9966060	
log. constant	0,0429026	
3°......... log. $-x$ =	0,0395086	= log. — 1,095238

845. On observera en premier lieu que la valeur négative est égale à la somme des deux positives, comme elle doit l'être; ce qui prouve l'exactitude du calcul. Ensuite il est facile de voir que la seconde valeur de x est $\frac{2}{3}$. Pour savoir si les deux autres valeurs peuvent être de même exprimées par des fractions exactes, on aura recours à l'expédient que j'ai suggéré (821), et on aura pour la première valeur, compl. log. $x = -0{,}3679768 = \log. \frac{1}{2{,}333333}$; et il est aisé de voir qu'en multipliant par 3 la dernière fraction, on a $x = \frac{3}{7}$. En effet log. $\frac{3}{7}$ est 9,6320232, c'est-à-dire précisément le logarithme de la première valeur de x. Mais la valeur négative doit être égale à la somme des deux positives, prises avec un signe contraire; elle sera donc $-\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = -\frac{23}{21}$. On aura donc, pour les trois valeurs de x dans l'équation donnée, $+\frac{2}{3}$, $+\frac{3}{7}$, $-\frac{23}{21}$. En substituant séparément chacune d'elles dans l'équation, on pourra s'assurer de leur justesse.

846. J'ai rassemblé les solutions de toutes les équations du second et du troisième degré, dans la table V, qui a paru utile en ce qu'elle guide le calculateur, sans travail et avec sureté. Je vais m'occuper de la solution générale de l'équation du quatrième degré.

Je suppose qu'on ait fait évanouir le second terme de cette équation : ce qui se peut toujours, comme on le démontre en Algèbre; et je la représente par la formule générale

$(\text{r})\ldots\ldots\ x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$

Puis, je la partage en deux facteurs du second degré, par exemple $(x^2 + mx + n)$, $(x^2 - mx + r)$; leur produit me donne $x^4 + (n + r - m^2)\,x^2 + m\,(r - n)\,x + nr = 0$; d'où résulte $A = n + r - m^2$, $B = m\,(r - n)$, $C = nr$. Donc aussi $r + n = A + m^2$, $r - n = \frac{B}{m}$, équations qui, par addition et soustraction, donnent les deux suivantes :

$(\text{v}).\ \ldots\ 2r = A + m^2 + \frac{B}{m}; \quad 2n = A + m^2 - \frac{B}{m}.$

Or le produit de ces deux dernières est $4nr = A^2 + 2Am^2 + m^4 - \frac{B^2}{m^2}$, ou, en substituant $4C$ à $4nr$,

$$(\varphi)\ldots\ldots m^6 + 2Am^4 + (A^2 - 4C)m^2 - B^2 = 0,$$

équation du 3e degré, en faisant $m^2 = y$. Sa solution donne la valeur de m; puis l'on obtient, des équations (υ), les valeurs de r et de n. On a par conséquent les quatre valeurs de x, au moyen des équations $x^2 + mx + n = 0$, $x^2 - mx + r = 0$; et ces valeurs sont

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - n)}, \text{ ou}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}m^2 + \frac{B}{2m}\right)};$$

et

$$x = +\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - r)}, \text{ ou}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}m^2 - \frac{B}{2m}\right)}.$$

847. L'équation (φ) renferme six valeurs de m; mais les trois positives sont égales respectivement aux trois négatives, comme le fait voir l'équation $m^2 = y$, qui donne $m = \pm\sqrt{y}$. Substituant cette valeur de m dans l'équation (φ), elle devient $y^3 + 2Ay^2 + (A^2 - 4C)y - B^2 = 0$. Pour chasser le second terme, je fais $y = z - \frac{2}{3}A$; il en résulte l'équation finale à résoudre, qui est

$$(\chi)\ldots\ldots z^3 - (\tfrac{1}{3}A^2 + 4C)z + (\tfrac{8}{3}AC - \tfrac{2}{27}A^3 - B^2) = 0.$$

848. Pour trouver la valeur ou les valeurs de z, par le moyen de la Trigonométrie, ma table V offre les formules qui suivent.

1er cas. Si $4(\frac{1}{3}A^2 + 4C)^3 < 27(\frac{8}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2)^2$, on a

$$(\Psi)\ldots\ldots \sin. D = \frac{\frac{1}{3}A^2 + 4C}{8AC - \frac{2}{9}A^3 - 3B^2} \times 2\sqrt{(\tfrac{1}{9}A^2 + \tfrac{4}{3}C)} = \ldots\ldots$$

$$\frac{A^2 + 12C}{24AC - \frac{2}{3}A^3 - 9B^2} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)},$$

$$\text{tang. } E = \sqrt[3]{\text{tang. } \tfrac{1}{2}D},$$

$$(\omega)\ldots\ldots z = -\frac{\frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}}{\sin. 2E}.$$

2me. cas. Si $4(\frac{1}{3}A^2 + 4C)^3 >$ ou $= 27(\frac{8}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2)^2$, on a, après avoir fait le calcul du second membre de l'équation (Ψ), auquel je donne encore, quoique improprement dans ce cas, le nom de sin. D,

$$\sin. 3F = \frac{1}{\sin. D},$$

$$z = \pm \sin. F \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)},$$
$$z = \pm \sin.(60^\circ - F) \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)},$$
$$z = \mp \sin.(60^\circ + F) \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)};$$

dans lesquelles trois valeurs de z, il faut prendre le signe supérieur, lorsque q, dans la table V, ou la quantité qui lui correspond dans l'équation (χ), a le signe positif; on prendra le signe inférieur, si cette quantité correspondante à q est négative.

849. Dans le calcul des équations précédentes, à commencer de l'équation (Ψ), il faut changer les signes des quantités A, C, suivant que chacune de ces quantités se trouverait négative dans l'équation (τ). Si la quantité C est négative, et qu'on ait de plus $4\,C > \frac{1}{3}\,A^2$; alors le second terme de l'équation (χ) devient positif; et il faut écrire, dans l'équation (Ψ), tang. D au lieu de sin. D; dans les équations (Ψ, ω), $-(A^2 + 12C)$ au lieu de $(A^2 + 12C)$; et dans l'équation (ω), tang. 2E au lieu de sin. 2E.

850. Voici l'apperçu du calcul à faire, et des règles à suivre dans les divers cas.

Équation à résoudre; $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$.
Si dans cette équation les signes de A et de C étaient négatifs, il faudrait les changer dans les équations qui suivent. On y fera $A = 0$, si le second terme manque dans cette même équation. Enfin on observera toujours les règles (73) des signes pour les lignes trigonométriques.

$$\text{Sin. } D = \frac{A^2 + 12C}{24AC - \frac{2}{3}A^3 - 9B^2} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)},$$
$$\text{tang. } E = \sqrt[3]{\text{tang. } \tfrac{1}{2} D},$$
$$z = -\frac{\frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}}{\sin. 2E}.$$

Si C a le signe négatif, et que de plus on ait $12\,C > A^2$, substituez dans ces formules $-(A^2 + 12\,C)$ au lieu de $A^2 + 12C$, tang. D au lieu de sin. D, et tang. 2E au lieu de sin. 2E.

Mais si par le résultat du calcul on a $\sin. D > 1$, alors z a trois valeurs réelles; et, au lieu des deux dernières formules, on a

$$\sin. 3F = \frac{1}{\sin. D},$$

$$z = \sin. \mathrm{F} \times \tfrac{2}{3} \sqrt{(\mathrm{A}^2 + 12\mathrm{C})},$$
$$z = \sin. (60^\circ - \mathrm{F}) \times \tfrac{2}{3} \sqrt{(\mathrm{A}^2 + 12\mathrm{C})},$$
$$z = -\sin. (60^\circ + \mathrm{F}) \times \tfrac{2}{3} \sqrt{(\mathrm{A}^2 + 12\mathrm{C})},$$
$$m = \sqrt{(z - \tfrac{2}{3}\mathrm{A})}.$$

La dernière équation a lieu dans tous les cas. Et quand z a trois valeurs, tirez-en autant de valeurs pour m; chacune d'elles substituée dans les deux équations qui suivent, produira les quatre mêmes valeurs pour la quantité inconnue

$$x = -\tfrac{1}{2} m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{3}\mathrm{A} - \tfrac{1}{4} z + \frac{\mathrm{B}}{2m}\right)},$$
$$x = +\tfrac{1}{2} m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{3}\mathrm{A} - \tfrac{1}{4} z - \frac{\mathrm{B}}{2m}\right)}.$$

851. EXEMPLE I. Soit proposée l'équation $x^4 + 3x^2 + 30x + 32 = 0$.

Alors $\mathrm{A} = 3$, $\mathrm{B} = 30$, $\mathrm{C} = 32$. Donc

$$\sin. \mathrm{D} = \frac{9 + 12.32}{24.96 - 18 - 9.900} \times \tfrac{3}{2} \sqrt{(9 + 4.96)} = \frac{131}{-1938} \times \tfrac{3}{2} \sqrt{393}$$

$\log. 393 = 2,5943926$	$\mathrm{D} = 243^\circ\ 17'\ 51'',04$
moitié....... $1,2971963$	$\tfrac{1}{2}\mathrm{D} = 121\ \ 38\ \ 55,52$
$\log. 2 = 0,3010300$	$\log. -\mathrm{tang.}\ \tfrac{1}{2}\mathrm{D} = 0,2101530$
compl. $\log. 3 = 9,5228787$	$\log. -\mathrm{tang.}\ \mathrm{E} = 0,0700510$
	$\mathrm{E} = 130^\circ\ 23'\ 56'',58$
$\log. \tfrac{2}{3}\sqrt{393} = 1,1211050$	$2\mathrm{E} = 260^\circ\ 47'\ 53'',16$
$\log. 131 = 2,1172713$	$\log. -\tfrac{2}{3}\sqrt{393} = 1,1211050$
compl. $\log. 1938 = 6,7126462$	compl. $\log. -\sin. 2\mathrm{E} = 0,0056252$
$\log. -\sin. \mathrm{D} = 9,9510225$	$\log. z = 1,1267302$

$$z = 13,388446,$$
$$m = \sqrt{(13,388446 - 2)} = \sqrt{(11,388446)}$$
$$\log. 11,388446 = 1,0564644$$
moitié $0,5282322 = \log. m = \log. 3,374677$

$$x = -1,687339 \pm \sqrt{\left(-1 - 3,347111 + \frac{30}{6,749354}\right)} = \ldots.$$
$$-1,687339 \pm \sqrt{0,097757} = -1,687339 \pm 0,312661.$$

On a donc $x = -2$; $x = -1,374678$.

Les deux autres valeurs sont imaginaires.

852. Exemple II. Soit l'équation à résoudre

$$x^4 - 3x^2 + 30x + 56 = 0.$$

Alors $A = -3$, $B = 30$, $C = 56$. Donc

$$\sin. D = \frac{9 + 12.56}{-24.3.56 + 18 - 9.900} \times \tfrac{2}{3} \sqrt{(9 + 672)} = \frac{237}{-4038} \times \tfrac{2}{3} \sqrt{681}.$$

En faisant les calculs conformément à ce qui a été dit (850), on trouvera

$$D = 257^\circ\ 57'\ 40'', 67 \qquad E = 132^\circ\ 58'\ 49'', 05$$
$$z = 17, 44064 \qquad m = \sqrt{19, 44064} = 4, 409154$$
$$x = -2 \qquad x = -2, 40916,$$

et les deux autres valeurs sont imaginaires.

853. Exemple III. Soit à résoudre l'équation $x^4 - 3x^2 - 30x - 88 = 0$, qui donne $A = -3$, $B = -30$, $C = -88$. Alors C est négatif, et $12C > A^2$. On a donc

$$\text{tang.} D = \frac{12.88 - 9}{24.3.88 + 18 - 9.900} \times \tfrac{2}{3} \sqrt{(12.88 - 9)} = \frac{349}{-582} \times \tfrac{2}{3} \sqrt{1047}$$

$$D = 94^\circ\ 25'\ 13'', 94 \qquad E = 45^\circ\ 44'\ 14'', 66$$

$$z = -\cot. 2E \times \tfrac{2}{3} \sqrt{-(A^2 + 12C)} = -\cot. 2E \times \tfrac{2}{3} \sqrt{1047} = +0, 555382$$

$$m = \sqrt{2, 555382} = 1, 598556$$

$x = 0{,}799278 \pm \sqrt{10{,}244623} = 0{,}799278 \pm 3{,}200722$. Donc

$$x = 4; \qquad x = -2, 401444.$$

Les deux autres valeurs sont imaginaires.

854. Exemple IV. Soit $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$. Alors $A = -12$, $B = 12$, $C = -3$. On aura donc

$$\sin. D = \frac{144 - 36}{24.36 + 8.144 - 9.144} \times \tfrac{2}{3} \sqrt{108} = \tfrac{108}{720} \times \tfrac{2}{3} \sqrt{108} = \tfrac{3}{20} \times 4\sqrt{3}.$$

Or $\frac{3}{20} \times 4\sqrt{3} > 1$. Donc $\sin. 3F = \frac{20}{3} \times \frac{1}{4\sqrt{3}}$. Donc

$$z = 2, 89898; \qquad z = 4; \qquad z = -6, 89898$$
$$m = \sqrt{10, 89898}; \qquad m = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}; \qquad m = \sqrt{1, 10102},$$

ou

$$m = 3, 301361; \qquad m = 3, 4641016; \qquad m = 1, 049295.$$

En se servant de la seconde valeur de z et de m, on obtient pour x les quatre valeurs qui suivent :

$$x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(4 - 1 + \frac{12}{4\sqrt{3}}\right)} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{(3+\sqrt{3})}$$

$$x = +\sqrt{3} \pm \sqrt{(3-\sqrt{3})}; \quad \text{ou}$$

$$x = +0,4432768; \qquad x = -3,9073784;$$

$$x = +2,8580831; \qquad x = +0,6060185.$$

Que l'on prenne la première valeur de z et de m, on aura

$$x = -1,650680 \pm \sqrt{\left(4 - 0,724745 + \frac{6}{3,301361}\right)}$$

$$= -1,65068 \pm \sqrt{(3,275255 + 1,817432)}; \text{ et}$$

$$x = +1,650680 \pm \sqrt{(3,275255 - 1,817432)}; \text{ ou}$$

$$x = -1,65068 \pm 2,256698; \quad x = +1,65068 \pm 1,207403;$$

ou enfin $x = +0,606018$; $x = -3,907378$;

$x = +2,858083$; $x = +0,443277$.

En prenant la troisième valeur de z et de m, on trouverait encore les mêmes quatre valeurs de x.

855. Dans la résolution trigonométrique des équations du second, du troisième et du quatrième degré, lorsque les coefficiens seront d'une valeur qui excédera les tables de logarithmes, on pourra néanmoins faire encore usage de ces tables, et se dispenser du calcul fatigant et peu nécessaire en nombres naturels. On regardera alors comme autant de zéros les chiffres à droite, qui excéderont les limites des tables : et quand les racines exactes n'outrepasseront pas ces limites, on les obtiendra, ou, dans tous les cas, au moins les racines très-approchées, autant que le permettra l'étendue des tables. C'est en procédant ainsi qu'on trouvera, par exemple, que 4583 est racine de l'équation $x^3 - 19787781\,x - 5573422964 = 0$.

CHAPITRE XV.

De la Résolution numérique de toutes sortes d'Equations.

856. Il n'est peut-être rien que n'aient tenté le travail et le génie pour parvenir à la solution générale et directe des équations supérieures au quatrième degré. Ces recherches n'ont pas atteint le but; et le professeur Ruffini, analyste habile, voulant épargner à d'autres et à lui-même un temps que de nouvelles tentatives auraient inutilement dévoré, vient de publier un ouvrage profond (*Teoria dell' Equazioni*), pour démontrer l'impossibilité du succès.

857. Il reste donc deux opérations à faire, pour résoudre une équation particulière quelconque par la seule voie qui puisse être applicable à toutes généralement, c'est-à-dire par la voie indirecte ou de fausse position. Ces deux opérations consistent, 1°. à déterminer les *limites* des racines, ou à trouver, pour chaque racine, dans la suite naturelle des nombres, deux nombres entiers et contigus entre lesquels se trouve renfermée la valeur de la racine; 2°. et dans le cas où cette valeur n'est pas l'un des deux nombres *limites*, à passer de la connaissance de ces deux nombres à la recherche de la valeur intermédiaire, exacte (821, 845, 855), ou approchée, de la racine.

Les problèmes trigonométriques conduisent à l'usage de ces opérations; et c'est ce qui m'autorise sans doute à m'étendre autant qu'il est nécessaire pour en développer la marche qui embrassera la solution numérique de toute équation.

858. Je préfère, pour la recherche des *limites*, la méthode de Lagny (*Mémoir. de l'Académ. des Sciences*, Paris, 1722), comme la plus facile et la plus prompte que je connaisse; mais avec les modifications que j'ai cru convenables, et qui, outre

divers résultats avantageux, comme on le verra (886), ont surtout pour but de mettre cette méthode à l'abri du reproche qu'on lui a fait jusqu'ici, de ne faire connaître ni les racines multiples, égales ou inégales, renfermées entre les limites, ni le nombre des racines imaginaires, quand il s'en trouve avec les racines réelles.

859. Je représente généralement comme il suit, toute équation ordonnée;

$$x^m + Ax^{m-n} + Bx^{m-n-p} + \text{etc.} \ldots\ldots + Z = 0.$$

Chacune des quantités A, B, etc., Z, peut être positive ou négative, et exprimée par un nombre entier ou fractionnaire. Je suppose positive la valeur totale de tout exposant, parce que c'est l'usage, et parce qu'il est toujours nécessaire de la rendre telle. On a donc $m > n$, $m > (n + p)$, etc.

860. A x je substitue successivement tous les nombres de la suite naturelle arithmétique, depuis $-\frac{1}{2}m$ jusqu'à $+\frac{1}{2}m$, sans excepter le zéro. Mais si m est un nombre impair, je commence de $-\frac{m+1}{2}$, et je finis par $+\frac{m-1}{2}$, quand Z est une quantité positive; je commence au contraire par $-\frac{m-1}{2}$, et je termine par $+\frac{m+1}{2}$, quand Z est négatif.

861. Je dispose ensuite les *résultats* successifs de l'équation sous les valeurs correspondantes attribuées à x. Si ces résultats sont les uns positifs, les autres négatifs, nous aurons entre les valeurs supposées de x, qui se trouveront avoir fait naître des signes contigus différens, un *nombre impair de racines réelles* de l'équation, desquelles par conséquent ces valeurs sont les *limites* (857).

862. En effet, dans une série arithmétique d'un ordre quelconque (celle des résultats est de l'ordre m), il ne peut y avoir changement de signe à moins qu'il n'y ait passage par zéro, c'est-à-dire précisément par le point où toute racine réelle amène le résultat. Une seconde racine qui serait comprise entre les mêmes limites, changerait de nouveau le signe, sans que cet effet fût apperçu, le signe précédent se retrouvant alors dans les résultats. Une troisième racine rétablirait la contrariété des signes, et ainsi de suite alter-

nativement. Et telle est la raison du *nombre impair* de racines réelles, quand les signes sont dissemblables.

863. Exemple. I. On demande les racines de l'équation

$$x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 66x^2 - 12x - 99 = 0.$$

864. Qu'on fasse $x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 66x^2 - 12x - 99 = y$. y représentera le résultat provenant de chaque valeur (860) substituée à x; et le premier membre sera le *terme général* de la série des résultats.

865. Exécutant ce qui est prescrit (860, 861) on a

Valeurs de x; $-2, -1, 0, +1, +2, +3$;
Valeurs de y; $-19, -35, -99, -49, +61, +81$.

Donc nous devons avoir (861) un nombre impair de racines réelles entre les valeurs $+1$, $+2$ de x, qui ont produit des signes opposés dans les résultats contigus -49, $+61$. En effet, $+1{,}439873$ est une racine très-approchée de l'équation. On verra comment elle se déduit de la connaissance des limites $+1$, $+2$, quand nous enseignerons la seconde opération annoncée (857).

866. Mais l'équation (863) a cinq racines, puisqu'elle est du cinquième degré. Pour déconvrir les limites des quatre restantes, (en supposant qu'il n'y en ait qu'une seule, comme il arrive le plus souvent, entre les limites déjà trouvées), retranchez la première valeur de y de la seconde, la seconde de la troisième, etc., et écrivez, dans l'ordre convenable, les résidus, c'est-à-de les *différences premières* des résultats; prenez et écrivez de même les différences *secondes*, ou différences des premières; puis les *troisièmes*, et ainsi de suite, jusqu'aux différences de l'ordre m.

867. Ces dernières jouissent de trois caractères remarquables. 1°. Elles sont *constantes*, ainsi qu'il appartient aux différences de toute progression arithmétique. 2°. Elles ont la même valeur numérique dans toutes les progressions du même ordre, par conséquent dans celles qui naissent des équations du même degré. 3°. Cette valeur est égale au produit de tous les exposans de x dans l'équation considérée comme *complète*, (c'est-à-dire comme ayant tous ses termes), même quand elle ne le serait pas; ensorte qn'on peut l'exprimer par $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\overline{m-1})$. Ce produit

nous fournit donc un moyen de comparaison, pour reconnaître si le calcul des résultats et des différences est exact.

868. En général, soit D la différence première, évidemment constante, dans la série des valeurs de x. Soit E la différence constante, de l'ordre m, des résultats, et m le plus grand exposant (859) de x. On aura $E = D^m \times m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\overline{m-1})$. On peut se convaincre par des exemples, et nous en donnons un (933), de la vérité de cette formule. Pour en avoir la démonstration, qui n'appartient pas à ce Traité, on peut recourir au Chap. I du *Calcul différentiel* d'Euler.

869. Reprenons l'exemple (865), en y appliquant les préceptes (866).

Valeurs de y;	$-19, -35, -99, -49, +61, +81$
Différences premières	$-16, -64, +50, +110, +20$
secondes	$-48, +114, +60, -90$
troisièmes	$+162, -54, -150$
quatrièmes	$-216, -96$
cinquièmes, ou de l'ordre m,	$+120$.

870. Si l'on veut la preuve que la dernière différence $+120$ est constante, on peut calculer, dans l'équation (864) la valeur de y correspondante à $x=4$, ou à $x=-3$, et étendre ainsi l'opération (869).

Observons que $120 = 5.4.3.2.1$, comme nous l'avons dit (867). Ici $D = 1$, ensorte qu'il n'est pas nécessaire de recourir à la formule générale (868).

871. J'appelle différences *initiales* celles qui sont à gauche, -16, -48, etc.; et différences *finales*, celles qui sont à droite, $+20$, -90, etc. Et je dis que par la *seule inspection* des initiales, on verra sur-le-champ s'il y a des racines moindres que $-\frac{1}{2}m$, quand l'équation est de degré pair, ou que $-\frac{m\pm1}{2}$, quand le degré est impair; et par la *seule inspection* des finales, on reconnaîtra le nombre des racines plus grandes que $+\frac{1}{2}m$, ou plus grandes que $+\frac{m\mp1}{2}$.

872. Si l'on veut avoir d'autres valeurs successives de y par les nombres à gauche, c'est-à-dire engendrées par les valeurs décroissantes -3, -4, etc. de x, on les obtient sur-le-champ, par le moyen des différences, et bien plus promptement que si on les déduisait de l'équation, dont le calcul deviendrait de plus en plus fatigant. On dispose, ainsi qu'il suit, les différences initiales, en commençant par la dernière ou cinquième, qui est ici $+120$; on soustrait celle-ci de la quatrième qui est devenue la seconde; puis le résidu, ou la différence quatrième ainsi modifiée, se soustrait de la troisième; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au résultat, qui sera le résultat cherché correspondant à $x=-3$. Voici l'opération :

$+120,\ -216,\ +162,\ -48,\ -16;\ y=-19;\ x=-2.$
$+120,\ -336,\ +498,\ -546,\ +530;\ y=-549;\ x=-3.$

Je retranche la différence cinquième $+120$, de la quatrième, -216. Le résidu, -336, est la nouvelle différence quatrième, qui, retranchée de la troisième, ou de $+162$, donne $+498$ pour nouvelle différence troisième; et continuant ainsi, je finis par déduire la nouvelle différence première, $+530$, de la valeur, -19, de y, et j'obtiens -549 pour nouvelle valeur de y, laquelle correspond à la valeur, -3, de x; comme on peut s'en assurer, en substituant cette valeur dans l'équation (864). Par ce procédé on trouverait, pour ainsi dire en se jouant, les valeurs de y, correspondantes aux valeurs successives de x, -4, -5, etc.

873. Or les signes + et — des différences et de y, qui résultent de l'opération précédente, étant alternatifs, on voit qu'à la seule inspection on doit conclure que les valeurs de y iront toujours en s'éloignant de zéro, et toujours avec le signe négatif. Car la cinquième différence accroît toujours la valeur numérique négative de la quatrième; celle-ci augmente de même le nombre positif dont se compose la troisième, qui à son tour produit le même effet sur le nombre négatif de la seconde, comme la seconde sur le nombre positif de la première, et enfin celle-ci sur la valeur négative de y.

La série des valeurs négatives de y s'éloigne donc continuellement de zéro; il n'existe donc pas de valeurs de x, au-dessous de -3, qui puissent réduire à zéro la valeur de y. D'où il suit que

l'équation n'a pas de racines réelles négatives au-dessous de -3. Mais cette conséquence pouvait se tirer de l'inspection immédiate des différences initiales (869); puisqu'il était évident que la difference première, -16, devait être convertie en positive par la seconde, avant de porter sur la valeur négative, -19, de y. D'ailleurs elle n'eût pas suffi par elle-même pour l'anéantir. L'assertion (871) se vérifie donc jusqu'ici.

874. Passons maintenant à l'examen des différences finales. Pour trouver, par leur moyen, les valeurs consécutives de y, provenant des valeurs successives, $+4$, $+5$, etc. de x, il faut ajouter la différence cinquième à la quatrième, puis leur somme à la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la formation de y, ainsi qu'on le voit dans les deux lignes qui suivent;

$$+120, -96, -150, -90, +20;\ y=+81;\ x=+3.$$
$$+120, +24, -126, -216, -196;\ y=-115;\ x=+4.$$

875. Voilà deux valeurs contiguës de y avec des signes contraires. Il y a donc (861) un nombre impair de racines réelles de l'équation, qui ont leur valeur entre $+3$ et $+4$. Et dans le fait, $+3,566774$ est une racine très-approchée. Mais ses limites pouvaient se conclure de la seule inspection (871) des différences finales (869), sans faire l'opération (874). Car il est manifeste que la différence cinquième positive ne suffisait pas pour détruire à-la-fois toutes les négatives, la quatrième, la troisième et la seconde; et que ces différences négatives devaient rester encore plus que suffisantes, pour convertir en quantités négatives la différence première et la quantité y.

876. De la considération du signe positif de la différence constante, on doit inférer qu'à la longue cette différence doit convertir toutes les autres en positives, et rendre enfin le signe positif à y, qui ensuite conservera ce signe en augmentant toujours. Donc (861) il y a au moins une racine positive plus grande que 4; et si, pour en trouver les limites, on continue l'opération (874), on aura -379 et $+1981$ pour valeurs contiguës de y correspondantes aux valeurs $+7$, $+8$ de x. Ces deux dernières sont par conséquent les limites cherchées. Et en effet, $+7,266274$ est une racine très-approchée de l'équation.

877. Nous avons trouvé les limites de trois des racines. La recherche des deux autres exige de nouvelles règles.

Toute fonction (292) peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe (63). Dans l'équation (864), y est fonction de x. Nommant y l'ordonnée, x l'abscisse, toute équation ainsi disposée appartient à une courbe décrite par les points extrêmes des ordonnées y, (63).

878. Pour plus de clarté, je mets sous les yeux la courbe de l'équation (864). La ligne horizontale est l'axe des abscisses, O le point de leur origine ; à gauche de ce point sont les abscisses négatives, à droite les positives, telles qu'elles sont divisées par les nombres. Les perpendiculaires représentent les ordonnées correspondantes. La courbe passant par leurs points extrêmes, coupe nécessairement l'axe, toutes les fois qu'elle traverse de l'ordonnée positive à l'ordonnée négative, ou de la négative à la positive. Dans l'intersection, $y = 0$; d'où il suit que $OA = x$ est la racine trouvée (865). Les deux autres (875, 876) tombent dans le prolongement de l'axe à droite, qu'il m'a paru inutile de tracer.

Fig. 45.

879. Entre les ordonnées -35, -19, qui s'avancent peu hors de l'axe, il peut se faire que la courbe procède ou par la ligne ponctuée qui n'arrive pas jusqu'à l'axe, ou par la ligne pleine qui la coupe en deux points, tels que B, C. Ce second cas est celui où, entre deux résultats de même signe, se trouve un nombre pair de racines réelles, $-OB$, $-OC$, comme je l'ai indiqué (862).

880. Ces racines sont deux racines égales, si les points B, C coïncident, c'est-à-dire si l'axe est tangente de la courbe.

881. Mais les racines sont imaginaires, si l'axe ne touche en aucun point la courbe entre les ordonnées -35, -19, qui sont plus courtes que les ordonnées négatives qui les précèdent et qui les suivent immédiatement hors de l'intervalle qu'elles comprennent entre elles. C'est le cas de la ligne ponctuée.

882. Aussi, l'équation dont il s'agit ayant OB, OC, pour racines réelles négatives, comme nous le verrons, il suffit, pour que ces racines deviennent imaginaires, de transporter l'axe en GE, de sorte que dans cette partie il passe hors de la courbe. Et ce déplacement n'exige que d'alonger l'ordonnée -99, c'est-à-dire

de changer l'homogène de comparaison, en mettant, par exemple, dans l'équation, -103 au lieu de -99.

883. Cette théorie m'a conduit à établir la règle suivante :

Lorsque des résultats successifs, sans changer de signe, s'approchent de zéro, puis s'en éloignent, cette circonstance indique un nombre pair de racines, ou réelles et comprises entre les limites correspondantes aux résultats les plus voisins de zéro, ou imaginaires.

884. Pour distinguer les racines réelles des imaginaires, voyez, au moyen de valeurs intermédiaires de x, s'il y a mutation de signes dans les valeurs correspondantes de y. Si ce changement a lieu, concluez en faveur des racines réelles. Si les épreuves vous apprennent au contraire que cette mutation ne peut avoir lieu, les racines sont imaginaires. On verra, par tout ce qui suit, combien cette vérification est prompte.

885. Dans le cas de l'équation (864), qu'on suppose $x = -\frac{3}{2}$, il en résulte $y = +\frac{27}{32}$, valeur positive qui est entre les négatives -35, -19. Il y a donc deux racines réelles négatives, l'une entre les limites -1, $-\frac{3}{2}$, l'autre entre les limites $-\frac{3}{2}$, -2. En effet $-1{,}478091$ et $-1{,}794829$ sont des racines très-approchées de l'équation proposée.

886. Nous avons donc trouvé les limites de chacune des cinq racines; et cela avec une extrême facilité, puisque d'une part les opérations sont rapides et sans travail, et que de l'autre nous prenons l'équation telle qu'elle se présente, sans nous occuper ni de *transformations*, ni d'*éliminations*, ni même, ainsi que nous le verrons, *de faire disparaître les fractions*. Il suffit de purger l'équation des quantités irrationnelles. Le coefficient même qu'aurait la puissance la plus élevée de x, pourrait subsister; seulement alors les différences renferment ce même facteur, et exigent plus de calcul, parce qu'elles sont plus fortes. On peut en voir un exemple (914).

Qu'on observe encore que l'union des valeurs positives et négatives de x, dans une seule opération (860), réduit le travail à moitié, soit parce qu'on trouve à-la-fois les limites des racines tant positives que négatives, soit parce que le calcul de chaque puissance de x sert à deux emplois, la valeur numérique de la puissance

étant la même, soit pour x positif, soit pour x négatif. Ajoutons enfin que ces puissances sont très-faciles à calculer, puisqu'il s'agit des nombres les plus petits entre les entiers.

887. Passons à d'autres exemples, pour servir de direction dans les divers cas.

EXEMPLE II. Soit

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0 = y.$$

Valeurs de x;	-2,	-1,	0,	$+1$,	$+2$,	$+3$
Valeurs de y;	-130,	-10,	-4,	-10,	-22,	-10
Différences premières	$+120$,	$+6$,	-6,	-12,	$+12$	
secondes	-114,	-12,	-6,	$+24$		
troisièmes	$+102$,	$+6$,	$+30$			
quatrièmes	-96,	$+24$				
cinquième constante	$+120$.					

888. Observez d'abord que la différence constante 120 est la même que celle (869) de l'équation du cinquième degré (863); ce qui est conforme à ce que j'ai affirmé généralement (867).

Puis, de la seule inspection des différences initiales affectées de signes alternatifs, vous conclurez (873) que, de ce côté, la valeur de y doit aller toujours en décroissant, et que par conséquent l'équation n'a aucune racine négative; ce qui démontre l'erreur de la règle de Newton, d'après laquelle il affirme (*Arithm. univ.* Tom. II, Chap. II) que cette même équation a deux racines négatives.

De même, un coup-d'œil sur les différences finales vous apprendra que le signe de y doit changer dans la valeur de y correspondante à la valeur $+4$ de x, et qu'ensuite cette valeur de y croîtra perpétuellement de ce côté, et toujours avec le signe positif. Il y a donc un nombre impair de racines réelles entre les limites $+3$, $+4$. En effet $+3,131$ est une racine très-approchée.

889. Mais de plus les résultats -10, -4, -10 sont dans le cas de la règle (883), et indiquent un nombre pair de racines entre les limites -1, $+1$. Je fais $x = +\frac{1}{2}$; et je trouve $y = -6\frac{23}{32}$. Si je prends $x = -\frac{1}{2}$, alors $y = -2\frac{25}{32}$. Donc les limites qui ont produit les résultats les plus voisins de zéro, sont o et

$-\frac{1}{2}$. Je suppose encore $x = -\frac{1}{4}$, et j'ai $y = -2\frac{251}{256}$. Maintenant, de la considération des différences (884), il suit manifestement qu'entre les limites $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, d'où sont provenus les résultats les plus voisins de zéro, il ne peut correspondre aucune valeur positive de y. Car pour la différence $\frac{1}{4}$ entre les valeurs o et $-\frac{1}{4}$ de x, y diminue de $1\frac{5}{256}$; il n'est pas possible qu'il diminue de $2\frac{251}{256}$ par un changement moindre que de $\frac{1}{4}$ dans x, tel qu'il conviendrait qu'il fût entre les limites énoncées ci-dessus. Je dis, *il n'est pas possible*, parce que près du *maximum* ou du *minimum* des grandeurs, ce sont les moindres variations de ces grandeurs, et non les plus fortes, qui ont lieu. Nous sommes arrivés à-peu-près à un *minimum* des ordonnées, c'est-à-dire à un des sommets de la courbe qui est Fig. 46. le lieu géométrique (63) de l'équation (887). Cette équation, par conséquent, a au moins deux racines imaginaires.

890. Reste à déterminer l'espèce de deux racines. Si elles sont réelles, elles ne peuvent se trouver qu'entre les limites $+3$, $+4$, (888). Pour les rechercher, la méthode que je viens d'employer serait laborieuse. Il est mieux pour ce cas de suivre une autre route. S'il y a trois racines entre les limites $+3$, $+4$, la courbe représentée Fig. 47. par l'équation sera coupée par l'axe en trois points, tels que A, B, C. Elle aura donc deux sommets D, E; l'ordonnée GD sera le *maximum* des positives entre les intersections A, B; et l'ordonnée FE sera le *maximum* des négatives entre les intersections B, C. Nous aurons donc deux abscisses terminées aux points G, F, lesquelles répondront auxdites ordonnées GD, FE. Or de telles abscisses seraient racines dans l'équation différentiée. Car alors, comme $\partial y = 0$, (228), on a aussi $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; et par conséquent les valeurs de ces abscisses réduiraient à zéro l'équation différentiée. Nous pouvons donc connaître, par ce moyen, si lesdites deux ordonnées qui seraient chacune un *maximum*, existent réellement.

891. En différentiant, nous aurons $5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x - 5 = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Pour savoir si cette équation a des racines de valeur intermédiaire entre $+3$ et $+4$, nous ferons, comme ci-dessus (864),

(a)...... $5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 4x - 5 = y'$.

Si $x = +3$, on trouve $y' = +64$. Si $x = +4$, $y' = +427$. Ces deux résultats ont le même signe ; donc, ou ils n'indiquent aucune racine, ou ils annoncent un nombre pair de racines (862). Sur quoi, je raisonne ainsi. Pour qu'il y ait deux racines réelles entre les valeurs $+3$, $+4$, de x, il est nécessaire que la courbe
Fig. 48. représentée par l'équation (a), coupe l'axe en deux points, tels que G, F, qui sont les points marqués de ces mêmes lettres dans la fig. 47. Il y aura donc un sommet M et un *maximum* MN des ordonnées entre les négatives. Donc nous dirons, comme nous l'avons dit (890), que l'équation (a), en la différentiant, puis la divisant comme ci-dessus par ∂x, doit nous donner une racine aboutissant au point N, si le *maximum* MN des ordonnées existe en effet. Ici, comme il ne s'agit que d'une seule racine, les résultats répondant à ses limites doivent avoir des signes divers, et il ne restera plus d'incertitude.

892. L'équation (a) étant donc différentiée, nous avons $20x^3 - 48x^2 + 24x - 4 = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, ou, en divisant par 4,

$$5x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0 = y''.$$

Or, pour $x = +3$, cette équation donne $y'' = +44$, et pour $x = +4$, $y'' = +151$; et ces résultats sont tous deux positifs. Cette équation n'a donc pas de racine réelle entre les limites $+3$, $+4$. Par conséquent le *maximum* MN des ordonnées n'existe pas, ni les deux racines de l'équation (a) supposées aboutir aux points G, F, entre les mêmes limites. Donc aussi les deux ordon-
Fig. 47. nées *maxima*, GD, FE, disparaissent, et avec ces *maxima* les deux racines que nous supposions aboutir à B, C. D'où suit avec évidence que l'équation (887) n'a qu'une racine entre lesdites limites, racine qui est celle que nous avons découverte (888). Donc les quatre autres racines sont toutes imaginaires, et non pas seulement deux d'entre elles, comme Newton le déduit de sa règle (*loc. cit.*).

893. Nous connaissons (889) les limites de deux de ces imaginaires, mais non des deux autres. Il en doit être ainsi toutes les fois que les valeurs de x dans l'équation différentiée, correspondantes aux *minima* des ordonnées, sont imaginaires. Mais la re-

cherche de ces valeurs multiplierait les équations à résoudre. Notre but est de déterminer le nombre qui nous importe, et non les limites inutiles à connaître, des racines imaginaires de l'équation primitive. Et c'est à quoi notre méthode parviendra toujours. Si l'on veut avoir l'expression des racines imaginaires, on pourra, connaissant les racines réelles, tirer cette expression du second et du dernier terme de l'équation, quand il s'agit de deux racines; ou de toute l'équation divisée par le produit des racines réelles, puis résolue (850), s'il s'agit de quatre racines. Mais si le nombre en est plus grand, on aura recours aux moyens donnés par Lagrange, (*Résolution des Équations numériques*, 17, 40.)

894. Nous avons fait le calcul (891) des valeurs de y', pour rendre le raisonnement plus clair; mais nous pouvions nous en dispenser. Il suffit de différentier deux fois l'équation, et de chercher immédiatement les valeurs de y''. Et les différentiations se réduisent à multiplier chaque terme de l'équation par son exposant, et à lui donner un exposant moindre d'une unité. Il est inutile d'écrire les différentielles.

895. Cette méthode ne convenait pas dans le cas (889). Quand on est assuré qu'il existe un nombre pair de racines entre deux limites données, et qu'on cherche seulement si ces racines sont réelles ou imaginaires; comme il y a toujours dans les ordonnées un *maximum* entre deux racines réelles, et un *minimum* le plus souvent, mais *non toujours* (893), entre deux racines imaginaires, la différentiation, dans ce cas, obligerait à des solutions multipliées, ou ne conduirait pas à une conclusion certaine, si ce n'est dans quelques combinaisons favorables, que nous indiquerons bientôt (897).

896. Je propose à ceux qui voudront s'exercer, l'équation $x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$, à traiter de la même manière que l'équation (887). On trouvera une racine réelle entre les limites $+4, +5$; et on reconnaîtra que les quatre autres sont imaginaires, et non pas deux imaginaires et deux négatives, ainsi que Newton l'a encore inféré, par erreur, de sa règle (*loc. cit.*).

897. EXEMPLE III. Soit $x^5 + x^4 - 1 = 0 = y$.

Valeurs de x;	-2,	-1,	0,	$+1$,	$+2$,	$+3$
Valeurs de y;	-17,	-1,	-1,	$+1$,	$+47$,	$+323$

En prenant les différences, on reconnaît qu'il n'y a point de racines réelles hors des limites ci-dessus, -2, $+3$. Une, au moins, se découvre entre les limites o et $+1$. Mais les résultats égaux -1, -1 doivent faire soupçonner quelque nombre pair de racines entre les limites -1 et o. C'est ici le cas d'abandonner la méthode (889); car on voit au premier coup-d'œil que l'équation différentiée doit donner ses racines sans travail. En effet, de $5x^4+4x^3=0$, on tire $x=-\frac{4}{5}$. Substituant cette valeur dans l'équation primitive, on trouve $y=-0{,}91808$, qui est le *minimum* des ordonnées négatives entre les limites -1 et o. Il y a donc ici des résultats négatifs qui s'approchent de zéro, puis s'en éloignent; ce qui atteste (883) l'existence au moins de deux racines imaginaires, le *minimum* connu des ordonnées excluant les racines réelles.

898. Mais si les limites, o, $+1$, comprenaient trois racines réelles, et non une seule, nous avons vu (890) qu'alors il doit y avoir deux ordonnées qui sont chacune un *maximum*. Or de telles ordonnées ne peuvent exister, puisque l'équation différentiée n'a d'autre racine réelle que $-\frac{4}{5}$, et que cette racine est hors desdites limites. Donc quatre des racines de l'équation primitive sont imaginaires, et non pas seulement deux, comme le dit Newton (*loc. cit.*), toujours d'après la même règle qu'on peut abandonner sans scrupule aujourd'hui qu'on en connaît de plus sûres.

899. On pourra s'exercer sur une autre équation absolument semblable, que M. l'abbé Caluso a résolue (*Mém. de Turin*, Tom. VI, pag. 171) par la description exacte de quatorze ordonnées servant à la construction de deux courbes. Cette équation est $x^5-5x^2+16=0$. On trouvera une racine entre les limites -2, -1. Et par la différentiation, $x=\sqrt[3]{2}$; d'où résulte $y=16-3\sqrt[3]{4}=11{,}2378$ à très-peu-près; ce qui est le *minimum* des ordonnées positives entre les limites $+1$, $+2$. On en conclura que quatre racines sont imaginaires.

900. EXEMPLE IV. Soit proposée l'équation

$$x^7-7x^6+10x^5+38x^4-155x^3+221x^2-144x+36=0=y.$$

Valeurs de x;	-4,	-3,	-2,	-1,	0,	$+1$,	$+2$,	$+3$
Valeurs de y;	-31500,	0,	$+2100$,	$+576$,	$+36$,	0,	0,	0.

Ici, quatre racines exactes se manifestent. On pourrait abaisser l'équation au troisième degré, en la divisant par leur produit, c'est-à-dire par $(x+3)(x-1)(x-2)(x-3)=0$; ensuite la résoudre directement. Mais nous avons un autre but, et nous suivrons les moyens indirects.

901. Si on prend les différences, on reconnaîtra qu'on ne peut admettre des valeurs de x hors des limites -4 et $+4$. Mais en voyant que la valeur de y correspondante à $x=+4$ est nécessairement positive, on conclura que le nombre des racines entre les limites o et $+4$ ne peut être impair (883). On s'assurera s'il y en a quatre ou six, par l'équation différentiée, (890, 892), au moyen du nombre des *maxima* ou *minima*, à chacun desquels doivent répondre deux racines, comme l'ont démontré les exemples précédens. L'équation différentiée est

$$7x^6-42x^5+50x^4+152x^3-465x^2+442x-144=0=y'.$$

Valeurs de x; o, + 1, + 2, + 3

Valeurs de y'; − 144, o, o, + 48.

902. Nous avons deux racines, $+1$, $+2$, de la dernière équation. Ces racines indiquent des lieux d'ordonnées *minimes* dans la courbe représentée par l'équation (900). Mais celle-ci donne, dans les mêmes lieux, $y=0$; le zéro ne serait pas un *minimum*, si l'ordonnée passait par ce point en devenant de positive négative, ou de négative positive; et selon la théorie des courbes, une ordonnée est un *minimum*, quand celles qui la précèdent et qui la suivent sont plus grandes qu'elle, et ont les unes et les autres le même signe. Donc les racines que nous venons de trouver annoncent que l'axe est tangente de la courbe dans les deux points où on a $x=1$, $x=2$, et par conséquent ces racines sont doubles et égales (880), à chacun de ces deux points.

903. Nous connaissons donc cinq racines de l'équation (900), entre o et $+4$, savoir 1, 1, 2, 2 et 3. Mais il a déjà été reconnu que leur nombre doit être pair entre ces mêmes limites, qui par conséquent en renferment une autre à découvrir. Cela nous est encore confirmé par l'équation (901), dont nous n'avons trouvé que deux racines entre les résultats de signes divers, -144, $+48$, tandis qu'elles doivent être en nombre impair (861).

Pour trouver la troisième qui reste cachée, on opérera comme on l'a fait pour l'équation primitive. Différentiant l'équation (901), puis divisant par 2, ce qui, en abaissant les coefficiens, facilite les calculs, on aura

$$21x^5 - 105x^4 + 100x^3 + 228x^2 - 465x + 221 = 0 = y'.$$

904. Il suffit de calculer les valeurs de y', entre les limites o, + 3, puisque la racine cherchée y est comprise; et on aura déjà remarqué plus d'une fois ci-dessus l'avantage de ces moyens d'abréger. Or si $x = 0$, on a $y' = + 221$; si $x = 1$, $y' = 0$; là se termine le travail. Ce dernier résultat fait connaître deux racines égales, par les raisons exposées tout à l'heure, pour l'équation (901); $x = + 1$ est donc une double racine de cette dernière équation, et par conséquent une triple racine de l'équation primitive (900); et l'on a ainsi, pour les sept racines, — 3, 1, 1, 1, 2, 2, 3.

905. Pour qu'on entende d'autant mieux ce que nous avons dit sur la recherche de ces racines, nous représentons par des figures les trois équations (900, 901, 903), entre les limites o et + 3. Et d'abord, en procédant par ordre rétrograde, achevons l'opération que tout à l'heure (904) il nous a suffi de commencer; nous trouverons, pour $x = 2$, $y' = - 5$; pour $x = 3$, $y' = + 176$; et nous aurons les ordonnées qui conviennent pour figurer l'équation (903). Entre les deux ordonnées de signes divers, + 221, — 5, il doit y avoir un nombre impair de racines. On en connaît déjà une (904), savoir $x = + 1$. Les deux autres *o*B, *o*C se découvrent en raisonnant comme on l'a fait (890), et différentiant l'équation deux fois (894). Fig. 49.

906. La figure 50 est le lieu géométrique de l'équation (901). L'axe touche la courbe dans le point où $x = 1$, ce qui fait voir que cette racine est double. Les deux lignes ponctuées BL, CM sont les plus grandes ordonnées correspondantes aux racines *o*B, *o*C (fig. 49) de l'équation (903). Mais l'équation (901) a encore une racine *o*H qui indique comme *maximum* l'ordonnée HN. Voilà donc trois ordonnées, qui sont chacune un *maximum*, de position alternativement opposée, et qui nécessairement donnent les trois racines *om*, *on*, *op* de l'équation (901). Les abscisses *o*B, *o*C, *o*H sont d'égale grandeur dans les deux figures 49, 50. Fig. 50.

907. Enfin la figure 51 représente l'équation primitive (900). Au point où $x=1$, la courbe faisant un nœud coupe l'axe en trois points a, b, c, qui doivent se considérer comme infiniment voisins entre eux, et qui indiqueront ainsi les trois racines égales 1, 1, 1. Les lignes ponctuées en dedans du nœud peuvent représenter les *maxima* ou plus grandes ordonnées manifestées (890) par les deux racines égales (906). Fig. 51.

908. Je dis *peuvent représenter;* car dans la réalité ces *maxima* sont des ordonnées qui se réunissent et coïncident en un point qu'on nomme *multiple.* Mais il n'y a pas d'autre moyen de mettre sous les yeux les racines égales, en nombre impair. J'ai dit aussi les *maxima*, et non les *minima*, parce qu'on n'admet pas d'ordonnées de cette dernière espèce au point où la courbe coupe l'axe (902). Si les racines égales $+1$ de l'équation (900) étaient en nombre pair, alors le nœud serait tangente (902), et non sécante; et les ordonnées au point de contact, seraient dites *minimes.*

909. Les ordonnées *ms*, *pt*, qui sont des *maxima*, correspondent aux racines *om*, *op* (fig. 50) de l'équation (901). L'autre racine, *on*, de cette même équation, indique un *minimum* au point où $x=2$, (fig. 51); et ce *minimum*, les deux racines égales $+2$ de l'équation (900).

910. Dans l'exemple IV (900 à 909), on a vu combien il est facile de reconnaître les racines égales, quand elles sont rationnelles. Voyons maintenant comment on doit procéder pour trouver les racines égales et irrationnelles.

Choisissons l'équation

(A).... $x^6-16x^5+85x^4-144x^3-57x^2+126x+54=0$,

traitée par M. Ruffini, dans son Mémoire couronné en 1804 par la Société italienne des Sciences.

En opérant comme dans l'exemple I, on trouve

Valeurs de x;	-3;	-2;	-1;	0;	$+1$;	$+2$;	$+3$
Valeurs de y;	$+14553$;	$+2662$;	$+117$;	$+54$;	$+49$;	-162;	-243

Différ. premières	— 11891 ; — 2545 ; — 63 ; — 5 ; — 211 ; — 81
secondes	+ 9346 ; + 2482 ; + 58 ; — 206 ; + 130
troisièmes	— 6864 ; — 2424 ; — 264 ; + 336
quatrièmes	+ 4440 ; + 2160 ; + 600
cinquièmes	— 2280 ; — 1560
sixième constante	+ 720

Les valeurs de y, $+49$ et -162, manifestent un nombre impair de racines entre les limites $+1$, $+2$.

Les signes alternatifs dans les différences initiales excluent toute racine au-dessous de -3.

Il n'en est pas de même des différences finales, pour les racines au-dessus de $+3$. En effet, $x=+4$ donne $y=-98$, et $x=+5$ donne $y=+9$. D'où il suit que $+4$, $+5$ sont les limites d'un nombre impair de racines.

Les différences finales donnent lieu de penser que pour les valeurs de x qui suivraient, on aurait toujours des valeurs positives de y. Cependant si on fait $x=+6$, on trouve $y=+54$, et cette valeur de y ne s'éloigne pas assez de $+9$, valeur de y, en supposant $x=+5$, pour empêcher de croire à la possibilité d'un nombre pair de racines entre ces deux dernières valeurs de x.

Cette possibilité est bien plus apparente encore aux points où $x=0$ et $x=+1$, attendu le peu d'inégalité des valeurs correspondantes $+54$, $+49$, de y.

Commençons par examiner ce dernier cas par la méthode (889). Je fais $x=0,5$, et je trouve $y=+89,578125$. Il est sûr dès lors, conformément à la règle (883), qu'il existe un nombre pair de racines entre les limites -1 et $+0,5$.

Maintenant, si je fais $x=5,5$; j'ai $y=+0,405125$, valeur qui, suivant la même règle, annonce un nombre pair de racines entre les limites $+5$, $+6$.

Nous avons donc promptement découvert où se trouvent placées les six racines de l'équation; deux sont entre les limites -1, et $+0,5$; une entre $+1$ et $+2$; une entre $+4$ et $+5$; et deux entre $+5$ et $+6$.

Je cherche les deux premières; et supposant d'abord $x=-0,5$, j'en déduis $y=+0,578125$. Une valeur aussi rapprochée de zéro me prouve que l'une des deux racines en est bien près. Je fais

$x = -0,4$, et j'ai $y = +6,039936$; puis je suppose $x = -0,6$, ce qui me donne $y = +1,290816$.

Par ces valeurs de y, les deux racines sont confinées entre les limites $-0,5$ et $-0,6$, dont l'extrême rapprochement porte à regarder comme très-probable que ces racines sont égales.

Pour lever toute incertitude, il faut différentier (894) l'équation (A), et la diviser par ∂x. Alors si l'équation nouvelle ou seconde, que nous nommerons (B), a quelque racine commune à la première (A), celle-ci aura, comme on l'a vu (902), autant de doubles racines égales qu'il y a de racines communes.

L'équation différentiée, et divisée par le facteur commun $2\partial x$, devient

$$\text{(B)} \qquad 3x^5 - 40x^4 + 170x^3 - 216x^2 - 57x + 63 = 0.$$

Or si les équations (A), (B), ont quelques racines communes, je dois pouvoir en trouver les valeurs par le moyen du plus grand commun diviseur, ou par le moyen, qui me semble plus commode, de l'élimination. Voici le détail de cette dernière opération, en faveur de ceux qui n'ont pas assez d'usage de ces sortes de calculs.

Je multiplie l'équation (A) par 3, l'équation (B) par x, et j'ai les équations qui suivent :

$$3x^6 - 48x^5 + 255x^4 - 432x^3 - 171x^2 + 378x + 162 = 0$$
$$3x^6 - 40x^5 + 170x^4 - 216x^3 - 57x^2 + 63x = 0.$$

Je soustrais cette dernière de la précédente. Il en résulte

$$\text{(C)} \qquad -8x^5 + 85x^4 - 216x^3 - 114x^2 + 315x + 162 = 0.$$

Je multiplie l'équation (B) par 8, et l'équation (C) par 3; puis je prends leur somme qui est

$$\text{(D)} \qquad -65x^4 + 712x^3 - 2070x^2 + 489x + 990 = 0.$$

Je multiplie l'équation (D) par $8x$, et l'équation (C) par 65; du premier de ces produits je soustrais le second, je divise le reste par 9, et j'ai pour quotient

$$\text{(E)} \qquad 19x^4 - 280x^3 + 1258x^2 - 1395x - 1170 = 0.$$

Je multiplie l'équation (D) par 19, l'équation (E) par 65; je divise par 8 la somme des produits, et je trouve

$$\text{(F)} \qquad -584x^3 + 5305x^2 - 10173x - 7155 = 0.$$

Je multiplie cette équation par $19x$; puis je l'ajoute à l'équation (F) multipliée d'abord par 584; enfin je divise la somme par 5, et j'obtiens

$$(G) \qquad -12545x^3 + 108277x^2 - 190125x - 136656 = 0.$$

De cette équation multipliée par 584, je soustrais l'équation (F) multipliée par 12545, et j'ai pour reste

$$(H) \qquad -3317457x^2 + 16587285x + 9952371 = 0.$$

On reconnaît aisément, à la simple inspection, que cette équation est divisible par le coefficient de x^2; ce qui donne

$$(K) \qquad x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Voilà donc un diviseur du second degré, de l'équation primitive (A).

En effet la division donne pour quotient

$$(L) \qquad x^4 - 11x^3 + 33x^2 - 12x - 18 = 0.$$

Je détermine les racines de l'équation (K), qui sont $\frac{5+\sqrt{37}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{37}}{2}$. Puis je considère que si l'équation (A) a des racines égales, il faut que quelqu'une des racines de l'équation (K), ou bien de l'équation (L), soit deux fois racine de l'équation (A). Je tente donc la division de l'équation (L) par l'équation (K); ce qui réussit, et donne pour quotient exact

$$(M) \qquad x^2 - 6x + 6 = 0.$$

Donc l'équation (K) est un double diviseur, et l'équation (M) un troisième diviseur, de l'équation (A). De la solution de ces diviseurs du second degré, on tire les six racines de l'équation (A), qui sont

$$\frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}; \ \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}; \quad 3 \pm \sqrt{3}.$$

L'équation (A) a donc deux doubles racines égales et irrationnelles, dont nos méthodes ont dirigé la recherche.

911. Après avoir fait voir comment on trouve les racines égales, il reste à démontrer comment on découvre les racines à-peu-près égales entre les mêmes limites.

Soit pour EXEMPLE V,

$$x^6 - 15x^4 + 25x^3 - 15x^2 + \tfrac{18}{5}\,x - \tfrac{20}{79} = 0.$$

En faisant disparaître les fractions par les méthodes connues, on tomberait dans une équation presque intraitable, à cause de la grandeur des coefficiens. C'est ici le lieu de prouver ce que j'ai affirmé (886), qu'il suffit, dans mon système, que les fractions soient réduites au même dénominateur.

912. Soit donc

$$x^6 - 15x^4 + 25x^3 - 15x^2 + 3\tfrac{237}{395}\,x - \tfrac{100}{395} = y.$$

Valeurs de x;	-3,	-2,	-1,	0,	$+1$,	$+2$,	$+3$
Valeurs de y;	$-1307\frac{21}{395}$,	$-443\frac{179}{395}$,	$-57\frac{337}{395}$,	$-\frac{100}{395}$,	$-\frac{258}{395}$,	$-29\frac{21}{395}$,	$+64\frac{216}{395}$
Différences premières	$+863\frac{237}{395}$,	$+385\frac{237}{395}$,	$+57\frac{237}{395}$,	$-\frac{158}{395}$,	$-28\frac{158}{395}$,	$+93\frac{237}{395}$	
secondes	-478,	-328,	-58,	-28,	$+122$		
troisièmes	$+150$,	$+270$,	$+30$,	$+150$			
quatrièmes	$+120$,	-240,	$+120$				
cinquièmes	-360,	$+360$					
sixième constante	$+720$						

913. Une racine est certainement comprise (861) entre les limites $+2$, $+3$. Les différences finales excluent toute racine plus grande que 3. Mais des initiales on conclut facilement qu'il est de même certain qu'il y a une racine au-dessous de -3; ses limites sont en effet -4, -5. J'observe ensuite que, d'après la règle (883), des racines en nombre pair doivent être renfermées entre les limites 0, $+1$. Comme j'ignore le nombre de ces racines, je dois (895) employer ici la méthode (889). Je fais $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$; je trouve $y = -0{,}000035$. Les résultats les plus voisins de zéro étant ceux qui correspondent aux valeurs 0 et $+\frac{1}{2}$ de x, je suppose $x = +0{,}4$; ce qui me donne $y = +0{,}00694$. Voilà donc les limites de deux racines réelles, savoir pour l'une 0 et $\frac{4}{10}$, et pour l'autre $\frac{4}{10}$ et $\frac{5}{10}$. Il pourrait se faire qu'entre les premières ou entre les secondes de ces limites, les racines fussent au nombre de trois (861), et non d'une seule. Pour éclaircir ce doute, on pourrait différentier deux fois, puis conclure comme on l'a fait (892). Mais comme il se peut aussi que les deux racines qui restent à découvrir soient entre les limites $+\frac{1}{2}$, $+1$, qui ont produit des

résultats de même signe, nous continuerons de suivre la méthode (889). Éprouvons donc $x = +0,6$; nous en tirons $y = +0,0095$; par conséquent les racines sont en effet l'une entre les limites $\frac{5}{10}$ et $\frac{6}{10}$, et l'autre entre les limites $\frac{6}{10}$ et 1.

914. Afin qu'on n'abuse pas, par inadvertance, du raisonnement dont je me suis servi (889) pour conclure des racines imaginaires, je prends pour EXEMPLE VI,

$$9x^5 + 75x^4 + 2x^3 - 104x^2 - 40x + 7 = 0 = y.$$

Valeurs de x;	-3,	-2;	-1,	0,	$+1$,	$+2$	
Valeurs de y;	$+3025$,	$+567$,	$+7$,	$+7$,	-51,	$+1015$	
Différences premières,	-2458,	-560,	0,	-58,	$+1066$		
secondes		$+1898$,	$+560$,	-58,	$+1124$		
troisièmes			-1338,	-618,	$+1182$		
quatrièmes				$+720$,	$+1800$		
(886, 867) cinquième constante					$+1080 = 9 \times 5.4.3.2.1.$		

915. Deux racines sont en évidence, l'une entre les limites 0 et $+1$, l'autre entre les limites $+1$ et $+2$. Il est manifeste par les différences finales qu'il n'y en a aucune au-dessus de 2. Les différences initiales en font prévoir une, qui, en étendant (872) les différences, se trouve être entre les limites -8 et -9. Reste à déterminer la place de deux racines. Or les résultats successifs égaux $+7$, $+7$, doivent (883) faire soupçonner qu'elles se trouvent entre les limites -1 et 0. J'essaye $x = -\frac{1}{2}$, et je trouve $y = +5\frac{5}{32}$.

916. Si on raisonnait ainsi : pour $\frac{1}{2}$ de variation dans x, y est diminué de $1\frac{27}{32}$; il n'est donc pas possible qu'il diminue de $5\frac{5}{32}$ pour des variations moindres que $\frac{1}{2}$ dans x; et par conséquent les deux racines sont imaginaires; un pareil argument serait prématuré et faux. Je dis *prématuré*, puisque nous ne savons pas encore de quel côté est le *minimum* de la valeur de y, c'est-à-dire si ce *minimum* est entre les limites -1 et $-\frac{1}{2}$, ou bien entre les limites $-\frac{1}{2}$ et 0 : cela connu, c'est alors qu'il sera temps de faire la dernière épreuve, puis de conclure, ainsi que nous l'avons fait avec toute sureté (889). J'ajoute *faux*, puisqu'en faisant $x = -\frac{3}{4}$, on obtient $y = -\frac{767}{1024}$, résultat qui indique une racine réelle entre les limites -1, $-\frac{3}{4}$, et une autre entre les limites $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}$.

On peut voir combien l'équation (914) a coûté de travail à M. l'abbé Caluso (*loc. cit.* 899, pag. 178 à 185); on y trouvera de très-bons préceptes pour reconnaître les diviseurs du second degré.

917. J'ai dit (895) qu'à chaque couple de racines imaginaires ne correspond *pas toujours*, comme il est arrivé (889), un *minimum* d'ordonnée; et j'en ai dit la raison (893). J'ajouterai *en premier lieu*, que la règle (883) est toujours vraie, quand les indices sur lesquels elle est fondée se manifestent; s'ils n'existent pas, il est évident qu'elle n'est plus d'aucun usage. Cela n'empêche pas de découvrir le nombre des racines imaginaires; car lorsqu'on a trouvé celui des racines réelles que l'équation admet, on doit conclure avec pleine certitude que celles qui restent sont toutes imaginaires. C'est ce que j'ai fait (892).

918. *En second lieu*, il reste faire voir que l'équation différentiée peut offrir les indices qui manquent dans l'équation primitive. C'est ce que nous allons prouver par un dernier exemple.

EXEMPLE VII.

$$x^4 + 111x^3 + 6x^2 + 1993x + 35878 = 0 = y.$$

919. La solution directe de cette équation serait assez laborieuse. En pareil cas, nous nous servons utilement des solutions indirectes que nous avons préparées pour les degrés supérieurs.

Valeurs de x;	-2,	-1,	0,	$+1$,	$+2$
Valeurs de y;	$+31044$,	$+33781$,	$+35878$,	$+37989$,	$+40792$
Différ. premières	$+2737$,	$+2097$,	$+2111$,	$+2803$	
secondes	-640,	$+14$,	$+692$		
troisièmes	$+654$,	$+678$			
quatrième constante	$+24$.				

920. Les différences finales excluent toute racine positive. Les différences initiales annoncent deux racines négatives; car la différence seconde négative accroît (872) la première positive, laquelle diminue le résultat, et parvient bientôt à le rendre négatif; et la quatrième doit à la longue changer les signes de toutes les autres, et restituer à y sa valeur positive. L'équation a donc deux racines négatives au-dessous de -2. En effet ces deux racines sont, à

très-peu-près, $-6,1095$ et $-111,0813$. Les deux autres racines ou sont comprises entre les mêmes limites que l'une de ces racines, ou sont imaginaires.

921. C'est ici le cas de différentier deux fois (890 à 894); ce qui donne $x^2 + \frac{111}{2} x + 1 = 0$, équation dont les racines sont $-\frac{111}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{12305}$, et se trouvent l'une et l'autre hors des limites des précédentes. Mais, pour indiquer une marche générale, applicable à une équation quelconque, j'adopte les voies indirectes pour arriver à la même conclusion, et faisant successivement $x = -6$, $x = -7$, je trouve que l'équation ci-dessus donne, dans le premier cas, $y'' = -296$; et dans le second, $y'' = -338 \frac{1}{2}$. Ces valeurs de x ne sont donc pas (892) les limites de trois racines dans l'équation (918). De même, pour $x = -111$, j'ai $y'' = +6161 \frac{1}{2}$; et pour $x = -112$, $y'' = +6329$. Ces valeurs ne sont donc pas davantage les limites de trois racines. D'où il suit nécessairement, et quoique l'indice de la règle (883) manque absolument, que deux des racines de l'équation (918) sont imaginaires.

922. Ce serait un long travail que de chercher par les différences (872) les racines d'une valeur élevée, comme serait, par exemple, la racine -111. En pareils cas (je parle toujours des équations en général, de quelque degré qu'elles soient), il vaut mieux supposer pour x des valeurs de loin en loin, ou multiplier les premières supposées par quelque puissance de 10, selon qu'il paraîtrait plus convenable d'après les résultats obtenus.

Mais si l'on n'avait besoin que de connaître l'espèce de toutes les racines, et non leurs limites, une seule différentiation peut remplir ce but, puisque si l'équation différentiée manifeste des racines imaginaires, l'équation primitive doit en avoir au moins autant (893).

923. Dans notre exemple, la première différentiation donne

$$x^3 + \frac{333}{4} x^2 + 3x + \frac{1993}{4} = 0 = y'.$$

Valeurs de x;	-2,	-1,	0,	$+1$
Valeurs de y';	$+817 \frac{1}{4}$,	$+577 \frac{2}{4}$,	$+498 \frac{1}{4}$,	$+585 \frac{2}{4}$
Différences premières	$-239 \frac{3}{4}$,	$-79 \frac{1}{4}$,	$+87 \frac{1}{4}$.	

On voit qu'entre les limites -1 et 0 se manifeste l'indice de

deux racines qui ne se découvraient pas (918, 919) dans l'équation primitive. La grande valeur des résultats, et la petitesse, par comparaison, de celle des différences premières, permettent dans ce cas-ci, de faire sur-le-champ l'application du raisonnement (889), et de conclure qu'entre les valeurs de y', $+577$ et $+498$, il ne peut y en avoir aucune qui soit négative. Ces valeurs attestent donc (883) qu'il y a deux racines imaginaires. Il y en a par conséquent autant dans l'équation primitive.

924. Je propose encore, pour dernière épreuve, à ceux qui voudront s'exercer, l'équation $x^4+6x^2-12x+6=0$, dont les racines sont toutes imaginaires. Pour s'en assurer, il faut, après les opérations (860, 866), chercher les valeurs de y correspondantes aux valeurs 0,5; 0,75; 0,8; 0,85 de x. Il était à propos de donner aussi un exemple où la courbe se trouvât passer si près de l'axe, qu'on pût douter quelque temps s'il n'en est pas coupé.

925. Du reste, je me suis servi de figures pour mettre sous les yeux les fondemens de ma méthode. Mais je crois ce secours inutile à ceux qui auront bien compris les préceptes analytiques. En tout cas, je dois observer qu'il n'est besoin ni de temps, ni d'exactitude pour tracer ces figures, et qu'il suffit d'avoir l'attention de placer les ordonnées positives dans la partie supérieure, et les négatives dans l'inférieure. Aussi celles de x et celles de y, unités de même espèce, sont néanmoins représentées dans mes figures, sans aucun égard à leurs proportions.

926. Je crois avoir épuisé le premier point (857), en enseignant à trouver très-facilement les limites des racines réelles d'une équation quelconque, et de plus, le nombre des racines imaginaires quand il y en a. Jusqu'à présent on ne pouvait parvenir à déterminer ce nombre que par des méthodes extrêmement laborieuses; et je crois avoir fait une chose utile, en ouvrant aux mathématiciens une route sûre et aisée.

Il s'agit maintenant de satisfaire au second point, et de résoudre ce problème : *Les limites d'une racine étant données, déterminer sa valeur numérique, aussi approchée qu'on le voudra.*

927. Retournons à l'exemple (865), où l'on a trouvé que $+1$, $+2$ sont les limites d'une racine. Il faut de la connaissance de

ces limites passer à la détermination approchée à volonté de la valeur de la racine. Pour procéder par une hypothèse voisine de ces limites, j'emploie la correction des doubles fausses positions, laquelle consiste à ajouter à la plus petite, $+1$, des deux limites, le résultat correspondant 49, divisé par la différence entre ce résultat et le suivant ; et j'ai ainsi $x = 1 + \frac{49}{110} = 1{,}45$ à-peu-près. J'introduis cette valeur dans l'équation donnée (863), écrite comme il suit :

$$(b) \ldots\ldots \; x^5 - 9x^4 + 4x^3 + 66x^2 - 12x = 99 = n.$$

J'appelle n' la somme en chiffres des termes du premier membre, (s'il n'est, par hasard, égal à n); et par le moyen expéditif des logarithmes, j'ai $n' = 100{,}1847$. Je fais $\partial n' = n - n'$, et j'ai $\partial n' = -1{,}1847$. Je différencie l'équation (b), ce qui donne $(5x^4 - 36x^3 + 12x^2 + 132x - 12)\,\partial x = \partial n'$. Donc $\partial x = \partial n' : (5x^4 - 36x^3 + 12x^2 + 132x - 12)$. Je substitue les valeurs précédentes de x et de $\partial n'$, et j'obtiens $\partial x = -0{,}010127$, quantité qui, ajoutée à la valeur 1,45 de x, donne $x = 1{,}439873$.

928. Nous voilà parvenus, avec une seule hypothèse, au moyen de la correction fournie par le calcul différentiel, à trouver une valeur de la racine, exacte jusqu'à la sixième décimale, laquelle ne pèche que relativement à celles qui suivraient. Pour s'en convaincre, on peut, avec cette valeur nouvelle, calculer l'équation (b); puis de la valeur qui en résultera pour n', déduire celle de $\partial n'$, enfin chercher par l'équation différentielle la nouvelle correction ∂x; elle sera $-0{,}00000058$. On emploiera ainsi successivement les nouvelles valeurs de x, jusqu'à ce qu'on obtienne l'approximation desirée.

929. Les quantités constantes et l'uniformité des opérations rendent la répétition de ces calculs peu fatigante; à moins qu'on ne veuille plus de décimales que n'en peuvent donner les logarithmes, cas où l'on ne peut éviter de faire usage des nombres naturels. La méthode que nous exposons a l'avantage de résoudre avec une égale facilité toutes sortes d'équations les plus compliquées, soit algébriques, soit trigonométriques, et même transcendantes. Aussi sommes-nous surpris qu'on n'y ait pas eu recours dans beaucoup de problèmes, et spécialement dans celui de Kepler

(1485), dont la solution ne peut s'obtenir avec plus de simplicité et de promptitude par aucune autre voie. Peut-être nous objectera-t-on que notre méthode est substantiellement la même que celle de Newton : mais comme celle-ci est très-laborieuse, tant pour l'explication que pour les opérations préparatoires, il nous semble que nous avons droit à la propriété que nous a assurée la première édition de cet Ouvrage.

930. Si l'on voulait avoir en une fraction non décimale l'expression de la valeur 1,43987242 trouvée ci-dessus, on se servirait du moyen qui sert à réduire en fraction continue, supprimant la virgule, puis divisant par le dénominateur qui était sous-entendu, c'est-à-dire par 100000000, puis encore divisant ce diviseur par le reste, et ainsi de suite, de même que l'on opère pour chercher le plus grand commun diviseur de deux nombres. Ayant ainsi obtenu autant de quotiens qu'il y a de décimales dans le nombre donné, on les rangera comme il suit :

$$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 11,\ 1.$$

Puis on divisera le premier quotient par 1, c'est-à-dire qu'on écrira $\frac{1}{1}$. On multipliera chacun des deux termes de cette fraction par le second quotient, et le numérateur s'augmentera d'une unité; ce qui, dans le cas présent, donnera $\frac{2+1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$. Les deux termes de cette fraction seront ensuite multipliés par le troisième quotient, et on ajoutera au numérateur le numérateur de la fraction précédente, et au dénominateur celui de cette fraction précédente. On continuera ainsi jusqu'à la fin. La troisième fraction est $\frac{9+1}{6+1}$. Les voici toutes par ordre :

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{10}{7},\ \frac{13}{9},\ \frac{23}{16},\ \frac{36}{25},\ \frac{419}{291},\ \frac{455}{316}.$$

De ces fractions la première est moindre que le nombre donné, la seconde plus grande, et elles procèdent ainsi toujours en alternant, mais s'approchant de plus en plus de la valeur de ce nombre. La dernière le représente sans erreur jusqu'à la cinquième décimale.

931. Je passe aux problèmes trigonométriques. Je me propose d'abord l'équation

$$8 \sin. x + \text{tang.}\, x \sqrt{7803} = 55 = n,$$

dans laquelle on demande la grandeur de l'arc x. Comme cette équation contient deux différentes lignes trigonométriques de cet arc, il est nécessaire d'en éliminer une, pour découvrir les limites de l'autre.

932. Substituant, par exemple, la valeur (I. 34°) de tang. x, on a $8 \sin. x + \frac{\sin. x}{\sqrt{(1 - \sin.^2 x)}} \sqrt{7803} = 55$; puis, en chassant le signe radical qui renferme l'inconnue, on parvient, au moyen des opérations usitées, à l'équation qui suit :

$$\sin.^4 x - \frac{2.55}{8} \sin.^3 x + \frac{7803 + 55^2 - 64}{64} \sin.^2 x + \frac{2.55}{8} \sin. x = \frac{55^2}{8^2},$$

ou bien

$$\sin.^4 x - \frac{880}{64} \sin.^3 x + \frac{10764}{64} \sin.^2 x + \frac{880}{64} \sin. x - \frac{3025}{64} = 0 = y.$$

933. La solution directe de cette équation serait extrêmement laborieuse, et quoiqu'elle ne soit que du quatrième degré, il vaut mieux recourir aux voies indirectes. Or, comme tous les sinus sont renfermés entre les valeurs -1, $+1$, nous aurons

Valeurs de sin. x ;	-1,	$-\frac{1}{2}$,	0,	$+\frac{1}{2}$,	$+1$
Valeurs de y ;	$+121\frac{59}{64}$,	$-10\frac{20}{64}$,	$-47\frac{17}{64}$,	0,	$+121\frac{59}{64}$.
Différences premières,	$-132\frac{15}{64}$,	$-36\frac{61}{64}$,	$+47\frac{17}{64}$,	$+121\frac{57}{64}$	
secondes,	$+95\frac{18}{64}$,	$+84\frac{14}{64}$,	$+74\frac{42}{64}$		
troisièmes,	$-11\frac{4}{64}$,	$-9\frac{36}{64}$			
(868) quatrième constante,	$+1\frac{32}{64} = (\frac{1}{2})^4 \times 4.3.2.1.$				

934. On apperçoit deux racines ; l'une exacte, c'est-à-dire $\sin. x = \frac{1}{2} = \sin. 30°$; l'autre entre les limites -1, $-\frac{1}{2}$. Quant aux deux autres racines, ou elles se trouvent entre les mêmes limites que l'une des racines déjà découvertes, ou elles sont imaginaires. Dans le premier cas, l'équation différentiée deux fois doit avoir une racine (891) entre les limites ci-dessus. La différentiation réitérée donne

$$(c) \ldots\ldots \quad \sin.^2 x - \frac{220}{32} \sin. x + \frac{897}{32} = 0 = y''.$$

De $\sin. x = -1$, il résulte $y'' = +\frac{1149}{32}$; de $\sin. x = 0$, $y'' = +\frac{897}{32}$; de $\sin. x = +1$, $y'' = +\frac{709}{32}$. L'équation (c) n'a donc point de racines réelles ; donc aussi deux des racines de l'équation (932) sont imaginaires.

935. Cherchons maintenant la valeur de la racine qui existe entre les limites -1, $-\frac{1}{2}$. A en juger par les résultats correspondans, la plus grande limite, $-\frac{1}{2}$, est la plus voisine de la valeur cherchée. De cette limite retranchons, suivant la règle d'après laquelle a été faite l'addition (927) à la moindre limite, la quantité $\frac{10}{132}$ (en n'employant dans les deux termes que les nombres entiers), ou, à très-peu-près, 0,0757, et nous aurons, par la première supposition, $\sin. x = -0,5757 = \sin. 215° 9'$, à-peu-près.

936. Avec la valeur 215° 9′ de x, je calcule l'équation (931), comme plus expéditive que l'équation (932); et observant que tang. 215° 9′ est positive (73), je trouve

$$\begin{aligned} \text{tang.}\, x\sqrt{7803} &= 62,19783 \\ \text{Mais } 8\sin. x &= -\ \ 4,60575 \\ \text{Donc } n' &= 57,59208 \end{aligned}$$

Et par conséquent (927), $\delta n' = n - n' = -2,59208$.

937. En différentiant l'équation (931), qui est de même plus expéditive que l'équation (932) pour les calculs suivans, et mettant n' au lieu de n, attendu que la valeur exacte de x n'est pas encore connue, j'obtiens (II. 38°, 40°), $8\cos. x\,\delta x + \frac{\delta x\sqrt{7803}}{\cos.^2 x}$ $= \delta n'$; d'où

$$\delta x = \frac{-2,59208}{8\cos. 215°9' + \frac{\sqrt{7803}}{\cos.^2 215°9'}} = \frac{-2,59208}{-6,54118 + 132,12909} = -\frac{2,59208}{125,58791}.$$

Effectuant la division, et multipliant le quotient par R″, (633), il en résulte $\delta x = -70' 57''$.

938. L'erreur est trop grande pour que les secondes soient exactes. Je diminue donc x de 71′, et j'ai, pour seconde supposition, $x = 213° 58'$; puis, calculant avec cette valeur l'équation (931), je trouve $n' = 55,038$; et $\delta n' = -0,038$. Donc alors

$$\delta x = -\frac{0,038}{8\cos. 213° 58' + \frac{\sqrt{7803}}{\cos.^2 213° 58'}} = -\frac{0,038}{121,78778},$$

ou enfin, en achevant le calcul, et multipliant par R″, $\delta x =$

— 64",4. On a donc 213° 58′ — 1′ 4",4 = 213° 56′ 55",6 pour valeur très-exacte de x, obtenue par deux suppositions seulement.

939. *Trouver la limite commune de la convergence des deux séries* (U), (281), *et* (Z), (300).

Le but de la solution de ce problème est de reconnaître quelle est la plus convergente de ces deux séries pour calculer la tangente d'un arc donné.

Si on veut calculer une tangente par le moyen de la série (Z) des cotangentes, il faut employer 90° — A au lieu de A. Cette substitution faite, si l'on compare deux termes également distans du premier dans les deux séries, la convergence sera la même lorsque ces deux termes auront des valeurs égales. Cette comparaison ne doit pas être faite entre les premiers termes, la série la plus convergente étant celle dans laquelle les termes diminuent le plus de valeur à mesure qu'ils s'éloignent du premier. Je prends donc le huitième terme de la série (U), qui est (296), $\frac{929569\,A^{15}}{3^3.5^2.7^2.9.11.13.15}$, et de même le huitième terme de la série (Z), qui est $\frac{4(90°-A)^{13}}{3^4.5^2.7.9.11.13}$. En les mettant en équation, et multipliant les deux membres par $3^4.5^2.7.9.11.13$, j'ai $\frac{929569}{7\times5}\times A^{15} = 4(90°-A)^{13}$, ou $\frac{929569}{140}\times A^{15} = (90°-A)^{13}$, équation de laquelle il s'agit de tirer la valeur de A. Soit, pour plus de simplicité, $\frac{929569}{140} = a$. En tirant la racine 13ᵉ, j'aurai $\sqrt[13]{aA^{15}} = 90° - A$, et par conséquent $\sqrt[13]{aA^{15}} + A = 90° = n$.

940. La méthode des limites (860 et suiv.) ne s'appliquant pas commodément à cette équation, il vaut mieux procéder, par des suppositions, en les corrigeant comme on l'a vu (927 et suiv.).

Désignons donc par B une valeur de A supposée à volonté, et soit d'abord B = 40°. Je fais le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\log. 40 &= 1,60205999\\
(631),\ \text{compl. log. } R^\circ &= 8,24187737\\
\hline
\log. B &= 9,84393736\\
\hline
\log. B^{15} \text{ ou } 15 \log. B &= 7,6590604\\
\log. a = \begin{cases}\log. 929569 \\ \text{compl. log. } 140\end{cases} &\begin{aligned}&= 5,9682816\\ &= 7,8538720\end{aligned}\\
\hline
\log. aB^{15} &= 1,4812140\\
\hline
\tfrac{1}{13} \log. aB^{15} &= 0,1139395
\end{aligned}$$

Pour avoir $\sqrt[13]{aB^{15}}$ en degrés, j'ajoute log. $R^\circ = 1,7581226$

$$\begin{aligned}
\text{somme} &\quad 1,8720621\\
\text{Donc } \sqrt[13]{aB^{15}} &= 74^\circ,48385\\
B &= 40^\circ\\
\hline
\text{Somme (927) (que je désignerai par } n') &\quad 114^\circ,48385\\
\text{La véritable valeur de } n \text{ est} &\quad 90^\circ\\
\hline
\text{Erreur, ou } \delta n' &= 24^\circ,48385
\end{aligned}$$

941. Cette erreur est considérable, et mériterait une seconde supposition avant de faire usage du calcul différentiel. Mais nous nous en dispenserons, et nous obtiendrons une correction presque juste en employant, dans le calcul numérique de l'équation différentielle que nous allons former, une valeur $B - \frac{1}{2}\delta B$ au lieu de B. Cet expédient, réellement utile, m'a été suggéré par les différentielles finies des lignes trigonométriques, (table II), dans lesquelles, comparées aux infinitésimales, on a cos. $(B + \frac{1}{2}\delta B)$ au lieu de cos. B, et cos. B cos. $(B + \delta B)$, ou, à très-peu-près, cos.$^2(B + \frac{1}{2}\delta B)$ au lieu de cos.^{2}B; ce qui doit se dire de même des autres formules de cette espèce. Mais, en considérant la chose plus généralement encore, qu'on observe que le calcul infinitésimal donne $\delta(x^2) = 2x\delta x$, et le calcul fini $\delta(x^2) = (x + \delta x)^2 - x^2 = 2x\delta x + (\delta x)^2 = 2\delta x\,(x + \frac{1}{2}\delta x)$; d'où l'on voit qu'en employant $x + \frac{1}{2}\delta x$ au lieu de x, dans l'équation $\delta(x^2) = 2x\delta x$, cette équation devient très-exacte, quelle que soit la valeur finie de δx. Et quoique les différentielles des puissances plus grandes

s'éloignent peu à peu, et de plus en plus, de cette exactitude précise, on obtient néanmoins encore une grande approximation; ce dont l'exemple présent donne une preuve remarquable.

942. En différentiant l'équation (939) que j'exprime ainsi : $a^{\frac{1}{13}}B^{\frac{15}{13}} + B = n'$, j'aurai $\partial n' = \frac{15}{13}a^{\frac{1}{13}}B^{\frac{15}{13}-1}\partial B + \partial B = \partial B\left(1 + \frac{15}{13}a^{\frac{1}{13}}B^{\frac{2}{13}}\right)$; d'où je tire $\partial B = \frac{\partial n'}{1 + \frac{15}{13}\sqrt[13]{aB^2}}$; et puisque $\partial n' = \frac{1}{5}n'$ à-peu-près, si je suppose de même $\partial B = \frac{1}{5}B = 8°$, j'aurai $B - \frac{1}{2}\partial B = 36°$ pour la valeur à employer, au lieu de B, dans l'équation différentielle, dont voici le calcul, dans lequel j'appelle D la quotité $B - \frac{1}{2}\partial B$:

log. 36 =	1, 55630250
compl. log. R° =	8, 24187737
log. D =	9. 79817987
Idem =	9. 79817987
Je tire du calcul précédent log. a =	3, 8221536
log. aD^2 =	3, 41851334
$\frac{1}{13}$ log. aD^2 =	0, 26296256
log. 15 =	1, 17609126
comp. log. 13 =	8, 88605665
somme	0, 3251105
Donc $\frac{15}{13}\sqrt[13]{aD^2}$ =	2, 11403
compl. log. 3, 11403 =	9, 5066776
log. $\partial n'$ = log. — 24,48385 =	1, 3888797
somme ou log. — ∂B =	0, 895557.

Donc $\partial B = -7{,}862 = -7°\ 52'$, et par conséquent je trouve pour la valeur cherchée de A, 32° 8'; ce qui ne diffère que de peu de secondes de la véritable valeur, comme on peut le reconnaître par une seconde opération. Mais dans la solution du problème dont il s'agit, plus d'exactitude serait inutile, et nous pouvons conclure que *pour calculer une tangente, la plus convergente des séries* (U) et (Z) est la première quand l'arc est moindre que 32°, et la seconde quand l'arc est de plus de 32°.

943. Si dans les deux problèmes que nous venons de résoudre, on essaie d'employer les règles ordinaires pour la correction des fausses positions, on reconnaîtra que la méthode que nous proposons est bien préférable à ces règles. Pour le prouver d'autant mieux, nous allons appliquer cette même méthode à divers problèmes relatifs à la quadrature du cercle, qu'Euler a résolus au moyen d'un grand nombre de fausses positions, (*Anal. infinit.* Lib. II, cap. XXII).

944. Dans le premier de ces problèmes, il s'agit de trouver quel est l'arc égal à son cosinus. L'équation à résoudre est donc $A = \cos. A$.

Je suppose d'abord pour A une valeur quelconque, que je nomme P; j'appelle Q la valeur que j'aurai pour A dans le second membre, lorsque j'aurai mis P dans le premier; ce qui me donnera

$$\text{(C)} \ldots\ldots \quad P = \cos. Q.$$

En différentiant, j'ai $\delta P = -\delta Q \sin. Q$. Je fais $\delta P = A - P$; d'où il suit que $\delta Q = A - Q$, et que par conséquent $A = P + \delta P = Q + \delta Q$. Donc

$$\text{(D)} \ldots\ldots \quad \delta P = Q - P + \delta Q.$$

Donc aussi $Q - P + \delta Q = -\delta Q \sin. Q$, ou $Q - P = -\delta Q(1 + \sin. Q) = -\delta Q \times 2 \sin.^2(45° + \frac{1}{2}Q)$, (I. 11°). D'où je déduis

$$\text{(E)} \ldots\ldots \quad \delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q-P)}{\sin.^2(45° + \frac{1}{2}Q)}.$$

Les équations (C), (E) nous donneront promptement la valeur cherchée de A.

945. En effet, supposons d'abord, avec Euler, $P = 30°$.

$$\log. 30 = 1,477121$$
$$(631), \text{ compl. log. } R° = 8,241877$$
$$\log. P = \log. \cos. Q = 9,718998;$$

ce qui donne $Q = 58° \, 26'$: donc $\frac{1}{2}(Q - P) = 14° \, 13' = 14°,2$ à-peu-près; et $45° + \frac{1}{2}Q = 74° \, 13'$. En calculant l'équation (E), on aura par conséquent

$$\begin{aligned} \log.\ 14,2 &= 1,15229 \\ \text{compl. log. sin. } 74^\circ\ 13' &= 0,01669 \\ &\ \underline{0,01669} \\ \log. -\delta Q &= 1,18567\,; \end{aligned}$$

ce qui donne $\delta Q = -15^\circ,33 = -15^\circ\ 20'$. Pour avoir cette valeur plus approchée, j'emploie (941) $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q dans l'expression $\sin.(45^\circ + \frac{1}{2}Q)$; et j'ai $Q + \frac{1}{2}\delta Q = 58^\circ\ 26' - 7^\circ\ 40' = 50^\circ\ 46'$, et $45^\circ + \frac{1}{2}(Q + \frac{1}{2}\delta Q) = 70^\circ\ 23'$. Alors l'équation (E) donne $\delta Q = -\frac{14^\circ,2}{\sin.^2 70^\circ\ 23'} = -16^\circ$. Donc A ou $Q + \delta Q = 58^\circ\ 26' - 16^\circ = 42^\circ\ 26'$.

Cette valeur de A ne peut être exacte, parce que l'erreur δQ est trop grande; mais elle est assez approchée pour qu'en faisant encore une autre supposition seulement, on parvienne à la valeur cherchée. Soit donc, pour seconde supposition, et en prenant pour les minutes un nombre qui puisse se réduire exactement en dixièmes de degrés, $P = 42^\circ\ 24' = 42^\circ,4$. En calculant l'équation (C), on a

$$\begin{aligned} \log.\ 42,4 &= 1,62736586 \\ \text{compl. log. } R^\circ &= \underline{8,24187737} \\ \log. \cos. Q &= 9,8692432. \end{aligned}$$

Donc $Q = 42^\circ\ 16'\ 0'',89$ et $\frac{1}{2}(Q - P) = -3'\ 59'',555$. Alors l'équation (E) donne $\delta Q = \frac{239'',555}{\sin.^2 66^\circ\ 8'} = 286'',5$; et en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q dans le dénominateur, on aura, avec toute la précision que peuvent donner les logarithmes à sept décimales, $\delta Q = \frac{239'',555}{\sin.^2 66^\circ\ 9'\ 12''} = 286'',36$. Donc A ou $Q + \delta Q = 42^\circ\ 16'\ 0'',89 + 4'\ 46'',36 = 42^\circ\ 20'\ 47'',25$. Euler fait sept suppositions et calcule trois règles de trois pour arriver à cette valeur. Au lieu de $15''' = 0'',25$, il trouve $14'''$ par une erreur dans la dernière des proportions qu'il emploie : mais au surplus les logarithmes à sept décimales ne peuvent donner exactement les tierces; et si je tiens compte des centièmes de secondes, c'est dans la seule vue d'avoir les dixièmes avec précision.

Ce problème est utile pour trouver le sinus qui divise en deux

parties égales l'aire du quart de cercle, et pour trouver la corde qui divise en deux parties égales l'aire du demi-cercle, comme on peut le voir dans le troisième et le quatrième problème d'Euler.

Dans le second problème qu'il se propose, il s'agit de trouver le secteur que la corde divise en deux également; dans ce cas, on a à résoudre l'équation $A = \sin. 2A$. Je fais $P = \sin. 2Q$, et j'ai $\delta P = 2\delta Q \cos. 2Q = Q - P + \delta Q$, suivant la formule (D). Donc $Q - P = 2\delta Q (\cos. 2Q - \frac{1}{2}) = 2\delta Q (\cos. 2Q - \cos. 60^\circ)$ $= 4\delta Q \sin. (30^\circ - Q) \sin. (30^\circ + Q)$, (II. 24°); et par conséquent

$$\delta Q = \frac{\frac{1}{4}(Q - P)}{\sin. (30^\circ - Q) \sin. (30^\circ + Q)}$$

Faisons maintenant, avec Euler, $P = 50^\circ$; nous aurons $\frac{50}{R^\circ} =$ $\sin. 2Q = \sin. 60^\circ\ 46' = \sin. 119^\circ\ 14'$, (54). Cette dernière valeur est celle qu'il convient d'employer, puisqu'elle donne pour Q une valeur plus approchée de celle de P; cette valeur sera $59^\circ\ 37' = Q$. Donc $\frac{1}{4}(Q - P) = 2^\circ\ 24'$ à-peu-près, et (75), $\delta Q = \frac{2^\circ,4}{-\sin. 29^\circ\ 37' \sin. 89^\circ\ 37'} = -4^\circ,8$; puis, en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q, ce dont nous n'avertirons plus, $\delta Q =$ $\frac{2^\circ,4}{-\sin. 27^\circ\ 13' \sin. 87^\circ\ 13'} = -5^\circ,25$. Par conséquent A ou $Q +$ $\delta Q = 59^\circ\ 37' - 5^\circ\ 15' = 54^\circ\ 22'$.

Soit donc pour seconde hypothèse $P = 54^\circ\ 21' = \frac{54,35}{R^\circ} =$ $\sin. 2Q$: alors $Q = 54^\circ\ 13'\ 34'',5$; et par conséquent $\frac{1}{4}(Q - P)$ $= -1'\ 51'',375$; ce qui donne $\delta Q = \frac{-111'',375}{-\sin. 24^\circ\ 14' \sin. 84^\circ\ 14'} =$ $273''$; et enfin, avec toute la précision qu'on peut desirer, $\delta Q =$ $\frac{-111'',375}{-\sin. 24^\circ\ 15'\ 50'' \sin. 84^\circ\ 15'\ 50''} = 272'',39$. Donc $A = Q + \delta Q =$ $54^\circ\ 13'\ 34'',5 + 4'\ 32'',4 = 54^\circ\ 18'\ 6'',9$.

La solution de ce problème a coûté à Euler six hypothèses et deux règles de trois.

Dans le cinquième problème, Euler propose de tirer d'un point de la circonférence deux cordes qui coupent l'aire du cercle en trois parties égales. On a alors à résoudre l'équation $A = \sin. (60^\circ - A)$. Je fais $P = \sin. (60^\circ - Q)$, et j'ai $\delta P = -\delta Q \cos. (60^\circ - Q) =$

$Q - P + \delta Q$; d'où je tire $Q - P = -\delta Q\,(1 + \cos.\overline{60^\circ - Q})$ $= -2\delta Q\cos.^2(30^\circ - \frac{1}{2}Q)$, (I 24°); et par conséquent

$$\delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q-P)}{\cos.^2(30^\circ - \frac{1}{2}Q)}.$$

Faisons actuellement, comme Euler, $P = 20^\circ$. Nous aurons $\frac{20}{R^\circ} =$ sin. $(60^\circ - Q) =$ sin. $20^\circ\ 26'$; ce qui donne $Q = 39^\circ\ 34'$, et $\frac{1}{2}(Q-P) = 9^\circ\ 47' = 9^\circ, 8$ à-peu-près. Donc $\delta Q = \frac{-9^\circ, 8}{\cos.^2 10^\circ\ 13'}$ $= -10^\circ, 1$; et, plus exactement, $\delta Q = \frac{-9^\circ, 8}{\cos.^2 12^\circ\ 45'} = -10^\circ, 3$. Donc $A = Q + \delta Q = 39^\circ\ 34' - 10^\circ\ 18' = 29^\circ\ 16'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 29^\circ\ 15' = \frac{29, 25}{R^\circ} =$ sin. $(60^\circ - Q)$; ce qui donne $Q = 29^\circ\ 18'\ 8'', 17$. Alors $\frac{1}{2}(Q-P)$ $= 1'\ 34'', 085$; et $\delta Q = \frac{-94'', 085}{\cos^2.\ 15^\circ\ 21'} = -101''$; et, plus exactement, $\delta Q = \frac{-94'', 085}{\cos.^2 15^\circ\ 21'\ 20''} = -101'', 18$. Donc $Q + \delta Q$ ou $A = 29^\circ\ 16'\ 27''$, comme le trouve Euler, au moyen de six suppositions et de deux règles de trois.

L'objet du sixième problème d'Euler est de trouver un arc qui soit égal à la somme du rayon, du cosinus et du sinus. On a à résoudre l'équation $180^\circ - A = 1 +$ cos. $A +$ sin. A. A l'unité je substitue la valeur du rayon en degrés, laquelle est $57^\circ, 29578$, comme on peut le déduire de log. R°, (631); et j'ai $122^\circ, 70422 - A$ $=$ cos. $A +$ sin. $A =$ sin. $(45^\circ + A)\sqrt{2}$, (II. 7°). Soit, pour abréger, $122^\circ, 70422 = C$; nous aurons, toujours par la même méthode, $C - P =$ sin. $(45^\circ + Q)\sqrt{2}$, et $-\delta P = \delta Q$ cos. $(45^\circ + Q)\sqrt{2} = P - Q - \delta Q$; d'où l'on tire $P - Q =$ $\delta Q(\sqrt{\frac{1}{2}} + \cos.\overline{45^\circ + Q})\sqrt{2} = \delta Q\,(\cos. 45^\circ + \cos.\overline{45^\circ + Q})$ $\sqrt{2} = 2\delta Q\cos.(45^\circ + \frac{1}{2}Q)\cos.\frac{1}{2}Q\sqrt{2}$, (II. 20°). Et par conséquent

$$\delta Q = \frac{\frac{1}{2}(P-Q)}{\cos.\frac{1}{2}Q\cos.(45^\circ + \frac{1}{2}Q)\sqrt{2}}.$$

Soit, avec Euler, $P = 40^\circ$; alors $C - P = 82^\circ, 70422$. Mais $\frac{82, 70422}{R^\circ\sqrt{2}}$ est > 1, tandis que cette quantité doit être égale à sin. $(45^\circ + Q)$; donc la valeur supposée pour P est trop petite.

Par la seconde supposition d'Euler, $P = 42°$; ce qui donne $\frac{80,70422}{R° \sqrt{2}} = \sin.\ (45° + Q) = \sin.\ 84°\ 52'$, et par conséquent $Q = 39°\ 52'$, $\frac{1}{2}(P - Q) = 1°\ 4' = 1°, 07$ à-peu-près, et $\partial Q = \frac{1°, 07}{\cos.\ 19°\ 56'\ \cos.\ 64°\ 56' \sqrt{2}} = 1°, 9 = 1°\ 54'$; et, plus exactement, $\partial Q = \frac{1°, 07}{\cos.\ 20°\ 24'\ \cos.\ 65°\ 24' \sqrt{2}} = 1°, 94 = 1°\ 56'$. Donc $Q + \partial Q$ ou $A = 39°\ 52' + 1°\ 56' = 41°\ 48'$.

Soit donc, pour dernière hypothèse, $P = 41°\ 48' = 41°, 8$. Alors $C - P = 80°, 90422$; et $\frac{80, 90422}{R° \sqrt{2}} = \sin.\ 86°\ 49'\ 36'', 4$; ce qui donne $Q = 41°\ 49'\ 36'', 4$, et $\frac{1}{2}(P - Q) = -48'', 2$. Donc $\partial Q = \frac{-48'', 2}{\cos.\ 20°\ 55'\ \cos.\ 65°\ 55' \sqrt{2}} = -89'', 4$. Cette quantité est si petite, qu'il est inutile d'appliquer au dénominateur la correction ordinaire. On a donc $A = Q + \partial Q = 41°\ 48'\ 7'', 0$, valeur qu'Euler obtient par quatre suppositions et deux règles de trois.

Dans le septième problème, Euler cherche un secteur qui soit égal à la moitié du triangle formé par le rayon, par la tangente et par la sécante. L'équation à résoudre est $2A = \text{tang.}\ A$. Je fais $2P = \text{tang.}\ Q$, et j'ai $2\partial P = \frac{\partial Q}{\cos.^2 Q} = 2(Q - P + \partial Q)$, et $Q - P = \partial Q \left(\frac{1}{2 \cos.^2 Q} - 1\right) = \partial Q \times \frac{1 - 2\cos.^2 Q}{2 \cos.^2 Q} = -\partial Q \times \frac{\cos.\ 2Q}{2 \cos.^2 Q}$, (I. 23°). Donc

$$\partial Q = \frac{2(P - Q) \cos.^2 Q}{\cos.\ 2Q}.$$

Actuellement faisons, avec Euler, $P = 60°$: nous aurons $\frac{120}{R°} = \text{tang.}\ Q$; $Q = 64°\ 29'$; $2(P - Q) = -8°\ 58' = -8°, 95$ à-peu-près; $\partial Q = -\frac{8°, 95 \cos.^2 64°\ 29'}{\cos.\ 128°\ 58'} = 2°, 64 = 2°, 38'$; et, plus exactement, $\partial Q = -\frac{8°, 95 \cos.^2 65°\ 48'}{\cos.\ 131°\ 36'} = 2°, 265$. Donc A ou $Q + \partial Q = 66°\ 45'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 66°, 75$; et par conséquent $\frac{133, 5}{R°} = \text{tang.}\ Q$. Alors $Q = 66°\ 46'\ 18'', 72$; $2(P - Q)$

$= -157'',44$; $\delta Q = -\frac{157'',44 \cos.^2 66° 46'}{\cos. 133° 33'} = 55'' \frac{1}{2}$; et, scrupuleusement, $\delta Q = -\frac{157'',44 \cos.^2 66° 46' 54''}{\cos. 133° 33' 48''} = 55'',51$. Donc A $= Q + \delta Q = 66° 46' 54'',23$.

Euler parvient à ce résultat au moyen de six suppositions dont le P. Fontana a aussi fait usage, (Tom. II *des Mémoires de la Société Italienne.*)

Enfin, dans le huitième problème, Euler se propose de déterminer un arc qui soit égal à sa corde continuée jusqu'à la rencontre du prolongement du rayon qui passe à 90° de l'origine de cet arc. L'équation à résoudre est $A \sin. \frac{1}{2} A = 1$. Je l'écris ainsi, $A = \text{cosec.} \frac{1}{2} A$, expression qui conduit plus promptement à l'équation différentielle ci-après. Je fais ensuite, comme dans les opérations précédentes, $P = \text{cosec.} \frac{1}{2} Q$, et réduisant à la forme infinitésimale la différentielle finie de la cosécante (1407), j'ai $\delta P = -\frac{1}{2} \delta Q \times \frac{\cos. \frac{1}{2} Q}{\sin.^2 \frac{1}{2} Q} = Q - P + \delta Q$, et $Q - P = -\delta Q \left(1 + \frac{\cot. \frac{1}{2} Q}{2 \sin. \frac{1}{2} Q}\right)$.

Maintenant faisons, avec Euler, $P = 70°$. On a $\frac{70}{R°} = \text{cosec.} \frac{1}{2} Q$, ou $\frac{R°}{70} = \sin. \frac{1}{2} Q = \sin. 54° 56'$: donc $Q = 109° 52'$, et $Q - P = 39° 52' = 39°,87$ à-peu-près. Mais $\frac{\cot. 54° 56'}{2 \sin. 54° 56'} = 0,4288$: donc $\delta Q = -\frac{39°,87}{1,4288} = -27°,9$. Plus exactement, $\frac{\cot. 47° 57'}{2 \sin. 47° 57'} = 0,60735$, et $\delta Q = -\frac{39°,87}{1°,60735} = -24°,8$. Donc A ou $Q + \delta Q = 85° 4'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 85° 5' = 85°,05$. Nous aurons $\frac{R°}{85,05} = \sin. \frac{1}{2} Q = \sin. 42° 21' 3'',9$; et par conséquent $Q = 84° 42' 7'',8$; et $Q - P = -20' 52'',2 = -1252'',2$. Mais $\frac{\cot. 42° 21'}{2 \sin. 42° 21'} = 0,81426$: donc $\delta Q = \frac{1252'',2}{1,81426} = 690''$, $2 = 11' 30'',2$. Plus rigoureusement, $\frac{\cot. 42° 23' 56'',4}{2 \sin. 42° 23' 56'',4} = 0,812098$; donc $\delta Q = \frac{1252'',2}{1,812098} = 691'',02 = 11' 31'',02$. Donc $A = Q + \delta Q$

$=84^{\circ}\ 53'\ 58'',82$. Euler trouve une valeur un peu moins approchée : il y parvient après six suppositions.

945. Les équations résolues dans l'article précédent sont du genre des équations *transcendantes*, parce qu'elles contiennent l'arc A sous deux formes hétérogènes (179), c'est-à-dire parce que l'arc y est comparé et égalé à des lignes droites, telles que les lignes trigonométriques de cet arc ou de ses multiples.

946. Il est facile de résoudre par notre méthode l'équation de cette forme, $\sin. nA = m \sin. A$, que propose d'Alembert, (*Opusc. Math.* Tom. V, p. 222), et de laquelle il s'agit de tirer la valeur de l'arc A. Je fais $\sin. nP = m \sin. Q$, et j'ai $n \partial P \cos. nP = m \partial Q \cos. Q$. Substituant la valeur (D) de ∂P, (944), je trouve $\partial Q = \frac{(Q-P)\cos. nP}{\frac{m}{n}\cos. Q - \cos. nP}$. Deux suppositions donneront la valeur de A, pourvu que l'on observe, dans l'une et dans l'autre de ces suppositions, de faire deux calculs pour avoir la valeur de ∂Q, en employant, dans le second de ces calculs, $\cos. n(P + \frac{1}{2}\partial P)$ et $\cos. (Q + \frac{1}{2}\partial Q)$ au lieu de $\cos. nP$ et de $\cos. Q$, (941).

947. Au reste ce problème et ceux de l'article (944) peuvent se résoudre directement par les séries infinies. Par exemple, l'équation de d'Alembert se transforme en celle-ci (267), $nA - \frac{1}{6}n^3A^3 + \frac{1}{120}n^5A^5 - \text{etc.} = m(A - \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{120}A^5 - \text{etc.})$. Donc $(n-m)A - \frac{1}{6}(n^3-m)A^3 + \frac{1}{120}(n^5-m)A^5 - \text{etc.} = 0$. Divisant par A, et transposant, on a

$$n - m = \frac{1}{6}(n^3-m)A^2 - \frac{1}{120}(n^5-m)A^4 + \text{etc.}$$

Qu'on fasse $A^2 = y$, et cette équation comparée à l'équation (259), en observant qu'ici $n-m$ tient lieu de m dans l'équation (P), donnera une autre équation de la forme (Q), (260), de laquelle on tirera la valeur de y, et par conséquent celle de A ou de $\sqrt{y}$.

948. Nous avons donné les moyens de résoudre une équation quelconque. Il nous reste à faire voir combien la Trigonométrie donne de facilité pour arriver à de certaines solutions qu'on n'obtient qu'avec peine par la voie de l'analyse.

Soit l'équation

(F)...... $a \cos. A + b \sin. A = n$,

de laquelle on veut tirer la valeur de l'arc A. Je divise cette équation par a, et faisant

(G)...... $\text{tang. B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}}$,

j'aurai (II. 4°),

(H)...... $\text{cos.}(\text{A} - \text{B}) = \frac{n \text{ cos. B}}{a}$.

La solution des équations de la forme (F) se réduit donc à chercher par l'équation (G) un arc B, et par l'équation (H) un arc (A — B) : la somme ou la différence de ces deux arcs est également l'arc cherché A. Car l'équation (F) est implicitement du second degré, comme on peut le voir en substituant, par exemple, $\sqrt{(1 - \text{sin.}^2\text{A})}$ à cos. A, puis résolvant l'équation par les méthodes ordinaires, pour en tirer la valeur analytique de sin. A.

949. Le problème de d'Alembert (*Opusc.* Tom. VI, pag. 325), tendant à réduire le binôme

$$a \text{ cos. A} + b \text{ cos. B}$$

au monome x cos. y, est d'une expression analogue, quoique d'un autre genre.

Qu'on écrive $\text{B} = \text{A} + m$; et $y = \text{A} + z$.
On aura $a \text{ cos. A} + b \text{ cos. A cos.} m - b \text{ sin. A sin.} m = x \text{ cos. A cos.} z - x \text{ sin. A sin.} z$; d'où $\text{cos. A} (a + b \text{ cos.} m - x \text{ cos.} z) = \text{sin. A} (b \text{ sin.} m - x \text{ sin.} z)$. Donc en faisant

$x \text{ cos.} z = a + b \text{ cos.} m$, il en résultera

$x \text{ sin.} z = b \text{ sin.} m$.

Divisez la seconde de ces deux équations par la première, vous aurez

$$\text{tang.} z = \frac{b \text{ sin.} m}{a + b \text{ cos.} m};$$

quarrez les deux mêmes équations, et leur somme donnera

$$x^2 = a^2 + 2ab \text{ cos.} m + b^2.$$

Le problème est résolu, puisque x, z, et par conséquent y, sont exprimés au moyen des quantités du binôme donné.

D'Alembert en déduit cette conséquence, que toute quantité composée des termes a cos. A, b sin. B, etc., peut se réduire de la

même manière à la forme x cos. y, ou bien x sin. y', en faisant $y' = 90° - y$. Si l'on avait plus de deux termes, on réduirait les deux premiers à un seul, puis ce terme et le troisième encore à un seul, puis celui-ci et le quatrième, et ainsi de suite.

950. Soit maintenant à résoudre l'équation

$$a \text{ tang. } x + b \text{ cot. } x = n.$$

En multipliant l'équation par $\frac{\text{tang. } x}{a}$, et transposant, on a $\text{tang.}^2 x - \frac{n}{a} \text{ tang. } x = -\frac{b}{a}$, équation facile à résoudre par la méthode (818).

951. Soit enfin proposée l'équation suivante, finie ou infinie;

(K).... $z = u + a \sin. u + b \sin. 2u + c \sin. 3u + \text{etc.},$

dans laquelle on cherche la valeur de u. Cette équation est du genre des *transcendantes* (945). La solution la plus facile, dans les cas particuliers, est celle que j'ai donnée (940). Mais si l'on veut une formule générale infinie, dans laquelle la série soit convertie analytiquement comme il suit,

(L).... $u = z + A \sin. z + B \sin. 2z + C \sin. 3z + \text{etc.},$

les méthodes trigonométriques que nous avons vues jusqu'à présent sont extrêmement laborieuses; ce qui m'a donné lieu de chercher la méthode beaucoup plus simple que je vais exposer.

952. Si dans la série (K) on substitue les valeurs de sin. u, sin. $2u$, sin. $3u$, etc., données par la série (W), (267), on aura, en réunissant les coefficiens de chaque puissance de u,

$$(M)\ldots z = (1 + a + 2b + 3c + \text{etc.})u - \tfrac{1}{6}(a + 2^3b + 3^3c + \text{etc.})u^3$$
$$+ \tfrac{1}{120}(a + 2^5b + 3^5c + \text{etc.})u^5 - \text{etc.}$$

En traitant de même la série (L), elle deviendra

$$(N)\ldots u = (1 + A + 2B + 3C + \text{etc.})z - \tfrac{1}{2.3}(A + 2^3B + 3^3C + \text{etc.})z^3$$
$$+ \tfrac{1}{2.3.4.5}(A + 2^5B + 3^5C + \text{etc.})z^5 - \text{etc.}$$

953. Pour plus de simplicité, exprimons ces deux séries comme il suit :

$$z = mu - nu^3 + pu^5 - qu^7 + ru^9 - \text{etc.}$$
$$u = \mathrm{M}z - \mathrm{N}z^3 + \mathrm{P}z^5 - \mathrm{Q}z^7 + \mathrm{R}z^9 - \text{etc.}$$

Substituons ensuite dans la dernière les valeurs de z, z^3, z^5, etc., prises de la précédente; et ordonnant les termes relativement aux puissances de u, (263), nous aurons

$$u = \left\{\begin{array}{lrrrrl}
\mathrm{M}z = & \mathrm{M}mu - \mathrm{M}nu^3 + & \mathrm{M}pu^5 - & \mathrm{M}qu^7 + & \mathrm{M}ru^9 & - \text{etc.} \\
-\mathrm{N}z^3 = & -\mathrm{N}m^3 + & 3\mathrm{N}m^2n - & 3\mathrm{N}m^2p + & 3\mathrm{N}m^2q & - \text{etc.} \\
 & & & -3\mathrm{N}mn^2 + & 6\mathrm{N}mnp & - \text{etc.} \\
 & & & + & \mathrm{N}n^3 & - \text{etc.} \\
+\mathrm{P}z^5 = & & \mathrm{P}m^5 - & 5\mathrm{P}m^4n + & 5\mathrm{P}m^4p & - \text{etc.} \\
 & & & + & 10\mathrm{P}m^3n^2 & - \text{etc.} \\
-\mathrm{Q}z^7 = & & & -\mathrm{Q}m^7 + & 7\mathrm{Q}m^6n & - \text{etc.} \\
+\mathrm{R}z^9 = & & & + & \mathrm{R}m^9 & - \text{etc.} \\
-\text{etc.} & & & & &
\end{array}\right.$$

954. D'où nous tirerons par la méthode exposée (264),

$$\mathrm{M} = \frac{1}{m},$$
$$\mathrm{N} = -\frac{n}{m^4},$$
$$\mathrm{P} = \frac{3n^2 - pm}{m^7},$$
$$\mathrm{Q} = -\frac{12n^3 - 8mnp + qm^2}{m^{10}},$$
$$\mathrm{R} = \frac{55n^4 - 55mn^2p + 10m^2nq + 5m^2p^2 - rm^3}{m^{13}}.$$

Ce sont les équations finales du problème, puisqu'en substituant dans ces équations les valeurs de M, N, P, etc., m, n, p, etc., prises dans les séries (N), (M), il ne reste plus qu'à les résoudre par les méthodes ordinaires, pour en tirer les valeurs des indéterminées A, B, C, etc. Nous en allons faire un essai sur le problème de Kepler (1485), en nous bornant à la quatrième indéterminée D.

955. Au lieu de $\mathrm{M} = \frac{1}{m}$, on a par les séries (N), (M),

$$1 + \mathrm{A} + 2\mathrm{B} + 3\mathrm{C} + 4\mathrm{D} = \frac{1}{1 + a + 2b + 3c + 4d}, \text{ ou}$$

$$(\mathrm{O})\ldots\ \mathrm{A} + 2\mathrm{B} + 3\mathrm{C} + 4\mathrm{D} = -\frac{a + 2b + 3c + 4d}{1 + a + 2b + 3c + 4d}.$$

Au lieu de $N = -\frac{n}{m^4}$, on a $\frac{1}{6}(A + 8B + 27C + 64D)$
$= -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{6(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}$, ou

$$(P) \ldots \ A + 8B + 27C + 64D = -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}.$$

956. Or, dans le problème de Kepler, $a = 2e$, $b = \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4$, $c = \frac{1}{3}e^3$, $d = \frac{5}{32}e^4$, (en désignant par e l'excentricité de l'orbite d'une planète). Substituant ces valeurs dans l'équation (O), et réduisant, on a

$$A + 2B + 3C + 4D = -\frac{2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}{1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}.$$

Qu'on effectue la division, en négligeant les puissances de e supérieures à la quatrième que nous avons prise pour limite, et on aura

$$(Q) \ldots \ A + 2B + 3C + 4D = -2e + \frac{5}{2}e^2 - 3e^3 + \frac{27}{8}e^4.$$

Pour simplifier de la même manière l'équation (P), il faut premièrement élever à la quatrième puissance la valeur $(1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4)$ de $1 + a + 2b + 3c + 4d$. Dans cette opération on peut négliger même la quatrième puissance de e, parce que dans la division elle n'influe que sur la cinquième. Alors on a facilement $(1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3)^4 = 1 + 8e + 30e^2 + 72e^3$. En divisant par le second membre de cette équation la valeur de $a + 8b + 27c + 64d$, qui est $2e + 6e^2 + 9e^3 + 11e^4$, l'équation (P) deviendra

$$(R) \ldots \ A + 8B + 27C + 64D = -2e + 10e^2 - 29e^3 + 65e^4.$$

957. Dans le problème de Kepler, la série (K) a cette propriété, que les coefficiens a, c, etc., correspondans aux multiples impairs de u, contiennent seulement les puissances impaires de e, c'est-à-dire de l'excentricité, et que les coefficiens b, d, etc., correspondans aux multiples pairs de u, renferment seulement les puissances paires de e. La même loi doit avoir lieu dans la série (L), comme le démontre Laplace, (*Mécanique Céleste*, Tom. I, pag. 181). Si donc on admet pour principe que la valeur des indéterminées A, C, doit être exprimée par les puissances impaires de e, et la valeur des indéterminées B, D, par les puissances

paires, on pourra tirer la valeur de ces quatre inconnues des deux seules équations (Q), (R), en les décomposant en quatre autres, comme il suit :

$$A + 3C = -2e - 3e^3; \qquad 2B + 4D = \tfrac{5}{2}e^2 + \tfrac{27}{8}e^4;$$
$$A + 27C = -2e - 29e^3; \qquad 8B + 64D = 10e^2 + 65e^4.$$

C'est par cet artifice que des cinq équations finales seulement (954), j'ai tiré la valeur de neuf indéterminées, en poussant l'approximation, dans la série (L), jusqu'à sin. $9z$ et à la neuvième puissance de l'excentricité, comme on le verra (1489).

958. Dans l'analyse trigonométrique, on a quelquefois besoin de développer les valeurs approchées de sin. (n sin. a), sin. (n cos. a), cos. (n sin. a) cos. (n cos. a). En considérant n sin. a comme un arc, on a par la série (W), (267),

$$\sin.(n \sin. a) = n \sin. a - \frac{n^3 \sin.^3 a}{2.3} + \frac{n^5 \sin.^5 a}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

959. Si l'on veut cette valeur exprimée non par les puissances du sinus de a, mais par les sinus des multiples de a, on substituera les valeurs de sin.$^3 a$, sin.$^5 a$, etc., prises dans la table (509), et l'on aura

$$\sin.(n \sin. a) = \left(n - \frac{n^3}{8} + \frac{n^5}{192} - \text{etc.}\right)\sin. a + \left(\frac{n^3}{24} - \frac{n^3}{384} + \text{etc.}\right)\sin. 3a$$
$$+ \left(\frac{n^5}{1920} - \text{etc.}\right)\sin. 5a + \text{etc.}$$

On développerait de même les autres sinus et cosinus proposés, en se servant, pour les cosinus, de la série (285).

Il est facile de voir que l'utilité de ces opérations dépend de la convergence des séries formées comme ci-dessus; et que cette convergence sera d'autant plus grande que la quantité n sera plus petite.

CHAPITRE XVI.

Définitions, Notions et Propositions préliminaires, particulières à la Trigonométrie sphérique.

960. La Trigonométrie *sphérique* enseigne à résoudre les triangles formés par trois arcs de grands cercles (962) sur la surface d'une sphère. Les côtés de ces triangles sont par conséquent des arcs, et s'évaluent comme les angles, en degrés, minutes, etc. Trois parties étant connues dans un *triangle sphérique*, la Trigonométrie sphérique donne les moyens de trouver toutes les autres dans la plupart des cas.

961. Si l'on prend pour centre un point à volonté dans l'univers, tous les points situés à une même distance de ce centre appartiendront à la surface d'une sphère ayant cette distance pour rayon. Il est donc indifférent que le globe sur lequel s'exerce la Trigonométrie sphérique, soit réel ou seulement imaginé, petit ou grand, plein ou vide intérieurement en totalité ou en partie : les propositions trigonométriques sont générales pour une sphère quelconque; il suffit que dans une même démonstration, dans une même formule, on n'emploie pas en même temps des sphères de diverses grandeurs, des arcs de rayons différens.

962. On appelle *grands cercles* ceux qui ont pour centre et pour rayon le centre et le rayon de la sphère. Tous les grands cercles sont donc égaux entre eux. Si on conçoit que le demi-cercle AEDB fasse une révolution entière autour du diamètre AB, le point D, que je suppose à égale distance des points A et B, Fig. 52. décrira dans cette révolution la circonférence d'un grand cercle, dont le rayon est celui CD de la sphère, et le centre celui C de la sphère.

Fig. 52. 963. Mais chaque autre point, comme E, de la demi-circonférence AEDB décrira un *petit cercle* ayant pour rayon une ordonnée EF, et pour centre un point F différent du centre C de la sphère. Il est évident, 1°. que les petits cercles sont égaux entre eux, lorsqu'ils ont leurs centres à une même distance du centre de la sphère; 2°. que les petits cercles sont d'autant plus petits que leur centre est plus distant de celui de la sphère.

964. Si on divise une sphère en deux parties égales, le plan coupant passera par le centre, et par conséquent la section de la surface de la sphère sera un grand cercle. Mais par chaque point de la surface on peut faire une section qui passe par le centre de la sphère, et qui la divise par le milieu : donc le nombre des grands cercles de la sphère est infini.

965. On sait par la Géométrie élémentaire, que trois points qui ne sont pas en ligne droite, déterminent la position d'un plan. Si donc le plan coupant passe par le centre de la sphère et par deux points donnés sur sa surface, la direction du plan coupant, et par conséquent la section de la superficie, seront déterminées. Donc d'un point à un autre sur la surface de la sphère, on peut toujours tracer ou concevoir un arc de grand cercle, et il ne peut y en avoir qu'un seul, si ce n'est lorsque cet arc est de 180°, (966).

966. Puisque le centre de la sphère est commun à tous les grands cercles, toute ligne d'intersection de leurs plans passera par le centre commun, et sera par conséquent un diamètre commun à la sphère et aux cercles coupés. Ainsi AB est le diamètre de la sphère, du cercle ADBL et du cercle AGB (duquel la moitié seulement se voit obliquement dans la figure). Mais tout diamètre divise la circonférence en deux parties égales; donc 1°. *les grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales*; 2°. *les points d'intersection des circonférences*, comme A et B, *sont toujours distans de* 180° *l'un de l'autre.*

967. On peut donc renfermer avec deux arcs seulement une portion de surface de la sphère, pourvu qu'ils soient chacun de 180°. Alors la superficie comprise, comme AEDBKGA, se nomme *fuseau.*

968. On appelle *axe* d'un grand cercle celui des diamètres de

la sphère, qui est perpendiculaire au plan ou à un diamètre quelconque de ce cercle. Si on conçoit que dans la fig. 52 le rayon CD de la sphère soit élevé perpendiculairement au-dessus du plan sur lequel est décrit le grand cercle AEDBL, CD sera le demi-axe de ce cercle. De même, AB est l'axe du grand cercle dont la circonférence passerait par les points D et L, et dont le plan serait perpendiculaire au cercle ADBL.

969. Les points extrêmes de l'axe, tels que A et B, se nomment les *pôles* du grand cercle dont AB est l'axe. L'arc AD = 90° = BD mesure sur la superficie de la sphère la distance des pôles à la circonférence; et par conséquent *chaque point de la circonférence est distant de 90° de chacun des pôles.* Deux grands cercles ne peuvent donc avoir les mêmes pôles.

970. On peut concevoir une infinité de petits cercles parallèles à chaque grand cercle. Si EF est parallèle à CD, le petit cercle qui a pour rayon EF, se nomme et est en effet *parallèle* au grand cercle décrit par le rayon CD dans la révolution du demi-cercle ADB autour de la droite AB. Or entre les pôles A et B de ce grand cercle, on peut concevoir une infinité d'ordonnées à l'axe AB, parallèles à CD, comme EF. Donc, etc.

Il s'ensuit que toute section de la sphère est un cercle, même lorsqu'elle ne passe pas par le centre, puisqu'on peut toujours imaginer une section parallèle qui passe par le centre, (964).

971. Les pôles d'un grand cercle sont aussi ceux de tous ses parallèles, et tous les points de chaque circonférence sont à une même distance de l'un ou de l'autre des pôles. Il est évident, par exemple, que la révolution (962) du rayon FE autour de l'axe AB n'altère en aucun point les distances FA, EB.

D'après ces principes il est aisé de déterminer, avec des compas sphériques, sur la surface d'un globe, les pôles d'un cercle donné, ou de décrire d'un pôle donné un grand ou un petit cercle.

972. *Si deux arcs de cercles inégaux s'appuient sur une même corde, et qu'ils soient l'un et l'autre moindres que la demi-circonférence, le plus grand est celui qui est décrit d'un plus petit rayon.*

Ce théorème s'énonce ordinairement sans démonstration, comme

une vérité que la seule opération du compas rend évidente; et si j'en ai rencontré quelques démonstrations géométriques, elles m'ont paru peu satisfaisantes. J'ai déduit de l'analyse celle qui suit; elle est rigoureuse.

Fig. 53. Les arcs DBE, DAE étant sous-tendus par une même corde DE, étant de plus moindres, l'un et l'autre, que de 180°, et décrits, le premier du rayon FE, le second, du rayon CE > FE, je dis qu'on a DBE > DAE.

En effet la différence de l'arc à la corde, tous les termes étant rendus homogènes (104), est (278), $A - 2\sin.\frac{1}{2}A = \frac{1}{3} \times \frac{\sin.^3\frac{1}{2}A}{R^2} + \frac{3}{4.5} \times \frac{\sin.^5\frac{1}{2}A}{R^4} +$ etc.; ce que j'écris ainsi, pour abréger, $A - 2\sin.\frac{1}{2}A = \frac{m\sin.^3\frac{1}{2}A}{R^2} + \frac{n\sin.^5\frac{1}{2}A}{R^4} +$ etc. Donc, (en faisant $DBE = B$, $DAE = A$, la corde $DE = 2K$, $CE = R$, $FE = r$), on aura $B - 2K = \frac{mK^3}{r^2} + \frac{nK^5}{r^4} +$ etc., et $A - 2K = \frac{mK^3}{R^2} + \frac{nK^5}{R^4} +$ etc. Mais, d'après les conditions données, on a $R > r$; et il s'ensuit que chacun des termes du second membre dans la dernière équation est moindre que chacun des termes semblables dans la précédente. Donc on a $B - 2K > A - 2K$, et par conséquent $B > A$; ce que j'avais à démontrer.

973. L'équation (278) n'est pas applicable aux arcs qui excèdent 180°; mais il est clair que dans ceux-ci c'est tout le contraire de ce qui arrive pour les arcs au-dessous de 180°. Car les circonférences étant comme les rayons, si de la plus grande on retranche une portion plus petite que celle qu'on déduit de la moindre circonférence, comme on vient de le voir, la partie de circonférence qui restera de la plus grande, l'emportera d'autant plus sur celle qui reste de la plus petite.

974. Je conclus de ce qui précède, que *l'arc de grand cercle, au-dessous de 180°, est le plus court qu'on puisse mener d'un point à un autre sur une surface sphérique.*

L'arc de grand cercle est la mesure naturelle et unique de toute distance sphérique, parce que c'est une mesure constante. Les petits cercles (963) étant au contraire inégaux, la Trigonométrie n'en fait aucun usage. Aussi quand nous parlerons simplement

de cercles ou d'arcs, nous entendrons toujours les grands cercles ou les arcs de grands cercles.

975. Considérons dans la fig. 54 le fuseau AEDBKGA de la fig. 52; et cherchons à évaluer l'angle formé sur la surface de la sphère par la rencontre de deux arcs, par exemple l'angle DAM. Fig. 54.

Il est clair que l'angle DAM est le même que l'angle EAG : la grandeur d'un angle sphérique, de même que la grandeur d'un angle rectiligne, est indépendante de celle des côtés; puisqu'*un angle sphérique n'est que l'ouverture ou l'inclinaison mutuelle de deux arcs, considérée dans les points immédiatement contigus à celui dans lequel ils se rencontrent.* Mais l'arc infiniment petit se confond avec sa tangente (284), puisqu'ils ont leur origine au même point, et qu'ils sont l'un et l'autre perpendiculaires au rayon qui aboutit à ce point. Donc un angle sphérique quelconque, EAG, formé par le concours de deux arcs AE, AG, est le même que l'angle formé par le concours des tangentes de ces deux arcs. Or les tangentes des arcs AE, AG, sont respectivement parallèles aux rayons CD, CM, qui sont perpendiculaires à AC, en supposant AD $=$ 90° $=$ AM. Par conséquent l'angle formé par ces tangentes sera égal à DCM. Mais cet angle ayant son sommet au centre de la sphère, il a pour mesure l'arc DM. Donc 1°. *un angle sphérique a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, à 90° de distance de leur intersection.*

976. L'angle DCM est aussi celui qui sert de mesure à l'inclinaison mutuelle des deux plans AEDB, AGKB. Si, pour mesurer cette inclinaison, on prenait un angle quelconque formé par des lignes non perpendiculaires à la commune section AB, les lignes diversement inclinées donneraient des angles différens, qui par conséquent ne seraient pas propres à fixer une quantité déterminée pour l'inclinaison des deux plans. Et en effet, quand deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, leur angle d'inclinaison est nécessairement droit; or il est facile de voir qu'il ne serait pas droit, si on le considérait formé par des lignes qui ne seraient pas perpendiculaires l'une et l'autre à la commune section. Donc 2°. *un angle sphérique a pour mesure l'inclinaison des plans des deux arcs qui le forment.*

Fig. 54. 977. En appliquant à l'angle DBM tout ce que nous venons de dire (975, 976), on démontrera de même qu'il a aussi pour mesure l'arc DM. Donc 1°. *les circonférences de deux cercles forment deux angles égaux, aux deux points de leur intersection*; 2°. *ces deux points sont les pôles* (966, 969) *de l'arc qui sert de mesure commune à ces deux angles.*

978. Pour qu'un angle sphérique soit de 90°, il faut donc que ses côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent par les pôles l'un de l'autre. En effet l'inclinaison des plans est visiblement égale à celle de leurs axes (968); si donc deux plans sont perpendiculaires entre eux, l'axe de l'un sera nécessairement dans le plan de l'autre.

979. Ainsi, dans la pratique, si l'on veut former un angle droit à l'extrémité D d'un arc DE, on prendra sur DE, prolongé s'il le faut, un arc DA = 90°. Ensuite du point A pour pôle et de l'intervalle AD, on décrira un arc DM; et on aura ADM = 90°, puisque DE prolongé passe par le pôle A de l'arc DM, et que DM prolongé jusqu'à ce qu'il fût de 90°, se terminerait à un point distant, par la construction, de 90° des points A et D, et qui par conséquent (969, 965) serait le pôle de l'arc DE.

980. On peut donc, d'un point quelconque de la surface de la sphère, mener un arc perpendiculaire sur un arc donné, prolongé s'il est nécessaire; puisqu'il suffit pour cela de tracer un arc qui passe par le point donné et par le pôle de l'arc donné. D'où il suit que tous les arcs perpendiculaires à un cercle vont se couper aux pôles de ce cercle; et réciproquement, qu'un arc qui coupe deux ou plusieurs arcs à 90° de distance de leur commune intersection, les coupe tous perpendiculairement. Par exemple ADM = 90° = AMD.

981. L'arc mené du pôle d'un cercle au pôle d'un autre cercle, mesure évidemment l'inclinaison réciproque des axes de ces cercles: mais l'inclinaison des axes est la même que celle des plans de leurs cercles respectifs (968); donc *la distance des pôles de deux cercles est égale à l'inclinaison de leurs plans.*

982. Lorsque des petits cercles se trouvent dans un problème, on peut les éliminer de deux manières. Soit EG un arc de parallèle;

au lieu de cet arc, on peut introduire soit l'arc de grand cercle compris entre les mêmes points E, G, soit l'arc parallèle de grand cercle, DM, ou, ce qui revient au même (975), l'angle au pôle, EAG, opposé à l'arc EG de petit cercle qu'on veut éliminer. Pour parvenir à l'une ou à l'autre de ces substitutions, il faut d'abord établir le théorème suivant.

983. On sait que les circonférences, ou leurs parties homologues; c'est-à-dire les arcs d'un même nombre de degrés, sont proportionnelles aux rayons; il s'ensuit qu'un arc de grand cercle est à l'arc homologue d'un petit cercle dont le rayon est, par exemple, EF, comme CE est à FF :: 1 : sin. AE. C'est-à-dire qu'*un arc de grand cercle est à un arc de même nombre de degrés d'un petit cercle, comme le rayon de la sphère est au sinus de la distance du petit cercle à son pôle;* analogie qui donne la longueur d'un arc de petit cercle en parties de grand cercle. Fig. 52.

984. Cela posé, 1°. soit DBE un arc de petit cercle, au lieu duquel on veuille employer l'arc DAE de grand cercle (974). Menant la corde commune DE, on aura (609), $\frac{1}{2}$ DE = CE × sin. $\frac{1}{2}$ C = EF × sin $\frac{1}{2}$ F. Mais EF est égal (983) au rayon de la sphère, multiplié par le sinus de la distance du pôle au petit cercle dont EF est le rayon; substituant dans la dernière équation cette valeur de EF, on en tire la suivante: sin. $\frac{1}{2}$ *arc cherché de grand cercle* = sin. $\frac{1}{2}$ *arc de petit cercle, sous-tendu par la même corde* × sin. *de la distance de ce petit cercle à son pôle.* Fig. 53.

985. 2°. Les rayons FE, FG, de l'arc de parallèle EG, étant perpendiculaires (963) sur AB, et par conséquent respectivement parallèles à CD, CM, l'angle EFG que forment ces rayons est égal à l'angle DCM. Il s'ensuit qu'un arc DM de grand cercle est du même nombre de degrés qu'un arc quelconque EG parallèle et compris entre les mêmes arcs AD et AM qui se réunissent à leur pôle commun A. On a donc (983), DM : EG :: 1 : sin. AE; mais DM = DAM, (975); donc *un arc de petit cercle égale l'angle au pôle qui lui est opposé, multiplié par le sinus de la distance de cet arc au pôle.* Au moyen de cette équation, on pourra substituer l'angle au pôle, au lieu de l'arc opposé de petit cercle. Fig. 54.

986. Si dans l'analogie (985) on écrit (73), sin. 90° ou sin. AD,

Fig. 54. au lieu de 1, on pourra l'exprimer généralement comme il suit : *les arcs homologues parallèles sont entre eux comme les sinus des distances respectives au pôle commun.*

987. *La plus grande distance entre deux cercles* ADB, AMB; (ou la plus grande largeur d'un fuseau quelconque AEDBKGA) *est à* 90° *des points d'intersection de ces deux cercles.* Car la proportion DM : EG :: 1 : sin. AE, fait voir que comme aucun sinus n'est plus grand que le rayon, de même l'arc EG de parallèle, quelle que soit sa distance du pôle, ne sera jamais plus grand que DM. Il en serait de même, et à plus forte raison (974), si EG était un arc de grand cercle.

Nous n'en dirons pas plus sur la comparaison des petits et des grands cercles.

988. Si l'on entend bien les principes que nous venons de développer avec quelque étendue, il ne restera aucune difficulté dans la Trigonométrie sphérique; tout ce qui suit est appuyé sur ces principes.

Puisque l'angle rectiligne que font ensemble les tangentes de deux arcs au point de leur intersection, est égal à l'angle sphérique formé par ces mêmes arcs (975), les propriétés suivantes des angles rectilignes conviennent nécessairement aux angles sphériques.

1°. Un angle sphérique est toujours moindre que de 180°.

2°. Un arc qui tombe sur un autre arc forme deux angles, égaux ensemble à deux droits.

3°. Les angles opposés au sommet que forment deux arcs qui se coupent, sont égaux.

4°. La somme des angles formés par l'intersection de deux arcs est de 360°.

989. Pour enfermer avec trois arcs une portion de surface de la sphère, c'est-à-dire pour former un triangle sphérique, il est nécessaire que deux arcs, par exemple AN, AK, soient coupés par un troisième, comme NK, avant que les deux premiers se réunissent (967) au point B, à 180° de l'autre point A d'intersection. Ce que nous disons de AN et AK est également vrai de AN et NK, ainsi que de AK et NK. Donc *un côté quelconque de triangle sphérique est nécessairement moindre que de* 180°.

Cette règle et la suivante expriment deux conditions sans lesquelles il n'est pas possible de construire un triangle sphérique avec trois arcs donnés.

990. Puisque l'arc qui passe d'un point à un autre est sur la sphère la mesure la plus courte de la distance entre ces deux points (974), *un côté quelconque d'un triangle sphérique est nécessairement moindre que la somme des deux autres côtés.*

991. Donc NK est $<$ (BN + BK). Mais BN + BK = 360° — AN — AK; donc (NK + AN + AK) est $<$ 360°, ou *la somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que de* 360°.

992. *La somme des trois angles est toujours moindre que de* 540°, (988, 1°.): nous allons prouver qu'elle surpasse toujours 180°; ce qui forme une différence essentielle entre les triangles sphériques et les rectilignes.

993. Dans un triangle sphérique quelconque ABC, si on prend Fig. 55.
successivement pour pôle les sommets des trois angles A, B, C, et qu'on décrive à 90° de distance les arcs DE, EF, DF, ces arcs formeront par leur rencontre un triangle comme DFE.

Par cette construction le point E est à 90° des points A et B; donc E est le pôle (969, 965) de l'arc AB. Par la même raison, D est le pôle de AC, et F le pôle de BC.

Du pôle E prolongez AB jusqu'en G, et du pôle D prolongez AC jusqu'en H; vous aurez par la construction GE = 90° = DH. Donc GE + DH = 180° = GE + DG + GH = DE + GH. Mais GH est la mesure de l'angle A, (975); donc DE est le supplément de A.

On trouvera de même que EF est le supplément de B, et DF de C.

Maintenant si du pôle E on prolonge GA jusqu'en L, GL sera la mesure de l'angle E. Mais GA = 90° = BL, et par conséquent GA + BL, ou GL + AB = 180°. Donc l'angle E est supplément de l'arc AB.

On trouvera de même que D est supplément de AC, et F de BC.

Donc les angles et les côtés du triangle DEF sont les supplé-

mens des côtés et des angles respectivement opposés dans le triangle ABC, et *vice versâ*. On doit faire attention à cette propriété des triangles DEF, ABC, (dont l'un se nomme, relativement à l'autre, *triangle polaire* ou *supplémentaire*), parce qu'elle est d'un grand usage dans la Trigonométrie sphérique. Nous allons dans ce moment déterminer sans peine, par le moyen de cette propriété, quelle est la limite en moins de la somme des trois angles d'un triangle sphérique.

994. Puisque les trois côtés DE, EF, DF sont supplémens des trois angles A, B, C, il en résulte que $DE + EF + DF + A + B + C = 540°$. Mais $(DE + EF + DF)$ est $< 360°$, (991). Donc 1°. *la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpasse toujours* 180°. Et il en résulte 2°. que, *si le triangle est équilatère, l'angle formé par la rencontre de deux arcs est plus grand que l'angle rectiligne formé par leurs cordes.*

995. Lorsque chacun des côtés AB, AC, BC est moindre que de 90°, chacun des angles du triangle supplémentaire DEF est plus grand que 90°. Et si les angles A, B, C sont tous aigus, chacun des côtés du triangle DEF sera de même plus grand que 90°. Enfin lorsque chacun des côtés AB, AC, BC sera de 90°, le triangle ABC se confondra avec le triangle supplémentaire (993). Donc *un triangle sphérique peut avoir ses angles et ses côtés tous égaux à* 90°, *ou tous plus petits ou tous plus grands que* 90°.

996. Donc (994, 992) *la somme des trois angles d'un triangle sphérique peut varier de* 180° *jusqu'à* 540° *exclusivement*. Par conséquent de la connaissance de deux angles on ne peut pas déduire la valeur du troisième, comme dans la Trigonométrie rectiligne : mais en échange on a cet avantage, que les trois angles étant donnés, on peut trouver la valeur d'un côté quelconque, comme nous le verrons en son lieu.

997. Qu'on observe combien les variations des angles diffèrent de celles des côtés. Si les côtés sont infiniment petits, ils ne surpassent leurs cordes respectives que de quantités infiniment petites du troisième ordre, du cinquième ordre, etc., (278). Le triangle peut donc alors être considéré comme rectiligne, et par conséquent la somme des angles est de 180°. C'est là le cas de la moindre gran-

deur possible, tant des côtés que des angles. Supposons maintenant que le triangle infiniment petit croisse jusqu'à ce que chacun des côtés soit de 90°. Alors chacun des angles sera droit (995); ensorte que la somme des angles sera accrue de 90°, tandis que celle des côtés sera augmentée à très-peu-près trois fois autant : le contraire arrive si l'accroissement des côtés continue, puisque, quel qu'il soit, jamais il ne sera de 90° pour les trois côtés à-la-fois (991); tandis que celui des angles peut être à très-peu-près de trois fois 90°, (996).

998. *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsque les trois côtés de l'un sont respectivement égaux aux trois côtés de l'autre.* Car en posant les côtés égaux l'un sur l'autre, ils coïncideront nécessairement dans tous leurs points. D'où il suit que les angles seront respectivement égaux.

999. Si dans deux triangles sphériques les angles sont respectivement égaux, leurs triangles polaires auront les côtés respectivement égaux, comme supplémens d'angles égaux. Donc les deux triangles polaires auront leurs angles respectivement égaux (998). Par conséquent les supplémens de ces angles, qui sont les côtés des triangles donnés, seront respectivement égaux. Donc *deux triangles sphériques sont égaux, si les trois angles de l'un sont respectivement égaux aux trois angles de l'autre.* C'est encore une différence essentielle entre les triangles sphériques et les triangles rectilignes.

1000. *Deux triangles sphériques sont de même égaux*, 1°. *lorsqu'ils ont deux côtés et l'angle compris respectivement égaux ;* 2°. *lorsqu'ils ont deux angles et le côté compris respectivement égaux.*

Ces deux propositions se démontrent par la superposition, comme dans les triangles rectilignes.

1001. *On peut toujours, par trois points donnés sur la surface d'un globe, faire passer un cercle*, lequel sera un grand cercle dans le cas seulement où les trois points donnés seront tous trois dans un même plan passant par le centre de la sphère (965).

En effet, soient A, B, C les trois points donnés. Menez les Fig. 56.
arcs de grand cercle AB, BC; par les points du milieu de chacun

de ces arcs, c'est-à-dire par E et par D, élevez les arcs perpendiculaires EP, DP, qui se rencontreront en un point quelconque P; et menez les arcs AP, BP, CP.

Les deux triangles APE, BPE, rectangles en E, seront égaux (1000, 1°.); donc AP = BP. On a de même BP = CP. Donc si, de l'intervalle AP = BP = CP, et du point P pour pôle, on décrit un cercle, il passera par les points A, B, C.

On peut donc toujours circonscrire un cercle à un triangle sphérique quelconque.

1002. *Les angles à la base d'un triangle isoscèle sont égaux.*

Fig. 57. En effet, si AB = AC, qu'on prenne à volonté AD = AE, et que l'on mène les arcs BD, CE. Les triangles ABD, ACE sont égaux (1000, 1°.). Donc BD = CE. Par conséquent les triangles BCE, BCD sont égaux (998). Donc les angles homologues sont égaux; et par conséquent EBC = DCB, ou ABC = ACB.

1003. Au moyen du triangle supplémentaire, on démontre facilement la proposition inverse; c'est-à-dire que *si un triangle sphérique a deux angles égaux, les deux côtés opposés sont égaux entre eux.*

1004. De là il suit que dans tout triangle sphérique les côtés égaux sont opposés à des angles égaux, et réciproquement; ensorte que *tout triangle sphérique équiangle est aussi équilatère, et réciproquement.*

1005. *Dans tout triangle sphérique le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et le plus petit côté au plus petit angle.*

Fig. 58. Soit BAC > B : menez un arc AD, de sorte que A = B; vous aurez AD = BD, (1003). Donc BC = AD + DC. Mais (AD + DC) est > AC, (990); donc BC est > AC. C'est ce que nous avions à démontrer.

1006. *Dans tout triangle sphérique, si l'on prolonge un côté, l'angle extérieur est plus petit que les deux intérieurs opposés.*

D + ADC = 180°, (988, 2°.). Mais (A + B + D) est > 180°, (994) : donc (A + B + D) est > (D + ADC), ou (A + B) est > ADC; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Fig. 54. 1007. Si A et B sont les pôles d'un arc DM, chacun des arcs

AD, AM, BD, BM est de 90°, et par conséquent (998) les triangles ADM, BDM sont égaux, et chacun d'eux est la moitié du fuseau AEDBMGA. Si on imagine un arc qui, partant du point A, vienne partager par le milieu l'arc DM, le demi-fuseau ou le triangle ADM sera divisé en deux triangles égaux (998). Il en sera de même du triangle BDM, si on prolonge jusqu'an point B l'arc supposé. Donc un demi-cercle qui partage également l'arc DM, et qui se termine aux pôles A et B de cet arc, divise en deux fuseaux égaux le fuseau AEDBMGA. Donc les fuseaux sont entre eux comme les arcs DM qui mesurent leur plus grande largeur (987). Si l'arc DM croît jusqu'à 360°, le fuseau AEDBMGA devient évidemment égal à toute la surface de la sphère. Donc la surface de la sphère est à 360° comme un fuseau quelconque est à l'arc DM qui mesure la plus grande largeur de ce fuseau. Mais DM est aussi la mesure (975) de l'angle DAM ou DBM d'un fuseau quelconque AEDBMGA. Donc la surface d'un fuseau quelconque pourra toujours se trouver par l'analogie suivante : 360° *sont à la surface de la sphère comme l'angle d'un fuseau à la surface de ce fuseau.* Cette analogie sera encore utile pour déterminer facilement la surface d'un triangle sphérique quelconque.

1008. Si on voulait évaluer la surface d'un fuseau tronqué, comme AEG, terminé par un arc EG de petit cercle ayant son pôle en A, on raisonnerait comme il suit.

Puisque la surface d'un segment de sphère, engendré, par exemple, par la révolution du plan AEF autour de la portion AF de l'axe, EF étant perpendiculaire à AF, a pour expression, comme on le démontre en Géométrie, $AF \times 360°$, ou $(1 - \cos. AE) \times 360° = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AE \times 360°$; qu'on établisse l'analogie, l'angle EAG est à la portion AEG de la surface du segment, comme 360° est à la surface entière de ce segment; ou $A : AEG :: 360° : 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AE \times 360° :: 1 : 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AE$. D'où il résulte que *la surface* AEG *d'un tronc de fuseau* $= A \times 2 \sin.^2 \frac{1}{2} AE =$ *l'angle du fuseau, multiplié par le sinus verse de la longueur du tronc.*

1009. Si A et B sont les pôles du globe terrestre, ensorte que AB soit l'axe autour duquel se fait la rotation diurne de la Terre, le cercle auquel appartient l'arc DM se nomme *l'équateur ;* tous les cercles qui passent par les pôles, comme ADB, AMB, se

nomment *méridiens* ou *cercles horaires* ; et la position géographique d'un lieu se fixe de la manière suivante. Soit A le pôle arctique, B le pôle antarctique, le point G la ville de Paris sur le globe terrestre, et ADB le méridien qui passe par l'île de Fer, lequel a été adopté pour premier méridien par un grand nombre de Géographes. L'arc GM qui mesure la distance du point G à l'équateur, est ce qu'on appelle *la hauteur du pôle* ou la *latitude géographique boréale* de Paris, laquelle est de 48° 50′ ; et l'arc DM qui mesure la distance du méridien AGMB du lieu G au premier méridien, se nomme la *longitude géographique* de Paris, et elle est de 20°. La latitude des lieux situés, comme le point K, entre l'équateur et le pôle antarctique, se nomme *latitude australe*. Ce sont ces deux données, la longitude et la latitude, qui déterminent la position exacte d'un lieu quelconque sur une carte géographique.

1010. De là vient que *les distances à la perpendiculaire* (800) réduites en degrés, minutes, etc. (696), s'appellent encore *différences de latitude* ; et *les distances à la méridienne*, (800), *différences de longitude*. Ces dénominations sont à la vérité impropres et inexactes, et nous donnerons (1200) un exemple des corrections convenables pour obvier à ce défaut d'exactitude, en supposant la Terre sphérique (801).

CHAPITRE XVII.

Résolution des Triangles sphériques rectangles.

1011. Un triangle sphérique peut avoir deux de ses angles et même ses trois angles (997) de 90°.

Or 1°. si chacun des trois angles est droit, chacun des côtés est aussi de 90°, et réciproquement (995). Dans ce cas on n'a point de solution à chercher ; toutes les parties du triangle sont évidemment connues.

1012. 2°. Si deux angles sont droits, les côtés opposés sont aussi de 90°, et réciproquement (980). Mais ces données ne suffisent pas pour faire connaître le troisième côté et l'angle opposé : on sait seulement (975) qu'alors cet angle et ce côté sont égaux entre eux.

1013. Enfin si le triangle sphérique n'a qu'un angle droit, sa résolution dépend de deux théorèmes fondamentaux, dont le second donne ordinairement beaucoup de peine aux Commençans. Je prends la démonstration du premier dans *les Élémens de Mathématiques* de l'abbé Marie, et j'espère avoir réduit celle du second au même degré de clarté et de simplicité.

Soit E le centre de la sphère, et soient sur la surface trois arcs AB, AC, BC, qui forment un triangle rectangle en A. Qu'on prolonge chacun des arcs BA, BC jusqu'à ce qu'on ait BH = 90° = BF. On aura 1°. BEF = 90° = BEH, puisque ces angles sont mesurés par les arcs de 90°, BF, BH; par conséquent FE, HE sont perpendiculaires à BE; 2°. FE = HE = CE = AE = BE, puisque toutes ces lignes sont rayons de la sphère; 3°. FH sera la mesure (975) de l'angle ABC que je nommerai B. Qu'on abaisse les perpendiculaires FG sur EH, CL sur AE, CD sur BE; qu'on mène la ligne DL, à laquelle CL sera perpendiculaire, puisque DL est dans le même plan que AE. Les triangles rectangles CLD, FGE seront semblables et leurs plans parallèles, CD et FE étant parallèles entre elles, et FG, CL perpendiculaires sur le même plan BAHE; d'où il suit que DL est aussi parallèle à GE, et perpendiculaire à BE. Fig. 59.

1014. Cela posé, DC : CL :: FE : FG. Mais DC est le sinus de BC, CL le sinus de AC, FG le sinus de FH ou de B. Donc

$$\text{sin. BC} : \text{sin. AC} :: 1 : \text{sin. B}.$$

En prolongeant CA, CB, du point C jusqu'à 90°, on trouverait, par la même méthode, que

$$\text{sin. BC} : \text{sin. AB} :: 1 : \text{sin. C}.$$

Donc, THÉORÈME I; *dans tout triangle sphérique rectangle, le sinus de l'hypoténuse est au sinus d'un côté, comme le rayon est au sinus de l'angle opposé au même côté.*

1015. Les triangles rectangles EDL, ELC donnent (530, 529)

$EL = \frac{DL}{\sin. DEL} = \frac{CL}{\text{tang.} CEL}$. Mais DL : CL :: GE : FG :: 1 : tang. FEH :: 1 : tang. B. Donc $\frac{1}{\sin. DEL} = \frac{\text{tang. } B}{\text{tang. } CEL}$. Mais DEL = AB, et CEL = AC. Donc

1 : tang. B :: sin. AB : tang. AC.

Et par conséquent, THÉORÈME II; *dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est à la tangente d'un angle, comme le sinus du côté adjacent est à la tangente du côté opposé.*

1016. Ce théorème fait voir que *dans les triangles sphériques rectangles, un côté quelconque est de la même espèce que l'angle opposé;* puisque tang. B et tang. AC ont un même signe dans l'analogie, et que par conséquent l'une ne peut devenir négative que l'autre ne le devienne aussi.

Les règles ordinaires des signes suffisent pour déterminer l'espèce de la chose cherchée dans tous les cas non douteux, et pour dispenser de former des règles particulières, et d'indiquer l'espèce dans chaque cas, comme on le faisait ordinairement.

1017. Pour qu'on puisse connaître d'un coup-d'œil tous les cas douteux; supposons KN perpendiculaire sur ADB : les triangles Fig. 54. ANK, BNK rectangles en N, auront le côté NK commun et KAN = KBN, (977). On voit qu'alors la connaissance des valeurs de NK et de l'angle opposé ne détermine pas auquel des deux triangles ces données appartiennent; de manière que lorsque les circonstances du problème ne lèvent pas l'incertitude, on ne peut savoir par la Trigonométrie si l'hypoténuse est moindre que de 90°, comme BK, ou plus grande comme AK, et de même si le côté et l'angle inconnus sont BN et BKN, ou leurs supplémens AN et AKN. Concluons qu'*un angle et le côté opposé étant donnés, l'espèce de chacune des autres parties d'un triangle sphérique rectangle est douteuse.*

Fig. 59. 1018. Comme un sinus ne peut jamais être plus grand que le rayon, on ne peut jamais avoir, dans l'analogie (1015), tang. AC > tang. B. Mais AC et B sont toujours de la même espèce (1016). Donc *dans les triangles sphériques rectangles, un angle oblique ne peut jamais être plus petit s'il est aigu, plus grand s'il est obtus, que le côté qui lui est opposé.*

1019. La règle (1016) fait voir que l'arc perpendiculaire, s'il est moindre que de 90°, est le plus court, et s'il est plus grand que de 90°, le plus long qu'on puisse mener sur la sphère d'un point donné à un cercle. En effet, dans le premier cas il sera opposé à un angle aigu, et par conséquent il sera moindre (1005) que tout autre arc mené du point donné au même cercle, lequel arc sera l'hypoténuse du triangle résultant de cette construction. Dans le second cas, il sera opposé à un angle obtus, et dès-lors plus grand qu'une hypoténuse quelconque. Donc *dans un triangle sphérique rectangle, tout côté moindre que de 90° est plus petit que l'hypoténuse, et tout côté plus grand que de 90° est plus grand que l'hypoténuse.*

1020. Puisque (1014), FG : CL :: FE : DC :: sin. BF : sin. BC, il s'ensuit que les distances FG, CL de deux cercles en divers points, mesurées par des lignes perpendiculaires au plan de l'un BH des deux, sont proportionnelles aux sinus des distances BF, BC entre ces points et le point B de l'intersection des deux cercles, mesurées sur l'autre BCF de ces cercles.

1021. Si les trois côtés du triangle sont infiniment petits, les arcs se confondront avec leurs sinus et tangentes (277, 284), et le triangle sera rectiligne. En effet, en mettant dans les analogies (1014, 1015) les côtés au lieu de leurs sinus et tangentes, on a BC : AC :: 1 : sin. B, et 1 : tang. B :: AB : AC, c'est-à-dire précisément les proportions d'un triangle rectiligne ABC rectangle en A, (537). C'est ainsi qu'on applique en général les formules des triangles sphériques aux triangles rectilignes. Jusqu'à présent on n'avait pas cru susceptibles de cette application les formules dans lesquelles entrent les cosinus des côtés. Quelques Auteurs ont encore refusé cet avantage aux formules dans lesquelles entrent les cotangentes des côtés. La Caille (*Élém. Astr. Traité prélim.* art. 218) paraît être de leur avis. D'autres substituent l'infini au cosinus du côté; ce qui n'est ni utile ni trop intelligible. Pour nous, il nous semble que la difficulté n'est qu'apparente : car cot. du côté $= \frac{1}{\text{tang. du côté}}$, et on peut, au lieu de $\frac{1}{\text{tang. du côté}}$, écrire $\frac{1}{\text{le côté}}$, et l'unité au lieu de cos. du côté (*), valeurs qui résultent

(*) C'est ce qu'a fait Boscovich pour les formules différentielles qu'il a données dans un Opuscule qui est le quinzième du Tom. IV de ses Ouvrages imprimés à Bassano.

de la considération du triangle infiniment petit (289). Mais avec cette règle seulement, on ne peut traduire qu'une partie des formules sphériques dans lesquelles entrent des cosinus de côtés; dans le cas où une même formule renfermera plusieurs de ces cosinus, on aura recours aux infiniment petits du second ordre, et on substituera au cosinus de chaque côté les deux premiers termes de la série (285), c'est-à-dire la différence entre l'unité et la moitié du quarré du côté respectif : sans quoi il n'y aurait ni distinction ni rapport entre la valeur d'un cosinus et celle d'un autre. Et quand deux cosinus de côtés se trouveront multipliés l'un par l'autre, on négligera le rectangle des deux quarrés de ces mêmes côtés, qui n'est qu'un infiniment petit du quatrième ordre. Enfin, pour éviter dans le produit les infiniment petits du troisième ordre, on fera égal à l'unité seulement chaque cosinus de côté, s'il se trouve multiplié par une ligne trigonométrique quelconque, à moins que cette ligne ne soit le cosinus d'un autre côté.

De toutes les formules sphériques que contient ce Traité, je n'en vois aucune (en exceptant néanmoins celles auxquelles les triangles rectilignes se refusent par leur nature) qui ne puisse se transporter des triangles sphériques aux triangles rectilignes, au moyen des règles que je viens d'indiquer. Je donnerai plusieurs exemples de l'application de ces règles; on verra particulièrement (1428) quelle utilité résulte de cette généralité des formules sphériques.

1022. En transférant ces formules à la Trigonométrie rectiligne, nous supposons les triangles rectilignes *infiniment petits :* mais elles leur conviendraient de même, de quelque grandeur qu'ils fussent, puisque la grandeur de ces triangles n'altère pas leur nature. On ne peut tirer les formules de la Trigonométrie sphérique de celles de la Trigonométrie rectiligne, parce que jamais un triangle rectiligne ne peut être sphérique, tandis qu'un triangle sphérique ne peut devenir infiniment petit qu'il ne devienne rectiligne.

1023. Des deux théorèmes (1014, 1015) quatre autres se déduisent, comme nous allons le voir.

Soit le triangle ABC rectangle en A, dont les côtés et l'hypo-
Fig. 60. ténuse prolongés jusqu'à 90° seront BE, BF, AD. D étant le pôle de l'arc BF, (979), l'arc décrit du point B comme pôle passera par les points D, E, F, (969), et les angles E, F seront droits (980).

Par cette construction on voit que DE est le complément de EF = B, CE le complément de l'hypoténuse BC, AF = D le complément du côté AB, et CD le complément de l'autre côté AC. Aussi DCE se nomme-t-il *triangle complémentaire* de ABC. C'est en appliquant au triangle DCE rectangle en E les deux théorèmes (1014, 1015) qu'on en tire les quatre qui suivent.

1024. Le théorème (1014) donne sin. CD : sin. CE :: 1 : sin. D. Prenant les complémens dans le triangle donné ABC, l'analogie devient

$$\cos. AC : \cos. BC :: 1 : \cos. AB.$$

Et par conséquent, THÉORÈME III, *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus d'un côté est au cosinus de l'hypoténuse, comme le rayon au cosinus de l'autre côté.*

1025. Le théorème (1014) donne aussi sin. CD : sin. DE :: 1 : sin. C. Donc

$$\cos. AC : \cos. B :: 1 : \sin. C.$$

Et par conséquent, THÉORÈME IV, *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus d'un côté est au cosinus de l'angle opposé, comme le rayon au sinus de l'autre angle.*

1026. Le théorème (1015) donne 1 : tang. D :: sin. DE : tang. CE. Donc 1 : cot. AB :: cos. B : cot. BC, ou, pour employer les tangentes,

$$1 : \cos. B :: \text{tang.} BC : \text{tang.} AB.$$

Et par conséquent, THÉORÈME V, *dans tout triangle sphérique rectangle, la tangente de l'hypoténuse est à la tangente d'un côté, comme le rayon au cosinus de l'angle adjacent.*

1027. Le théorème (1015) donne aussi 1 : tang. C :: sin. CE : tang. DE. Donc 1 : tang. C :: cos. BC : cot. B, ou

$$1 : \cos. BC :: \text{tang.} C : \cot. B :: \text{tang.} B : \cot. C.$$

Et par conséquent, THÉORÈME VI, *dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus de l'hypoténuse, comme la tangente d'un angle est à la cotangente de l'autre.*

1028. Deux choses étant données dans un triangle sphérique rectangle; au moyen des six théorèmes démontrés, on trouvera toujours toutes les autres, si ce n'est dans les cas douteux (1012, 1017). Les solutions fournies par ces théorèmes sont toutes rassemblées dans la table suivante, et, sous une autre forme, dans la table VI rejetée à la fin de cet Ouvrage.

Table pour la résolution d'un triangle sphérique ABC *rectangle en* A.

DONNÉES.	CHERCHÉES.		FORMULES.
BC, B	AC	1°	sin. AC* = sin. BC sin. B*
	AB	2°	tang. AB = tang. BC cos. B
	C	3°	cot. C = cos. BC tang. B
BC, C	AB	4°	sin. AB* = sin. BC sin. C*
	AC	5°	tang. AC = tang. BC cos. C
	B	6°	cot. B = cos. BC tang. C
BC, AB	AC	7°	cos. AC $= \frac{\text{cos. BC}}{\text{cos. AB}}$
	B	8°	cos. B = tang. AB cot. BC
	C	9°	sin. C* $= \frac{\text{sin. AB*}}{\text{sin. BC}}$
BC, AC	AB	10°	cos. AB $= \frac{\text{cos. BC}}{\text{cos. AC}}$
	C	11°	cos. C = tang. AC cot. BC
	B	12°	sin. B* $= \frac{\text{sin. AC*}}{\text{sin. BC}}$
AB, C cas douteux.	BC	13°	sin. BC $= \frac{\text{sin. AB}}{\text{sin. C}}$
	AC	14°	sin. AC = tang. AB cot. C
	B	15°	sin. B $= \frac{\text{cos. C}}{\text{cos. AB}}$
AC, B cas douteux.	BC	16°	sin. BC $= \frac{\text{sin. AC}}{\text{sin. B}}$
	AB	17°	sin. AB = tang. AC cot. B
	C	18°	sin. C $= \frac{\text{cos. B}}{\text{cos. AC}}$

DONNÉES.	CHERCHÉES.		FORMULES.
AB, B	BC	19°	$\cot. BC = \cos. B \cot. AB$
	AC	20°	$\text{tang}. AC = \text{tang}. B \sin. AB$
	C	21°	$\cos. C = \sin. B \cos. AB$
AC, C	BC	22°	$\cot. BC = \cos. C \cot. AC$
	AB	23°	$\text{tang}. AB = \text{tang}. C \sin. AC$
	B	24°	$\cos. B = \sin. C \cos. AC$
AB, AC	BC	25°	$\cos. BC = \cos. AB \cos. AC$
	B	26°	$\cot. B = \sin. AB \cot. AC$
	C	27°	$\cot. C = \cot. AB \sin. AC$
B, C	BC	28°	$\cos. BC = \cot. B \cot. C$
	AB	29°	$\cos. AB = \frac{\cos. C}{\sin. B}$
	AC	30°	$\cos. AC = \frac{\cos. B}{\sin. C}$

Les arcs marqués d'un astérisque sont de même espèce (1016). L'espèce de tous les autres, si ce n'est dans les cas douteux, est déterminée par le signe, (73).

1029. Cinq des formules de la table précédente peuvent se calculer par addition ou par soustraction, au moyen des tables des sinus en nombres naturels, en les transformant comme il suit, (II. 17°, 16°, 18°).

$$1°\ \sin. AC = \tfrac{1}{2}\cos.(BC - B) - \tfrac{1}{2}\cos.(BC + B)$$
$$4°\ \sin. AB = \tfrac{1}{2}\cos.(BC - C) - \tfrac{1}{2}\cos.(BC + C)$$
$$21°\ \cos. C = \tfrac{1}{2}\sin.(AB + B) - \tfrac{1}{2}\sin.(AB - B)$$
$$24°\ \cos. B = \tfrac{1}{2}\sin.(AC + C) - \tfrac{1}{2}\sin.(AC - C)$$
$$25°\ \cos. BC = \tfrac{1}{2}\cos.(AB + AC) + \tfrac{1}{2}\cos.(AB - AC).$$

Dans la formule 21°, si B est $>$ AB, $\frac{1}{2}\sin.(AB - B)$ devient positif en vertu de la règle (75). Il en est de même de $\frac{1}{2}\sin.(AC - C)$, quand C est $>$ AC dans la formule 24°. La Caille (*Élémens d'Astronomie*, *Traité préliminaire*, n° 242) se trompe en prescrivant le signe positif dans tous les cas.

1030. Cherchons maintenant les moyens d'avoir avec exactitude les secondes et même les dixièmes de seconde, lorsque les sinus et cosinus des arcs cherchés sont fort grands.

Les cinq formules précédentes (1029) suffiront entre de certaines limites, indiquées (419). Mais si les tables en nombres naturels se trouvaient insuffisantes, ou qu'on ne voulût pas s'en servir, alors dans les cinq cas que présentent ces formules, on procéderait comme il suit. Lorsque, par exemple, étant donnés BC et B, on ne pourra avoir AC exactement par le moyen de la formule 1°, on aura recours à une autre formule qui puisse donner une tangente. Par exemple on cherchera AB par la 2°, et ensuite, ayant AB et B, on aura AC avec toute la précision possible par la 20°.

1031. De la 7° on tire $1 : \cos. AC :: \cos. AB : \cos. BC$. Donc (19), $1 + \cos. AC : 1 - \cos. AC :: \cos. AB + \cos. BC : \cos. AB - \cos. BC$. Et par conséquent (I. 42°), (II. 14°), $1 : \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} AC :: \cot. \tfrac{1}{2}(BC + AB) : \text{tang.} \tfrac{1}{2}(BC - AB)$. On aura donc AC avec la plus grande précision, en transformant la 7° comme il suit :

$$7^\circ \ldots \ \text{tang.} \tfrac{1}{2} AC = \sqrt{\text{tang.} \tfrac{1}{2}(BC - AB) \, \text{tang.} \tfrac{1}{2}(BC + AB)}.$$

1032. La 8° donne $1 : \cos. B :: \text{tang.} BC : \text{tang.} AB$. Et par conséquent $1 + \cos. B : 1 - \cos. B :: \text{tang.} BC + \text{tang.} AB : \text{tang.} BC - \text{tang.} AB$. D'où l'on tire (II. 11°)

$$8^\circ \ldots \ \text{tang.} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. (BC - AB)}{\sin. (BC + AB)}}.$$

1033. La 9° donne $1 : \sin. C :: \sin. BC : \sin. AB$. Donc $1 + \sin. C : 1 - \sin. C :: \sin. BC + \sin. AB : \sin. BC - \sin. AB$. Et par conséquent (II. 9°, 13°)

$$9^\circ \ldots \ \text{tang.} (45^\circ + \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{\frac{\text{tang.} \tfrac{1}{2}(BC + AB)}{\text{tang.} \tfrac{1}{2}(BC - AB)}}.$$

Dans les deux formules qui précèdent celle-ci, le signe du radical ne peut être que positif (989; 988, 1°.), et dans celle-ci on discernera facilement, par le moyen de la règle (1016), quel est le signe qui convient.

En changeant dans les trois dernières formules C en B et B en C, on aura les transformées qui correspondent aux 10°, 11° et 12°.

1034. Par les méthodes employées (1033, 1032, 1031), on aura les formules suivantes, dans lesquelles l'espèce de la chose cherchée est douteuse (1017).

$$13^{\circ}\ldots\ \text{tang.}\,(45^{\circ}+\tfrac{1}{2}\,\text{BC})=\pm\sqrt{\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\text{C}+\text{AB})}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\text{C}-\text{AB})}}.$$

$$14^{\circ}\ldots\ \text{tang.}\,(45^{\circ}+\tfrac{1}{2}\,\text{AC})=\pm\sqrt{\frac{\sin.\,(\text{C}+\text{AB})}{\sin.\,(\text{C}-\text{AB})}}.$$

$$15^{\circ}\ldots\ \text{tang.}\,(45^{\circ}+\tfrac{1}{2}\,\text{B})=\pm\sqrt{\frac{\cot.\,\frac{1}{2}\,(\text{C}+\text{AB})}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\text{C}-\text{AB})}}.$$

En changeant dans ces trois formules B en C et C en B, on aura les transformées correspondantes aux 16°, 17° et 18°.

Ces formules ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, dans lesquels on ne peut prendre la somme ou la différence d'un côté et d'un angle, puisque ce sont deux quantités hétérogènes. Il en faut dire autant des quatre premières formules (1029).

1035. La 28° donne cos. BC : 1 :: cot. B : tang. C :: cot. C : tang. B. Et par conséquent cos. BC + 1 : cos. BC — 1 :: cot. B + tang. C : cot. B — tang. C. Donc aussi (I. 42°), (II. 12°), 1 : — tang.² ½ BC :: cos. (B — C) : cos. (B + C). D'où l'on tire

$$28^{\circ}\ldots\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{BC}=\sqrt{-\frac{\cos.\,(\text{B}+\text{C})}{\cos.\,(\text{B}-\text{C})}}.$$

1036. Observons que cos. (B + C) change toujours le signe négatif en positif, puisque *dans tout triangle sphérique rectangle la somme des deux angles obliques est nécessairement plus grande que de 90°*, (994, 1°.).

1037. Et comme dans un triangle réel la tangente de la moitié de l'hypoténuse ne peut jamais avoir une valeur imaginaire, je conclus de la dernière équation, que *dans tout triangle sphérique rectangle la différence entre les deux angles obliques est toujours moindre que de 90°*.

1038. Quant aux formules 29e et 30e; lorsque AB ou AC seront petits, on cherchera d'abord BC par la 28e; ensuite on aura les côtés exactement par le moyen de la 2e ou de la 5e.

Les formules construites (1029 et suiv.) donnent encore, pour un triangle sphérique rectangle, des solutions différentes de celles de la table (1028), comme on le voit dans la table ci-après, où l'on reconnaîtra facilement que les formules 4e, 6e, 10e, 12e sont formées en multipliant ou divisant l'une par l'autre les deux formules (1031, 1033).

1039. Pour l'usage de la table qui suit, il faut toujours observer les règles des signes (73, 75), et faire attention qu'on ne peut jamais avoir $(BC - AB) > 180°$, (989); ensorte que quand les formules donneront tang. $\frac{1}{2}(BC - AB)$ ou sin. $(BC - AB)$ négatifs, il en faudra conclure que AB est $>$ BC, (75). D'où il résulte que lorsque la quantité $(BC - AB)$ est donnée, il faut connaître en outre lequel des deux arcs est le plus grand, excepté dans la 12e formule, où tang. $\frac{1}{2}$ AC ne peut jamais être négative, (989). Enfin dans la 13e et la 14e, il faut savoir, avant de les calculer, lequel des deux angles est le plus grand.

1040. *Table pour la résolution d'un Triangle sphérique rectangle, dans certains cas.*

DONNÉES.	CHERCHÉES.	FORMULES.
(AB + AC), BC.	AB ou AC	1° FORMULE... cos. $(AB \backsim AC) = 2$ cos. BC − cos. $(AB + AC)$
Som. côtés, hyp.	Les deux côtés.	1° cos. différence des côtés = 2 cos. hypoténuse − cos. somme des côtés
$(AB \backsim AC)$, BC.	AB ou AC.	2° cos. $(AB + AC) = 2$ cos. BC − cos. $(AB \backsim AC)$
Diff. des côtés, hyp.	Les deux côtés.	2° cos. somme des côtés = 2 cos. hypoténuse − cos. différence des côtés
(BC + AB), AC.	BC ou AB. C.	3° tang. $\frac{1}{2}(BC - AB) =$ tang.^{2} $\frac{1}{2}$AC cot. $\frac{1}{2}(BC + AB)$ 4° cot. $(45° + \frac{1}{2}C) =$ tang. $\frac{1}{2}$AC cot. $\frac{1}{2}(BC + AB)$
Un côté et la som. de l'hypoténuse et de l'autre côté.	L'hyp. et le côté incon. L'ang. op. au côté inc.	3° tang. $\frac{1}{2}$ diff. hyp. au côté = tang.^{2} $\frac{1}{2}$ côté donné × cot. $\frac{1}{2}$ somme donnée 4° cot. $(45° + \frac{1}{2}$ angle cherché$) =$ tang. $\frac{1}{2}$ côté donné × cot. $\frac{1}{2}$ som. don.
$(BC \backsim AB)$, AC.	BC ou AB. C.	5° tang. $\frac{1}{2}(BC + AB) =$ tang.^{2} $\frac{1}{2}$AC cot. $\frac{1}{2}(BC - AB)$ 6° tang. $(45° + \frac{1}{2}C) =$ tang. $\frac{1}{2}$AC cot. $\frac{1}{2}(BC - AB)$
Un côté et la différence de l'hypotén. et de l'autre côté.	L'hyp. et le côté incon. L'ang. op. au côté inc.	5° tang. $\frac{1}{2}$ som. hypotén. et côté = tang.^{2} $\frac{1}{2}$ côté donné × cot. $\frac{1}{2}$ diff. donnée 6° tang. $(45° + \frac{1}{2}$ ang. cherché$) =$ tang. $\frac{1}{2}$ côté don. × cot. $\frac{1}{2}$ diff. donnée
(BC + AB), B.	BC ou AB.	7° sin. $(BC - AB) =$ tang.^{2} $\frac{1}{2}$B sin. $(BC + AB)$
Un angle et la som. du côté adjacent et de l'hypoténuse.	L'hyp. et le même côté.	7° sin. différ. hyp. au côté = tang.^{2} $\frac{1}{2}$ angle donné × sin. somme donnée
$(BC \backsim AB)$, B.	BC ou AB.	8° sin. $(BC + AB) =$ cot.^{2} $\frac{1}{2}$B sin. $(BC - AB)$
Un ang. et la diff. du côté adjacent et de l'hypoténuse.	L'hyp. et le même côté.	8° sin. somme hypot. et côté = cot.^{2} $\frac{1}{2}$ angle donné × sin. diff. donnée
(BC + AB), C.	BC ou AB. AC.	9° tang. $\frac{1}{2}(BC - AB) =$ cot.^{2} $(45° + \frac{1}{2}C)$ tang. $\frac{1}{2}(BC + AB)$ 10° tang. $\frac{1}{2}$AC = cot. $(45° + \frac{1}{2}C)$ tang. $\frac{1}{2}(BC + AB)$
Un angle et la som. du côté opposé et de l'hypoténuse.	L'hyp. et le même côté. L'autre côté.	9° tang. $\frac{1}{2}$ diff. hyp. au côté = cot.^{2} $(45° + \frac{1}{2}$ ang. don.$)$ × tang. $\frac{1}{2}$ som. don. 10° tang. $\frac{1}{2}$ côté cherché = cot. $(45° + \frac{1}{2}$ ang. don.$)$ × tang. $\frac{1}{2}$ som. donnée
$(BC \backsim AB)$, C.	BC ou AB. AC.	11° tang. $\frac{1}{2}(BC + AB) =$ tang.^{2} $(45° + \frac{1}{2}C)$ tang. $\frac{1}{2}(BC - AB)$ 12° tang. $\frac{1}{2}$AC = tang. $(45° + \frac{1}{2}C)$ tang. $\frac{1}{2}(BC - AB)$
Un ang. et la différence entre le côté opposé et l'hypot.	L'hyp. et le même côté. L'autre côté.	11° tang. $\frac{1}{2}$ som. hyp. et côté = tang.^{2} $(45° + \frac{1}{2}$ ang. don.$)$ × tang. $\frac{1}{2}$ diff. don. 12° tang. $\frac{1}{2}$ côté cherché = tang. $(45° + \frac{1}{2}$ ang. don.$)$ × tang. $\frac{1}{2}$ diff. don.
(B + C), BC.	B ou C.	13° cos. $(B \backsim C) = -$ cos. $(B + C)$ cot.^{2} $\frac{1}{2}$BC
La somme des ang. et l'hypoténuse.	Les deux angles.	13° cos. diff. des angles = − cos. somme donnée × cot.^{2} $\frac{1}{2}$ hypoténuse
$(B \backsim C)$, BC.	B ou C.	14° cos. $(B + C) = -$ cos. $(B \backsim C)$ tang.^{2} $\frac{1}{2}$BC
La différ. des ang. et l'hypoténuse.	Les deux angles.	14° cos. somme des angles = − cos. diff. donnée × tang.^{2} $\frac{1}{2}$ hypoténuse.

1041. On voit par la formule 7e, que l'angle B restant constant, la plus grande différence entre le côté adjacent et l'hypoténuse a lieu lorsque $(BC + AB) = 90$.

Dans ce cas

$$\sin.\,(BC - AB) = \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}B.$$

Si, de cette équation, l'on veut tirer la grandeur correspondante de l'hypoténuse, qu'on écrive $90° - BC$ au lieu de AB; ce qui donne $\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}B = \sin.\,(2BC - 90°) = -\cos.\,2BC$, (II. 2e), $= 2\sin.^2 BC - 1$, (I. 22e). D'où $\sin.^2 BC = \frac{1 + \text{tang.}^2\frac{1}{2}B}{2} = \frac{1}{2\cos.^2\frac{1}{2}B}$, (I. 19e); et par conséquent, $\sin.\,BC = \frac{1}{\cos.\,\frac{1}{2}B}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, ou (80)

$$\sin.\,BC = \frac{\sin.\,45°}{\cos.\,\frac{1}{2}B}.$$

1042. Après avoir achevé la construction des formules pour la résolution d'un triangle sphérique rectangle, il est à propos de dire deux mots de leur translation aux triangles rectilignes; ce sera une première preuve de la vérité de ce que nous avons avancé (1021). Reprenons les formules de la table (1028). Si on fait $\cos.\,BC = 1$, la 5e et la 6e donneront $\cot.\,C = \text{tang.}\,B$, et $\cot.\,B = \text{tang.}\,C$; ce qui est précisément la propriété d'un triangle rectiligne ABC rectangle en A. Traduisez de la même manière les formules 15e, 18e, et celles qui en sont déduites. Dans la 8e, en mettant $\frac{1}{\text{tang.}\,BC}$ au lieu de $\cot.\,BC$, et ensuite les côtés au lieu des tangentes, on a l'équation (537, 13e). Il en est de même des autres formules où se trouvent les cotangentes des côtés. La traduction de la 25e (à laquelle se réduisent la 7e et la 10e) se fait comme il suit : $1 - \frac{1}{2}BC^2 = (1 - \frac{1}{2}AB^2)(1 - \frac{1}{2}AC^2) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2$ en négligeant le produit des deux quarrés; réduisant, transposant et multipliant par 2, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, c'est-à-dire l'équation si connue de l'hypoténuse.

Les trois premières formules et la 5e de la table (1040) donnent de même l'équation de l'hypoténuse. La 13e et la 14e ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, parce qu'il répugne à la nature de ces triangles que l'hypoténuse puisse être déterminée par les angles, et *vice versâ*. Toutes les autres formules de cette table se réduisent aux formules correspondantes (543 à 547).

Résolution des triangles sphériques rectilatères.

1043. J'appelle *rectilatère* le triangle qui a un côté de 90°. Ce triangle doit se ranger dans la classe des triangles rectangles, parce que son supplémentaire (993) est rectangle, et que c'est celui-ci qu'on résout, et auquel se réduisent les données.

EXEMPLE. Soit A le pôle arctique, BC l'équateur, B la ville de Quito, D celle de Paris. Connaissant AB = 90°, AD = 41° 10', (1009), et la différence BC = A = 80° 15' de longitude entre les deux villes, il s'agit de déterminer la distance entre ces villes sur la surface sphérique, c'est-à-dire l'arc BD. Fig. 57.

Puisque AB = 90°, il faut réduire les données au triangle supplémentaire. Mais sans recourir à une autre figure, je me servirai pour cet effet du même triangle ABD, en prenant, comme il suit, les parties opposées aux choses connues. Je suppose que D est le supplément de AB, et dès-lors j'écris D = 90°; de même, je prends B pour supplément de AD, et j'écris B = 138° 50'; BD pour supplément de A, et j'écris BD = 99° 45' : l'angle A devient ainsi la chose cherchée, comme supplément de BD. Or dans le triangle ABD rectangle en D, on connaît le côté BD et l'angle adjacent B; et l'autre angle A étant l'inconnue cherchée, c'est le cas de la formule 12° de la table VI, qui donne cos. A = cos. BD sin. B = cos. 99° 45' × sin. 138° 50' = − sin. 9° 45' × cos. 48° 50'.

$$\begin{aligned} \log.\cos.\ 48^\circ\ 50' &= 9,818392 \\ \log - \sin.\ 9^\circ\ 45' &= \underline{9,228784} \\ \log. - \cos.\ A &= 9,047176. \end{aligned}$$

Donc A = 96° 24', et son supplément 83° 36' est la distance cherchée BD qui correspond à 5016 milles géographiques, à 60 milles par degré.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant un angle commun.

1044. Des triangles sphériques BAC, BED, rectangles en A et en E, et ayant un angle commun B, on déduit les proportions Fig 69.

suivantes entre les lignes trigonométriques de leurs parties homologues.

Puisque (1014), sin. BC : sin. AC :: 1 : sin. B, et que par la même raison, sin. BD : sin. DE :: 1 : sin. B, il en résulte que sin. BC : sin. BD :: sin. AC : sin. DE; et par conséquent

les sinus des hypoténuses sont proportionnels aux sinus des côtés respectivement opposés à l'angle commun.

1045. Puisque (1015), 1 : tang. B :: sin. AB : tang. AC :: sin. BE : tang. DE,

les sinus des côtés adjacens à l'angle commun, sont comme les tangentes des côtés opposés à cet angle.

1046. On a (1025), cos. AC : cos. B :: 1 : sin. C, et
cos. DE : cos. B :: 1 : sin. D. Donc

les sinus des angles non communs sont en raison inverse des cosinus des côtés opposés à l'angle commun.

1047. Le même théorème (1025) donne 1 : sin. B :: cos. AB : cos. C :: cos. BE : cos. D. Donc

les cosinus des angles non communs sont comme les cosinus des côtés opposés.

1048. Par le théorème (1026), 1 : cos. B :: tang. BC : tang. AB :: tang. BD : tang. BE. Donc

les tangentes des hypoténuses sont proportionnelles aux tangentes des côtés adjacens à l'angle commun.

1049. On a (1027), 1 : tang. B :: cos. BC : cot. C :: cos. BD : cot. D. Donc.

les cosinus des hypoténuses sont en raison inverse des tangentes des angles non communs.

On reconnaîtra l'utilité des proportions précédentes dans la résolution des problèmes.

Si on transfère ces proportions aux triangles rectilignes (1021), on aura les proportions qui conviennent à deux triangles rectangles semblables, et les trois analogies (1046, 1047, 1049) donneront C = D, comme cela doit être.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant un côté commun.

1050. Soient les triangles ABD, ACD rectangles en D, et qui Fig. 62 et 63.
ont un côté commun AD. On aura (1014), sin. AD = sin. AB × sin. B = sin. AC sin. C. Donc sin. AB : sin. AC :: sin. C : sin. B. Et par conséquent

les sinus des hypoténuses sont en raison inverse des sinus des angles respectivement opposés au côté commun.

1051. Comme ABC peut représenter tout triangle sphérique obliquangle, la proportion peut s'énoncer encore comme il suit : *Dans tout triangle sphérique les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

1052. Par le théorème (1015), 1 : sin. AD :: tang. BAD : tang. BD :: tang. CAD : tang. CD. Donc

les tangentes des angles adjacens au côté commun sont comme les tangentes des côtés opposés.

1053. Par le même théorème, tang. AD = sin. BD tang. B = sin. CD tang. C. D'où il suit que sin. BD : sin. CD :: tang. C : tang. B. Et par conséquent

les sinus des côtés non communs sont en raison inverse des tangentes des angles adjacens.

1054. Par le théorème (1024), 1 : cos. AD :: cos. BD : cos. AB :: cos. CD : cos. AC. Donc

les cosinus des hypoténuses sont proportionnels aux cosinus des côtés non communs.

1055. Par le théorème (1025), 1 : cos. AD :: sin. BAD : cos. B :: sin. CAD : cos. C. Donc

les sinus des angles adjacens au côté commun sont proportionnels aux cosinus des angles opposés.

1056. Par le théorème (1026), tang. AD = cos. BAD tang. AB = cos. CAD tang. AC. Il s'ensuit que cos. BAD : cos. CAD :: tang. AC : tang. AB. Et par conséquent

les cosinus des angles adjacens au côté commun sont en raison inverse des tangentes des hypoténuses.

Des six proportions (1051 et suiv.) dépend la solution des triangles obliquangles.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant l'hypoténuse commune.

Fig. 64. 1057. Soient les triangles ABC, DBC, rectangles en A et en D, et ayant l'hypoténuse commune BC.

Le théorème (1014) donne sin. BC : 1 :: sin. AB : sin. ACB :: sin. BD : sin. BCD :: sin. AC : sin. ABC :: sin. CD : sin. CBD. Donc

les sinus de deux côtés quelconques sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

1058. Le théorème (1024) donne cos. BC = cos. AB cos. AC = cos. CD cos. BD. Donc

le rectangle des cosinus des côtés d'un triangle est égal au rectangle des cosinus des côtés de l'autre triangle.

1059. Par le théorème (1026), 1 : tang. BC :: cos. ABC : tang. AB :: cos. ACB : tang. AC :: cos. BCD : tang. CD :: cos. CBD : tang. BD. Donc

les tangentes de deux côtés quelconques sont proportionnelles aux cosinus des angles adjacens.

1060. Par le théorème (1027), 1 : cos. BC :: tang. ACB tang. ABC : 1 :: tang. BCD tang. CBD : 1. Et par conséquent *le rectangle des tangentes des angles d'un triangle est égal au rectangle des tangentes des angles de l'autre.*

Dans les cas auxquels les analogies précédentes (1044) et suiv.) seront applicables; si, au lieu de connaître les parties mêmes des triangles, on en connnaissait les sommes ou les différences, il serait facile de rapporter à ces données les mêmes analogies par les méthodes que nous avons employées tant de fois dans le cours de cet Ouvrage, et dont nous ferons encore usage dans le chapitre suivant, pour construire les analogies de Neper.

CHAPITRE XVIII.

Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

1061. Pour résoudre un triangle sphérique obliquangle, on le divise en deux rectangles, au moyen d'un arc perpendiculaire qui devient un côté commun à chacun d'eux. Les solutions se trouvent ensuite facilement par les analogies (1050 à 1056).

Mais la perpendiculaire peut tomber ou en dedans ou en dehors du triangle; ce qui donne des résultats très-différens. Par exemple, dans le triangle ABC, où l'on ne peut avoir la valeur de BC que Fig. 62 et 63.
médiatement, c'est-à-dire en déterminant celle des deux segmens BD, CD, il est clair qu'il faut prendre leur somme, si la perpendiculaire AD tombe en dedans comme dans la fig. 62, et au contraire leur différence, si elle tombe en dehors comme dans la fig. 63.

1062. Il paraît dès-lors, au premier aspect, que pour résoudre un triangle sphérique obliquangle, il est nécessaire de savoir si la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors. Il est arrivé de là que plusieurs Auteurs célèbres voulant aider le Calculateur par des règles particulières pour chaque cas, ont rendu l'exécution difficile en multipliant les préceptes, ou même ont prescrit des règles peu exactes; tandis que la plupart se sont tirés d'embarras, en laissant au Calculateur le soin pénible de chercher dans chaque cas la situation de la perpendiculaire. Ces inconvéniens disparaissent, si l'on adopte le système suivant, aussi simple que général.

Les formules doivent se construire dans l'hypothèse que la perpendiculaire tombe en dedans, et que les angles et les côtés soient moindres chacun que de 90°, (77). En les construisant ainsi, je dis qu'il ne sera nullement nécessaire, dans l'usage des formules, de faire attention à la position de la perpendiculaire,

et qu'*en observant seulement les règles des signes* (73, 75), *on aura toujours* (dans les cas qui ne seront pas douteux de leur nature) *la juste valeur des choses cherchées.*

La vérité de cette règle se reconnaîtra par l'usage : la proposition suivante sera utile pour la vérifier.

1063. *Si les angles sur la base sont de même espèce entre eux, la perpendiculaire tombe en dedans du triangle ; elle tombe en dehors, s'ils sont d'espèce différente.*

En effet, si la perpendiculaire AD tombe en dedans du triangle, son espèce est la même (1016) que celle des angles sur la *base* (601), B et C, lesquels par conséquent sont de même espèce entre eux.

1064. Si la perpendiculaire tombe en dehors, le prolongement de la base peut se faire ou se considérer soit d'un côté soit de l'autre.
Fig. 65. Soit DAE un demi-cercle perpendiculaire au demi-cercle DCE, (966). La perpendiculaire menée de l'angle A d'un triangle ABC sur la base BC prolongée, sera à volonté ou AD ou AE. Si on considère AD, le triangle ABC se convertit en deux triangles rectangles ADC, ADB, dans lesquels la perpendiculaire AD étant de la même espèce (1016) que les angles B et ACD, il s'ensuit (988, 2°.) que les angles B et C sur la base du triangle donné, sont d'espèce différente entre eux. Si on considère AE, cette perpendiculaire sera de même espèce que les angles C et ABE; d'où il résulte encore que B et C sont entre eux d'espèce différente.

Passons maintenant à la résolution des douze cas que présentent les triangles sphériques obliquangles, en prenant les données trois à trois.

1065. *Connaissant les trois côtés, déterminer un des angles.*
Fig. 62. Solution I. Dans un triangle quelconque ABC, soit B l'angle cherché, et de l'un des deux autres soit abaissée une perpendiculaire comme AD. On aura (1054), cos. AB : cos. AC :: cos. BD : cos. CD :: cos. BD : cos. (BC — BD) :: cos. BD : cos. BC cos. BD + sin. BC sin. BD :: (17) 1 : cos. BC + sin. BC tang. BD :: 1 : cos. BC + sin. BC cos. B tang. AB, (VI. 2°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\cos. B = \frac{\cos. AC - \cos. BC \cos. AB}{\sin. BC \sin. AB}.$$

Si par les règles (1021) on transfère cette formule aux triangles rectilignes, on aura l'expression (III. 70°).

1066. Si l'angle cherché était A ; en abaissant la perpendiculaire ou de l'angle B ou de l'angle C, on trouverait par la même méthode

$$\cos. A = \frac{\cos. BC - \cos. AB \cos. AC}{\sin. AB \sin. AC}.$$

Mais on a cette formule par la précédente, en y changeant B en A, et A en B.

On trouvera de même, de l'une ou de l'autre manière, la valeur analytique de cos. C.

Il est inutile d'avertir qu'on peut traiter ainsi toutes les formules qui suivent.

1067. SOLUTION II. On a (1065), $1 - \cos. B = \ldots\ldots$
$$\frac{\sin. BC \sin. AB + \cos. BC \cos. AB - \cos. AC}{\sin. BC \sin. AB} = \frac{\cos. (BC \backsim AB) - \cos. AC}{\sin. BC \sin. AB} =$$
$$\frac{2 \sin. \frac{1}{2} (AC - \overline{BC \backsim AB}) \times \sin. \frac{1}{2} (AC + \overline{BC \backsim AB})}{\sin. BC \sin. AB},$$ (II. 24°). Donc, soit qu'on suppose $BC > AB$ ou $AB > BC$, on aura toujours, (I. 7°),
$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} (AC + AB - BC) \sin. \frac{1}{2} (AC + BC - AB)}{\sin. BC \sin. AB};$$ et par conséquent
$$\sin. \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (AC + AB - BC) \sin. \frac{1}{2} (AC + BC - AB)}{\sin. BC \sin. AB}}.$$

1068. Dans les formules qui donnent la valeur de la moitié de l'arc cherché, l'espèce de l'arc n'est jamais incertaine ; sa valeur est toujours moindre que de 90°, (988, 1°.), (989). Je suppose du reste que l'arc ne soit pas composé de la somme de deux arcs, cas dans lequel il peut quelquefois être plus grand que de 90°. Il y en a des exemples (1702, 1081, 1089, 1109).

Cette formule (ainsi que les formules que donneront les secondes solutions dans les problèmes suivans) est celle dont on fait ordinairement usage dans le calcul numérique.

1069. SOLUTION III. On a, (1065), $1 + \cos. B = \ldots.$
$$\frac{\sin. BC \sin. AB - \cos. BC \cos. AB + \cos. AC}{\sin. BC \sin. AB} = (\text{II}, 3°) \frac{\cos. AC - \cos. (BC + AB)}{\sin. BC \sin. AB} =$$
$$\frac{2 \sin. \frac{1}{2} (BC + AB - AC) \times \sin. \frac{1}{2} (BC + AB + AC)}{\sin. BC \sin. AB},$$ (II. 24°). Donc (I. 24°),
$$\cos. \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (BC + AB + AC) \sin. \frac{1}{2} (BC + AB - AC)}{\sin. BC \sin. AB}}$$

Fig. 62. Par les raisons déduites (578), cette formule est moins en usage que la précédente, quoique le calcul en soit un peu plus court.

1070. SOLUTION IV. Puisque (1054), $\cos. AB : \cos. AC :: \cos. BD : \cos. CD$, on a aussi $\cos. AB + \cos. AC : \cos. AB \backsim \cos. AC :: \cos. BD + \cos. CD : \cos. BD \backsim \cos. CD$. Par conséquent (II. 14°), $\cot. \frac{1}{2}(AB + AC) : \text{tang.} \frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot. \frac{1}{2}(BD + CD) : \text{tang.} \frac{1}{2}(BD \backsim CD)$. En mettant les tangentes au lieu des cotangentes, et BC au lieu de $BD + CD$, on a

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(BD \backsim CD) = \text{tang.} \tfrac{1}{2}(AB + AC) \,\text{tang.} \tfrac{1}{2}(AB \backsim AC) \cot. \tfrac{1}{2} BC.$$

Cette formule est due à Neper; mais il y est parvenu par des voies plus laborieuses; il en est de même des formules que nous donnerons pour les dernières dans les problèmes qui suivent, desquelles il est aussi l'Auteur.

1071. De celle que nous venons de trouver on tire la valeur des segmens de la base ou côté BC divisé par la perpendiculaire. Si cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle, la formule donne à la vérité la valeur de $\text{tang.} \frac{1}{2}(BD + CD)$, et non celle de $\text{tang.} \frac{1}{2}(BD \backsim CD)$; mais alors aussi $BC = (BD \backsim CD)$, et non $BD + CD$; il est donc inutile de s'arrêter à cette considération, puisqu'en adoptant l'expression $\text{tang.} \frac{1}{2}(BD \backsim CD)$ pour la valeur donnée par la formule dans tous les cas, on a toujours

$$\text{grand segment} = \tfrac{1}{2} BC + \tfrac{1}{2}(BD \backsim CD), \text{ et}$$
$$\text{petit segment} = \tfrac{1}{2} BC - \tfrac{1}{2}(BD \backsim CD).$$

1072. Si $(AB + AC)$ est $> 180°$, $\text{tang.} \frac{1}{2}(BD \backsim CD)$ étant alors négative, on prendra le supplément de l'arc $\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$ donné par les tables, et on emploiera ce supplément dans ces deux équations.

Dans tous les cas, on trouvera pour le grand segment celui qui est adjacent au plus grand des deux côtés, et pour le petit segment celui qui est adjacent au plus petit de ces côtés, comme on peut le conclure facilement d'après l'analogie (1054).

1073. Connaissant les segmens de la base, on prendra celui qui est adjacent à l'angle cherché, comme BD dans le cas présent, et on aura (VI. 5°)

$$\cos. B = \text{tang.} BD \cot. AB.$$

Si c'est le petit segment qu'on emploie dans cette équation, on fera sa tangente négative (75) toutes les fois que l'équation précédente donnera le petit segment négatif et $< 90°$.

Cette solution n'est pas la plus courte; mais elle s'applique à deux problèmes, puisqu'elle fait aussi connaître les segmens de la base.

1074. Si on veut avoir une valeur analytique de chacun de ces segmens, exprimée par les trois côtés donnés, qu'on introduise dans la dernière équation la valeur (1065) de cos. B, et on obtiendra

$$\text{tang. BD} = \frac{\text{cos. AC} - \text{cos. BC cos. AB}}{\text{sin. BC cos. AB}}.$$

On aura par les mêmes moyens, ou en changeant ici B en C, et C en B, (ce qu'il nous suffira d'indiquer une seule fois),

$$\text{tang. CD} = \frac{\text{cos. AB} - \text{cos. BC cos. AC}}{\text{sin. BC cos. AC}}.$$

1075. *Les trois angles étant donnés, déterminer un des côtés.*

Solution I. Soit AB le côté cherché; de l'une A de ses extrémités abaissez la perpendiculaire AD. Vous aurez (1055), cos. B : cos. C :: sin. BAD : sin. CAD :: sin. BAD : sin. (BAC — BAD). En procédant comme nous avons fait (1065), et mettant cos. AB tang. B au lieu de cot. BAD, (VI. 3°), vous trouverez

$$\text{cos. AB} = \frac{\text{cos. C} + \text{cos. A cos. B}}{\text{sin. A sin. B}}.$$

Si on écrit 1 au lieu de cos. AB (1021), on aura la formule (III. 94°) des triangles rectilignes.

1076. Si les trois angles sont aigus, le signe de cos. AB est positif. Mais AB peut représenter généralement chacun des côtés d'un triangle sphérique. Donc *dans tout triangle sphérique, si tous les angles sont aigus, chacun des côtés est moindre que de* 90°. Je ne m'arrêterai point à ces conséquences, lorsqu'elles ne mèneront pas à quelque application utile; elles se tirent des formules analytiques à la première inspection, quoiqu'elles coûtassent de longues démonstrations à la Géométrie des Anciens. On peut voir un grand nombre de propositions de ce genre dans

les Ouvrages intitulés (*Menelaï sphericorum* et *Regiomontani de Triangulis*).

Fig. 62. 1077. SOLUTION II. (1075), $1-\cos.AB=\frac{\sin.A\sin.B-\cos.A\cos.B\cos.-C}{\sin.A\sin.B}$

$=\frac{-\cos.(A+B)-\cos.C}{\sin.A\sin.B}=-\frac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\times\cos.\frac{1}{2}(\overline{A+B}\backsim C)}{\sin.A\sin.B}$, (II. 20°). Donc (I. 7°)

$$\sin.\tfrac{1}{2}AB=\sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(\overline{A+B}\backsim C)}{\sin.A\sin.B}}.$$

Le signe — devient positif dans tous les cas, parce que $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)$ est toujours négatif (996), et qu'il serait aisé de prouver que l'autre cosinus est toujours positif, si l'on ne voyait d'ailleurs que $\sin.\frac{1}{2}AB$ ne peut jamais être imaginaire.

Cette formule est une de celles qui par leur nature ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, dans lesquelles un côté ne peut être déterminé par la seule connaissance des angles.

1078. SOLUTION III. (1075), $1+\cos.AB=\frac{\cos.C+\cos.A\cos.B+\sin.A\sin.B}{\sin.A\sin.B}$

$=\frac{\cos.C+\cos.(A\backsim B)}{\sin.A\sin.B}=\frac{2\cos.\frac{1}{2}(C+\overline{A\backsim B})\cos.\frac{1}{2}(C\backsim\overline{A\backsim B})}{\sin.A\sin.B}$, (II. 20°). Donc (I. 24°)

$$\cos.\tfrac{1}{2}AB=\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(C+\overline{A\backsim B})\cos.\frac{1}{2}(C\backsim\overline{A\backsim B})}{\sin.A\sin.B}}.$$

1079. SOLUTION IV. En opérant sur la proportion (1055), $\cos.B:\cos.C::\sin.BAD:\sin.CAD$, comme nous avons fait (1070), on aura (II. 14°, 15°), $\cot.\frac{1}{2}(B+C):\text{tang}.\frac{1}{2}(C\backsim B)::\text{tang}.\frac{1}{2}(BAD+CAD):\text{tang}.\frac{1}{2}(BAD\backsim CAD)$, ou, en écrivant A au lieu de sa valeur BAD + CAD,

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}(BAD\backsim CAD)=\text{tang}.\tfrac{1}{2}A\,\text{tang}.\tfrac{1}{2}(C\backsim B)\,\text{tang}.\tfrac{1}{2}(C+B).$$

1080. Par cette formule on a la valeur des segmens de *l'angle vertical* (601). Et en adoptant l'expression du premier membre pour tous les cas, comme nous avons fait (1071), on aura toujours

$$\text{grand segment}=\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}(BAD\backsim CAD);$$
$$\text{petit segment}=\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}(BAD\backsim CAD).$$

1081. Puisque le plus grand de deux arcs correspond à un plus petit cosinus et à un plus grand sinus (en formant toujours les

règles (1062) comme pour des arcs moindres que de 90°), on peut conclure de la proportion (1055) que le moindre des deux angles sur la base et le grand segment de l'angle vertical se trouveront toujours adjacens à un même côté, et que par conséquent le plus grand des deux angles et le petit segment seront adjacens à l'autre côté; en supposant toujours que dans le calcul de la formule (1079), on ait égard au signe de tang. $\frac{1}{2}(C+B)$.

1082. Ainsi en prenant le segment adjacent au côté cherché, on aura (VI. 15°)

$$\cos. AB = \cot. B \cot. BAD.$$

Et quand on aura le petit segment négatif et $< 90°$, sa contangente s'emploiera dans cette formule avec le signe négatif (75, 68).

1083. La valeur analytique du segment BAD, exprimée par les trois angles donnés, s'obtient en introduisant dans la dernière formule la valeur (1075) de cos. AB : on en tire alors

$$\cot. BAD = \frac{\cos. C + \cos. A \cos. B}{\sin. A \cos. B}.$$

En changeant B en C, et C en B, vous aurez la valeur de cot. CAD, (1074).

1084. *Connaissant deux côtés et l'angle compris, déterminer un des deux autres angles.*

SOLUTION I. Appelons BC, AC, et C les choses connues, B l'angle cherché; et du troisième, A, abaissons la perpendiculaire AD. Nous aurons (1053), tang. B : tang. C :: sin. CD : sin. BD :: sin. CD : sin. (BC — CD) :: 1 : sin. BC cot. CD — cos. BC :: 1 : sin. BC $\times \frac{\cot. AC}{\cos. C}$ — cos. BC, (VI. 2°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\text{tang.} B = \frac{\sin. C}{\sin. BC \cot. AC - \cos. BC \cos. C}.$$

Cette formule, qui renferme la cotangente d'un côté et le cosinus d'un autre, se transfère aux triangles rectilignes par les règles données (1021), et se réduit à la formule (III. 78°). Il en est de même de la formule ci-après, qui se réduit à la 77°.

1085. Si les données étaient AB, AC et BAC; en changeant

Fig. 62. dans la formule que nous venons de trouver C en A et A en C, ou bien en abaissant la perpendiculaire sur le côté AB, et procédant comme nous venons de le faire, on trouverait une autre valeur de tang. B, et cette valeur serait

$$\text{tang. B} = \frac{\text{sin. A}}{\text{sin. AB cot. AC} - \text{cos. AB cos. A}}.$$

1086. SOLUTION. II. Soient toujours BC, AC et C les choses connues, B la cherchée, et AD la perpendiculaire. On aura

1°. tang. CD $=$ cos. C tang. AC, (VI. 2°);

2°. BD $=$ BC $-$ CD;

3°. $\text{tang. B} = \frac{\text{tang. C sin. CD}}{\text{sin. BD}}$, (1053).

Le segment CD de la base qui se trouve par la première équation, se nomme *premier* segment; l'autre BD, que donne la seconde, se nomme *second* segment. Si l'on a celui-ci négatif, c'est-à-dire si l'on a CD $>$ BC, sin. BD dans la troisième formule s'emploiera avec le signe négatif, (75).

1087. Après avoir trouvé l'angle B, si on veut connaître le troisième côté AB, on aura, par la formule (VI. 10°),

cot. AB $=$ cos. B cot. BD.

On observera seulement que si BD est négatif, et $> 90°$, cot. BD est positive.

1088. SOLUTION III. Soient les choses connues AB, AC, BAC, et par conséquent B ou C la chose cherchée. En abaissant de l'angle connu A la perpendiculaire AD, on aura (1056), tang. AB : tang. AC :: cos. CAD : cos. BAD; et par conséquent (II. 11°, 14°), sin. (AB + AC) : sin. (AB ∽ AC) :: cot. $\frac{1}{2}$ (CAD + BAD) : tang. $\frac{1}{2}$ (BAD ∽ CAD). En mettant BAC ou A au lieu de CAD + BAD, on a

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{BAD} \backsim \text{CAD}) = \text{cot.} \tfrac{1}{2} \text{A} \times \frac{\text{sin. (AB} \backsim \text{AC)}}{\text{sin. (AB + AC)}}.$$

1089. De cette formule on déduit la valeur des segmens de l'angle donné A; car en se servant d'une même expression (1071) pour tous les cas, on a toujours

grand segment $= \frac{1}{2} \text{A} + \frac{1}{2} (\text{BAD} \backsim \text{CAD})$;

petit segment $= \frac{1}{2} \text{A} - \frac{1}{2} (\text{BAD} \backsim \text{CAD})$.

1090. L'analogie (1056) fait voir que le grand segment est adjacent au grand côté, le petit segment au petit côté; en supposant toujours qu'on ait égard dans la formule (1088) au signe de sin. (AB + AC). On a donc (VI. 3°)

$$\cot. B = \text{tang. BAD} \cos. AB, \quad \text{et}$$
$$\cot. C = \text{tang. CAD} \cos. AC.$$

Dans ces formules la tangente du petit segment s'emploiera comme négative (75), quand on aura ce segment négatif et $< 90°$.

1091. En introduisant dans l'avant-dernière formule la valeur (1085) de cot. B, ou de $\frac{1}{\text{tang } B}$, on en déduit

$$\text{tang. BAD} = \frac{\text{tang. AB cot. AC} - \cos. A}{\sin. A}.$$

Si l'on change B en C, et C en B, on obtient la valeur analytique de l'autre segment CAD, exprimée de même par les données du problème.

1092. Solution IV. Les conditions restant les mêmes que dans la solution précédente, prenez l'analogie (1050), sin. AB : sin. AC :: sin. C : sin. B; et vous aurez en premier lieu (II. 13°) la suivante, qui est utile en bien des cas :

(P)...$\text{tang.}\frac{1}{2}(AB+AC) : \text{tang.}\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \text{tang.}\frac{1}{2}(C+B) : \text{tang.}\frac{1}{2}(C \backsim B)$.

1093. Substituez la valeur de tang. $\frac{1}{2}$ (C + B) donnée par l'équation (1079), et vous aurez $\text{tang.}\frac{1}{2}(AB+AC) : \text{tang.}\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.\frac{1}{2}A\ \text{tang.}\frac{1}{2}(BAD \backsim CAD) : \text{tang.}^2\frac{1}{2}(C \backsim B)$. Multipliez terme à terme cette analogie par la seconde (1088) exprimée comme il suit, (I. 6°), $2\sin.\frac{1}{2}(AB+AC)\cos.\frac{1}{2}(AB+AC) : 2\sin.\frac{1}{2}(AB \backsim AC)\cos.\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.\frac{1}{2}A : \text{tang.}\frac{1}{2}(BAD \backsim CAD)$; et divisant le 1er rapport par 2, et le 2e par $\text{tang.}\frac{1}{2}(BAD \backsim CAD)$, vous aurez $\sin.^2\frac{1}{2}(AB+AC) : \sin.^2\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.^2\frac{1}{2}A : \text{tang.}^2\frac{1}{2}(C \backsim B)$; et enfin, en extrayant les racines,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \cot.\tfrac{1}{2}A \times \frac{\sin.\frac{1}{2}(AB \backsim AC)}{\sin.\frac{1}{2}(AB + AC)}.$$

1094. Cette équation fait connaître la demi-différence des angles inconnus. Pour avoir leur valeur absolue, il faut trouver encore celle de leur demi-somme. Pour cela, qu'on substitue dans

cette même équation la valeur de tang. $\frac{1}{2}$ (C $\backsim$ B) donnée par l'ana-
Fig. 62. logie (P) ; et réduisant, on aura

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(C+B)=\text{cot.}\tfrac{1}{2}A\times\frac{\cos.\frac{1}{2}(AB\backsim AC)}{\cos.\frac{1}{2}(AB+AC)}.$$

1095. Les deux dernières formules, trouvées par Neper, méritent qu'on fasse remarquer leur utilité. 1°. Pour les calculer, on n'a que sept logarithmes à chercher, et elles font connaître deux angles à-la-fois; ce qui est très-avantageux en certains cas (1465, etc.): avec un égal nombre de logarithmes, la seconde et la troisième solution (la première serait plus laborieuse à calculer) ne donnent qu'un seul angle. 2°. L'une ou l'autre de ces formules est la plus courte qu'on puisse employer pour *trouver un angle, connaissant les deux autres et les deux côtés qui leur sont opposés*; comme il est facile de le voir, en supposant inconnu l'angle A. 3°. Et de là résulte le théorème suivant : *Deux triangles sphériques sont égaux s'ils ont deux angles, et les deux côtés opposés à ces deux angles, respectivement égaux*; sauf le seul cas où les angles égaux sont droits : car alors le troisième angle admet une infinité de valeurs inégales, les deux formules donnant cot. $\frac{1}{2}$ A $=\frac{0}{0}=\infty\times o$. 4°. Enfin de la seconde je déduis la propriété suivante des triangles sphériques, propriété aussi remarquable qu'utile (1122).

Puisque tang. $\frac{1}{2}$(C + B) et cos. $\frac{1}{2}$(AB + AC) ont le même signe dans la formule, et que les deux autres quantités ne peuvent jamais être négatives (988, 1°.), (989); il s'ensuit que *dans tout triangle sphérique la demi-somme de deux côtés est de la même espèce que la demi-somme des deux angles opposés.*

1096. *Connaissant deux côtés et l'angle compris, déterminer le troisième côté.*

Solution I. Soient AB, BC, B les données, AC le côté cherché. De la formule (1065) on tire

$$\cos.AC=\cos.BC\cos.AB+\sin.BC\sin.AB\cos.B.$$

1097. Solution II. Supposons une perpendiculaire AD abaissée sur l'un des côtés donnés; et nous aurons

1°. tang. BD = tang. AB cos. B, (VI. 2°);
2°. CD = BC $\backsim$ BD;
3°. cos. AC = cos. AB $\times\frac{\cos.CD}{\cos.BD}$, (1054).

J'ai employé $\backsim$ au lieu de $-$ dans la deuxième équation, parce que quand elle donnerait CD négatif, cos. CD ne changerait pas de signe pour cela, (75).

1098. Si, après avoir trouvé la valeur de AC, on desirait celle de l'angle inconnu C adjacent à la base, on pourrait recourir à la formule suivante (VI. 5°),

$$\cos. C = \text{tang}. CD \cot. AC,$$

dans laquelle on aura soin d'observer que tang. CD doit être négative, lorsqu'on a $CD < 90°$, et $BD > BC$.

1099. SOLUTION III. Si le côté cherché est petit, on ne pourra l'avoir avec exactitude par le moyen du cosinus. Dans ce cas, au lieu des solutions précédentes, on emploiera celle qui suit.

Puisque (1067), $2\sin.^2\frac{1}{2}B = \frac{\cos.(BC \backsim AB) - \cos. AC}{\sin. BC \sin. AB}$, on aura (I. 22°), $2\sin.^2\frac{1}{2}B \sin. BC \sin. AB = 2\sin.^2\frac{1}{2}AC - 2\sin.^2\frac{1}{2}(BC \backsim AB)$.
Et par conséquent

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{(\sin.^2\tfrac{1}{2}\overline{BC \backsim AB} + \sin. BC \sin. AB \sin.^2\tfrac{1}{2}B)},$$

ou, ce qui est plus commode pour le calcul,

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \sin.\tfrac{1}{2}(BC \backsim AB)\sqrt{\left(1 + \frac{\sin. BC \sin. AB \sin.^2\frac{1}{2}B}{\sin.^2\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}\right)}.$$

1100. On pourra calculer cette formule avec les tables trigonométriques en logarithmes, si on la divise (441) en deux équations, comme il suit :

$$\text{tang}. a = \frac{\sin.\frac{1}{2}B}{\sin.\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}\sqrt{\sin. BC \sin. AB};$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \frac{\sin.\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}{\cos. a}.$$

1101. Quand la différence (BC $\backsim$ AB) des côtés donnés est petite, il peut être utile de se servir de la somme par préférence, pour plus de précision. On y parvient comme il suit :

Puisque $\sin.^2\frac{1}{2}B = 1 - \cos.^2\frac{1}{2}B$, et que $\sin.^2\frac{1}{2}(BC \backsim AB) = \sin.^2\frac{1}{2}(BC + AB) - \sin. BC \sin. AB$, (II. 27°); par ces substitutions, la première valeur (1099) de $\sin.\frac{1}{2}AC$ devient

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{(\sin.^2\tfrac{1}{2}(BC + AB) - \sin. BC \sin. AB \cos.^2\tfrac{1}{2}B)},$$

Fig. 62. et la seconde ;

$$\sin.\tfrac{1}{2}\,AC=\sin.\tfrac{1}{2}\,(BC+AB)\sqrt{\left(1-\frac{\sin.BC\,\sin.AB\,\cos.^2\tfrac{1}{2}B}{\sin.^2\tfrac{1}{2}(BC+AB)}\right)}.$$

1102. On divise ainsi cette formule en deux autres, (442);

$$\cos.m=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}B}{\sin.\tfrac{1}{2}(BC+AB)}\sqrt{\sin.BC\,\sin.AB},$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}\,AC=\sin.m\,\sin.\tfrac{1}{2}\,(BC+AB).$$

1103. Il n'y a point de formule analogue à celles de Neper, pour résoudre immédiatement ce problème. Si l'on veut se servir de ses formules, après avoir trouvé, au moyen des solutions (1088) ou (1092), un des angles inconnus, on emploiera la solution (1128) pour trouver le côté cherché.

1104. *Connaissant deux angles et le côté compris, déterminer un des deux autres côtés.*

Solution I. Soient A, C, AC les choses connues, AB la cherchée, et soit abaissée sur le troisième côté une perpendiculaire AD. On aura (1056), tang. AB : tang. AC :: cos. CAD : cos. BAD :: cos. CAD : cos. (BAC — CAD) :: 1 : cos. BAC + sin. BAC × tang. CAD :: 1 : cos. A + sin. A × $\frac{\cot.C}{\cos.AC}$, (VI. 5°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\text{tang.}\,AB=\frac{\sin.AC}{\sin.A\,\cot.C+\cos.A\,\cos.AC}.$$

1105. Si les données étaient B, C, BC; en procédant de la même manière, ou bien en changeant dans cette formule A en B et B en A, on trouverait une autre valeur de tang. AB, qui serait

$$\text{tang.}\,AB=\frac{\sin.BC}{\sin.B\,\cot.C+\cos.B\,\cos.BC}.$$

Cette formule et la précédente se changent (1021) en celles des triangles rectilignes (III. 4°, 5°).

1106. Solution II. Les conditions (1104) restant toujours les mêmes, on a

1°. $\cot.CAD=\text{tang.}C\,\cos.AC$, (VI. 5°);

2°. $BAD=A\backsim CAD$, (1097);

3°. $\text{tang.}AB=\text{tang.}AC\times\frac{\cos.CAD}{\cos.BAD}$, (1056).

1107. Connaissant la valeur de AB, si on veut celle du troisième angle B, on se servira de la formule suivante (VI. 3°),

$$\cot. B = \cos. AB \ \text{tang.}\ BAD\,;$$

en observant seulement que si BAD est $< 90°$, et CAD $>$ A, tang. BAD doit être négative.

1108. SOLUTION III. Soient B, C, BC les données, et AD la perpendiculaire sur le côté donné. On aura (1053), tang. B : tang. C :: sin. CD : sin. BD. Et par conséquent (II. 11°, 13°), sin. (B + C) : sin. (B ∽ C) :: tang. ½ (CD + BD) : tang. ½ (CD ∽ BD), ou

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(CD \backsim BD) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} BC \times \frac{\sin. (B \backsim C)}{\sin. (B + C)}.$$

1109. Dans un Ouvrage estimé, cette formule est ainsi changée pour le cas où la perpendiculaire tombe en dehors du triangle : $\cot. \tfrac{1}{2}(BD + CD) = \cot. \tfrac{1}{2} BC \times \frac{\sin. (B - C)}{\sin. (B + C)}$. Un exemple en nombres suffirait pour reconnaître l'erreur de cette formule.

Mais au surplus pour démontrer la justesse de la formule que nous venons de donner, même dans le cas où la perpendiculaire tombe en dehors, qu'on se rappelle qu'alors les angles sur le côté connu doivent être d'espèces différentes (1064). Soit donc celui qu'on voudra, par exemple C, l'angle obtus; la proportion (1053) sera en pareil cas tang. B : — tang. C :: sin CD : sin. BD. Et par conséquent tang. B + (— tang. C) : tang. B — (— tang. C) :: sin. CD + sin. BD : sin. CD — sin. BD :: tang. B — tang. C : tang. B + tang. C. Si l'on transforme la dernière analogie d'après les formules (II. 13°, 11°), elle deviendra tang. ½ (CD + BD) : tang. ½ (CD — BD) :: sin. (B — C) : sin. (B + C). De plus, lorsque la perpendiculaire tombe en dehors, on a BC = CD — BD, fig. 63; substituant cette valeur, on a $\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(CD + BD) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} BC \times \frac{\sin. (B - C)}{\sin. (B + C)}$. Or la formule que nous venons de donner est précisément la même que cette équation, si ce n'est que nous employons le signe ∽ au lieu du signe +, et on a en vu le motif (1071).

1110. On a donc, dans tous les cas, pour les segmens du côté connu,

$$\text{grand segment} = \tfrac{1}{2} BC + \tfrac{1}{2}(CD \backsim BD);$$
$$\text{petit segment} = \tfrac{1}{2} BC - \tfrac{1}{2}(CD \backsim BD).$$

Fig. 62. 1111. Dans la proportion (1053) on voit que le plus grand angle est adjacent au petit segment, et le plus petit angle au grand segment; en supposant toujours qu'on ait égard au signe de $\sin.(B+C)$ dans le calcul de la formule (1108). Prenant donc le segment adjacent au côté cherché, on aura (VI. 10°)

$$\cot. AB = \cot. BD \cos. B, \text{ et}$$
$$\cot. AC = \cot. CD \cos. C.$$

Dans ces formules, on emploiera négativement (75, 68) la cotangente du petit segment, quand on aura ce segment négatif et $< 90°$.

1112. Pour avoir le segment BD exprimé analytiquement par les données du problème, on introduira dans l'avant-dernière formule la valeur (1105) de $\text{tang.} AB = \frac{1}{\cot. AB}$, et on en tirera

$$\cot. BD = \frac{\text{tang.} B \cot. C + \cos. BC}{\sin. BC}.$$

En changeant B en C, et C en B, on aura de même la valeur de cot. CD.

1113. Solution IV. Procédant comme on a fait (1093), qu'on substitue dans l'analogie (P) la valeur de $\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC)$ prise de l'équation (1070), et on trouvera $\text{tang.} \frac{1}{2}(BD \backsim CD) \times \text{tang.} \frac{1}{2} BC : \text{tang.}^2 \frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \text{tang.} \frac{1}{2}(C+B) : \text{tang.} \frac{1}{2}(C \backsim B)$. Mais $\text{tang.} \frac{1}{2}(CD \backsim BD) = \text{tang.} \frac{1}{2} BC \times \frac{\sin. \frac{1}{2}(B \backsim C) \cos. \frac{1}{2}(B \backsim C)}{\sin. \frac{1}{2}(B + C) \cos. \frac{1}{2}(B + C)}$, (1108). En mettant cette valeur dans l'analogie qui précède, et extrayant les racines, on aura

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(AB \backsim AC) = \text{tang.} \tfrac{1}{2} BC \times \frac{\sin. \frac{1}{2}(C \backsim B)}{\sin. \frac{1}{2}(C + B)}.$$

1114. En substituant dans cette équation la valeur de $\text{tang.} \frac{1}{2}(AB \backsim AC)$ tirée de l'analogie (P), on aura encore

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(AB + AC) = \text{tang.} \tfrac{1}{2} BC \times \frac{\cos. \frac{1}{2}(C \backsim B)}{\cos. \frac{1}{2}(C + B)}.$$

1115. Ces deux formules sont remarquables en ce qu'elles ont l'avantage de faire trouver à-la-fois les deux côtés inconnus. Chacune d'elles est d'ailleurs la plus courte qu'on puisse employer pour *trouver un côté, connaissant les deux autres et les deux*

angles qui leur sont opposés, comme il est aisé de s'en convaincre en supposant BC inconnu.

1116. *Connaissant deux angles et le côté compris, trouver le troisième angle.*

SOLUTION I. Soient A, B, AB les données. De la formule (1075) on tire

$$\cos.C = \cos.AB \sin.A \sin.B - \cos.A \cos.B.$$

1117. SOLUTION II. En abaissant de l'un A des angles donnés une perpendiculaire AD, on aura

$$1^\circ.\ \cot.BAD = \cos.AB \tan g.B,\ (\text{VI. } 3^\circ);$$

$$2^\circ.\ CAD = A - BAD;$$

$$3^\circ.\ \cos.C = \cos.B \times \frac{\sin.CAD}{\sin.BAD},\ (1055).$$

Il doit être inutile actuellement de dire que si la deuxième équation donne CAD négatif, on devra prendre négativement sin.CAD dans la troisième, (75); et de même aussi cot.CAD dans la suivante.

1118. L'angle C connu, si on veut connaître le côté AC, c'est à-dire le côté opposé à l'angle employé dans la première équation, on y parviendra facilement par l'équation suivante (VI. 15°),

$$\cos.AC = \cot.C \cot.CAD.$$

1119. SOLUTION III. Si l'angle cherché est petit, on ne pourra l'avoir avec précision par les deux solutions précédentes. Mais puisque (1077), $2\sin.^2\frac{1}{2}AB \sin.A \sin.B = -\cos.(A+B) - \cos.C = 1 - 2\cos.^2\frac{1}{2}(A+B) - 1 + 2\sin.^2\frac{1}{2}C$, (I. 23°, 22°), il s'ensuit que

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{(\cos.^2\tfrac{1}{2}\overline{A+B} + \sin A \sin.B \sin.^2\tfrac{1}{2}AB)};$$

ou, ce qui est plus commode pour le calcul,

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\sqrt{\left(1 + \frac{\sin.A \sin.B \sin.^2\frac{1}{2}AB}{\cos.^2\frac{1}{2}(A+B)}\right)};$$

ou enfin (441), pour n'avoir à employer que les seules tables trigonométriques en logarithmes,

$$\tan g.a = \frac{\sin.\frac{1}{2}AB}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}\sqrt{\sin.A \sin.B};\ \text{et}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.a}.$$

Fig. 62. Il n'y a point de formule analogue à celles de Neper pour résoudre immédiatement ce problème ; mais si on veut faire usage de ses formules, après avoir trouvé par les solutions (1108 ou 1113) un des côtés inconnus, on aura recours à la suivante pour avoir le troisième angle.

1120. *Connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.* (On n'a qu'une solution de ce problème, et de chacun des cinq qui le suivent : à ces six problèmes appartiennent les cas douteux).

Soient AB, AC, B les données : C sera l'angle cherché, et on aura (1050),

$$\sin. C = \frac{\sin. AB \sin. B}{\sin. AC}.$$

1121. On démontre, de la même manière que pour les cas douteux dans la Trigonométrie rectiligne (562), que cet angle C peut avoir deux valeurs, dont l'une est supplément de l'autre, et qu'il en est ainsi de toutes les autres parties inconnues du triangle. Pour les triangles sphériques, l'incertitude est détruite, dans la plupart des cas, par les règles suivantes, qui se déduisent aisément des deux propriétés démontrées (1005; 1095, 4°.).

1122. I. *L'angle opposé au plus petit côté est aigu, si la somme des côtés donnés est moindre que de* 180°.

II. *L'angle opposé au plus grand côté est obtus, si la somme des côtés donnés excède* 180°.

Il est clair que ces règles embrassent la moitié des cas possibles. Mais de plus,

III. *Quand la somme des côtés donnés* = 180°, *de même la somme des angles opposés* = 180°.

L'incertitude disparaît donc, comme je l'ai dit, *dans la plupart des cas.*

Mais quand on ne peut déterminer par ces trois règles l'espèce de l'angle cherché, elle est *douteuse.*

1123. Si au lieu de connaître un angle, on connaissait la somme ou la différence des angles opposés aux côtés donnés, la valeur de chacun de ces angles se trouverait par l'analogie (P), (1092).

1124. *Connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle compris par ces deux côtés.*

Soient AB, AC, B les données; A sera l'angle cherché. En abaissant de cet angle la perpendiculaire AD, on aura

1°. cot. BAD = cos. AB tang. B, (VI. 3°);

2°. cos. CAD = cos. BAD $\times \frac{\text{tang. AB}}{\text{tang. AC}}$, (1056);

3°. BAD ± CAD = A.

Le signe + a lieu quand la perpendiculaire tombe en dedans; le signe —, quand elle tombe en dehors. Et par conséquent (1063, 1064) *on prendra la somme des segmens de l'angle cherché, lorsque les deux autres angles seront de même espèce entre eux; la différence, lorsque ces deux angles seront d'espèce différente entre eux.* D'où l'on voit que le cas de ce problème est douteux toutes les fois que le cas du problème précédent l'est aussi.

1125. La Caille prescrit de prendre la somme des segmens, lorsque *les côtés donnés* sont de même espèce entre eux. L'autorité d'un tel homme a engagé d'autres Auteurs à adopter cette règle sans examen. Il s'ensuivrait que quand la perpendiculaire tombe en dehors, c'est-à-dire quand les angles sur la base sont d'espèce différente (1064), les côtés qui leur sont opposés seraient nécessairement aussi d'espèce différente; ce qui n'est pas, comme on peut le démontrer de mille manières : et si cela était, il ne resterait plus de cas douteux.

1126. *Connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, déterminer le troisième côté.*

Soient AB, AC, B les données; abaissons, sur le côté cherché BC, la perpendiculaire AD; nous aurons

1°. tang. BD = tang. AB cos. B, (VI. 2°);

2°. cos. CD = cos. BD $\times \frac{\text{cos AC}}{\text{cos. AB}}$, (1054);

3°. BD ± CD = BC.

On prendra ou la somme ou la différence des segmens de la base, suivant les règles que nous avons données (1124) pour les segmens de l'angle vertical.

On a encore prescrit, dans ce cas, de prendre la somme, quand *les deux côtés donnés* sont de même espèce; d'où il suivrait que quand deux côtés sont de même espèce, la perpendiculaire sur le

Fig. 62. troisième côté tombe *toujours* en dedans du triangle; ce qui ne mérite pas même d'être réfuté.

1127. Si le sinus ou cosinus trouvé dans l'un des trois précédens problèmes, était d'une telle grandeur qu'on ne pût avoir l'arc avec la précision desirée, on aurait recours à un autre de ces trois problèmes, dans lequel le sinus ou le cosinus se trouvât moins grand; et alors, connaissant quatre parties du triangle, on varierait les données, pour trouver la partie cherchée par le moyen de quelqu'un des problèmes qui précèdent les trois derniers. Cette remarque doit aussi s'appliquer aux trois suivans.

1128. *Connaissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté opposé à l'autre angle connu.*

Soient B, C, AC les données : AB sera le côté cherché, et l'on aura (1050)

$$\sin.AB = \sin.AC \times \frac{\sin.C}{\sin.B}.$$

1129. I. *Le côté opposé au plus petit angle est* $< 90°$, *si la somme des angles donnés est* $< 180°$.

II. *Le côté opposé au plus grand angle est* $> 90°$, *si la somme des angles donnés est* $> 180°$.

III. *Si la somme des angles donnés* $= 180°$, *de même alors la somme des côtés opposés* $= 180°$.

1130. Si ces règles, qui dérivent des propriétés (1005; 1095, 4°.), ou si les notions qu'on aura d'ailleurs, ne suffisent pas pour qu'on puisse discerner l'espèce du côté cherché dans ce problème, il n'y aura de même aucun moyen de déterminer l'espèce pour les autres parties inconnues du triangle, qui sont l'objet des deux problèmes qui suivent. Regiomontanus, qui a bien connu l'ambiguité des trois problèmes précédens, a donné celui-ci et les deux suivans, comme déterminés dans tous les cas (*de Triangulis*, *Lib.* 4. *prop.* 29 et 32). Il est donc à propos de faire voir qu'ils ne le sont pas.

Fig. 54. Pour cet effet, soient donnés le côté KN et les angles NAK et ANK, en supposant KN oblique sur AN; toutes les fois qu'un arc KL = KN pourra tomber de l'angle inconnu K sur le côté opposé, il est clair que ces problèmes seront douteux, et qu'on ne pourra discerner par la Trigonométrie si les données appartiennent au

triangle ANK, ou bien au triangle BLK, puisque A = B, (977), que KN = KL par la supposition, et que ANK = BLK, (1002).

1131. Si au lieu de connaître un côté, on connaissait la somme ou la différence des côtés opposés aux angles donnés, la valeur de chacun de ces côtés se trouverait par l'analogie (P), (1092).

1132. *Connaissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté compris entre leurs sommets.*

Soient les données B, C, AC; abaissons la perpendiculaire AD Fig. 64. sur le côté cherché BC; et nous aurons

1°. tang. CD = tang. AC cos. C, (VI. 2°);

2°. sin. BD = sin. CD $\times \frac{\text{tang. C}}{\text{tang. B}}$, (1053);

3°. CD ± BD = BC.

1133. L'espèce de BD est toujours douteuse, lorsque dans le problème précédent celle de AB est douteuse. Mais si l'on connaît l'espèce de AB, on détermine celle de BD par l'analogie (1054), cos. AC : cos. CD :: cos. AB : cos. BD, qui fournit la règle suivante : *Selon que les côtés opposés aux angles donnés sont, entre eux, de même ou de différente espèce, les segmens du côté cherché sont, entre eux, de même ou de différente espèce.*

Dans la troisième équation, on prendra toujours la somme, quand les angles donnés seront de même espèce; la différence, dans le cas contraire.

1134. *Connaissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le troisième angle.*

Soient les données B, C, AC; A est l'angle cherché, et l'on a

1°. cot. CAD = cos. AC tang. C, (VI. 3°);

2°. sin. BAD = sin. CAD $\times \frac{\text{cos. B}}{\text{cos. C}}$, (1055);

3°. CAD ± BAD = A.

1135. Pourvu que l'on connaisse l'espèce de AB, (1129), on déterminera celle de BAD par l'analogie (1056), tang. AB : tang. AC :: cos. CAD : cos. BAD. Du reste, la règle du problème précédent, relative aux segmens de la base, s'applique de même aux segmens de l'angle vertical.

1136. J'ai réuni dans la table VII toutes les solutions *analytiques*, ainsi appelées, parce qu'elles contiennent dans une seule équation la valeur complète d'une ligne trigonométrique appartenant à quelqu'une des parties d'un triangle sphérique; laquelle valeur peut se substituer par conséquent dans les opérations analytiques, et conduire ainsi à des résultats très-utiles. Les formules 5°, 7°, 9°, 12°, 15°, 16°, 23°, 28°, 29°, 35°, 36° sont démontrées aux articles 1120, 1066, 1065, 1116, 1084, 1085, 1128, 1096, 1075, 1104, 1105. De ces formules sont tirées toutes les autres de la table, par de simples changemens de lettres (1066).

1137. La table III est beaucoup plus étendue : on aurait pu de même augmenter la table VII, en y insérant jusqu'à dix valeurs de chaque ligne trigonométrique; mais ces valeurs sont, pour la plupart, trop compliquées. Il sera facile, au surplus, de les former au besoin. Par exemple, outre les deux valeurs de sin. A que donne la table VII, quatre autres se trouvent en prenant dans cette même table les deux valeurs de cos. A et les substituant dans la formule (I. 3°), et les deux valeurs de tang. A et les substituant dans la formule (I. 5°). Les quatre dernières valeurs de sin. A demandent un peu plus de travail, parce qu'il faut les tirer des solutions trigonométriques des cas douteux (1124, 1134). Nous nous contenterons de rechercher l'une de ces valeurs.

Fig. 62. 1138. *Connaissant deux angles* B, C, *et un côté opposé* AC, *on demande l'expression analytique du sinus du troisième angle* A. C'est le cas de la solution (1134), dans laquelle, commençant par la troisième équation, et supposant de même espèce (1062) les angles donnés, nous aurons sin. A = sin. (CAD + BAD) = sin. CAD cos. BAD + cos. CAD sin. BAD. Éliminons BAD par le moyen de la deuxième équation (1134), en observant que cos. BAD $= \sqrt{(1 - \sin.^2 \text{BAD})}$; nous aurons $\sin. \text{A} = \sin. \text{CAD} \times \sqrt{\left(1 - \sin.^2 \text{CAD} \times \frac{\cos.^2 \text{B}}{\cos.^2 \text{C}}\right)} + \cos. \text{CAD} \sin. \text{CAD} \times \frac{\cos. \text{B}}{\cos. \text{C}}$. Il reste à éliminer CAD par le moyen de la première équation (1134), en observant d'ailleurs que $\sin. \text{CAD} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot.^2 \text{CAD})}}$, (I. 4°), et que $\cos. \text{CAD} = \frac{\cot. \text{CAD}}{\sqrt{(1 + \cot.^2 \text{CAD})}}$, (I. 20°), équations dans lesquelles on mettra, au lieu de cot. CAD, sa valeur prise

(1134), et qui donnent, après cette substitution, une valeur de sin. CAD, et une valeur de cos. CAD, qu'on substituera l'une et l'autre dans l'équation précédente. On aura alors sin. A $= \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang.}^2\text{C}\cos.^2\text{AC})}} \times \sqrt{\left(1-\frac{\cos.^2\text{B}}{\cos.^2\text{C}+\sin.^2\text{C}\cos.^2\text{AC}}\right)} + \frac{\cos.\text{B}}{\cos.\text{C}} \times \frac{\text{tang.C}\cos.\text{AC}}{\sqrt{(1+\text{tang.}^2\text{C}\cos.^2\text{AC})}} \times \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang.}^2\text{C}\cos.^2\text{AC})}}$, expression cherchée, qu'il ne s'agit plus que de simplifier. Écrivons partout $\frac{\sin.^2\text{C}}{\cos.^2\text{C}}$ au lieu de tang.^{2}C, $1-\sin.^2$AC au lieu de cos.^{2}AC, puis 1 au lieu de cos.^{2}C + sin.^{2}C, et sin.^{2}B au lieu de $1-\cos.^2$B, et nous aurons enfin

$$\sin.\text{A} = \frac{\cos.\text{C}\sqrt{(\sin.^2\text{B}-\sin.^2\text{C}\sin.^2\text{AC})}+\sin.\text{C}\cos.\text{B}\cos.\text{AC}}{1-\sin.^2\text{C}\sin.^2\text{AC}}.$$

En changeant C en B et B en C, on a aussitôt l'expression de sin. A pour le cas où les données sont B, C, AB.

En traitant de même la solution (1124), on trouvera les deux dernières des dix valeurs de sin. A.

Si on veut transférer aux triangles rectilignes la formule que nous venons de trouver, il faut faire alors sin.^{2}AC $=0$; car on a sin.^{2}AC $= 1 - \cos.^2$AC $= 1-1$, (1021). Il en est de même de sin.$^2 \frac{1}{2}$AB et de sin. $\frac{1}{2}$AB, dans les formules (1119) : et en général, si dans une formule sphérique il ne se trouve qu'un seul des côtés, il faut faire son sinus $=0$, ainsi que sa tangente; ce qui est conforme (I. 3°, 33°) à la règle (1021) de faire le cosinus $=1$.

1139. En terminant ce qui concerne la table VII, je ne puis omettre la solution d'un problème analytique assez curieux, et que je crois nouveau.

Trouver deux expressions égales et semblables, dont l'une comprenne trois parties d'un triangle sphérique, et l'autre les trois autres parties.

Puisque (VII. 10°) cos. B = cos. AC sin. A sin. C — cos. A cos. C, on a cos. AC cos. B = cos.^{2}AC sin. A sin. C — cos. A cos. C cos. AC. Donc (I. 18°), cos. AC cos. B + sin.^{2}AC sin. A sin. C = sin. A sin. C — cos. A cos. C cos. AC. Le second terme du premier membre, avec les valeurs (VII. 2°, 5°), devient sin. AB sin. BC sin.^{2}B, ou sin. AB sin. BC — sin. AB sin. BC cos.^{2}B. Le premier terme du même membre, avec la valeur

Fig. 62. (VII. 28°), devient sin. AB sin. BC cos.²B + cos. AB cos. BC cos. B. En sommant les deux termes, et les mettant en équation avec le second membre, je parviens à la solution qui suit :

sin. AB sin. BC + cos. AB cos. BC cos. B = sin. A sin. C — cos. A cos. C cos. AC.

Cette formule me sera très-utile dans le problème des aberrations (1535).

1140. La table VIII renferme les solutions *trigonométriques*, que je nomme ainsi, parce que ce sont les plus usitées dans le calcul numérique, et que ce sont celles que donnent tous les Auteurs de Trigonométrie. Cette table est disposée de manière à dispenser le Calculateur d'application et d'étude dans quelque cas que ce soit ; même de faire une figure, et de savoir la situation de la perpendiculaire. Il suffit qu'on se rappelle que le cosinus, la tangente et la cotangente de l'arc > 90° et < 180° sont négatifs. J'ai exposé (1062) la règle fondamentale d'après laquelle sont construites toutes mes solutions. Si on a la curiosité de savoir de quel côté tombe la perpendiculaire, elle est en dehors du triangle toutes les fois que l'on a ou la base moindre que son premier segment, ou l'angle vertical moindre que son premier segment.

1141. J'ai rassemblé dans la table IX les solutions de Neper, pour lesquelles le Calculateur n'aura de même besoin d'attention que relativement aux signes (73). On observera que dans le cas où l'on trouve le plus grand segment > 180°, la valeur qu'on obtient pour les segmens, en se conformant aux règles des signes, est alors relative non à la perpendiculaire qui tombe en dedans du triangle, mais au supplément de cette perpendiculaire.

L'arc *a* représente la somme des segmens quand la perpendiculaire (son supplément dans le cas ci-dessus) tombe en dehors ; leur différence, quand elle tombe en dedans.

Du Triangle isoscèle.

1142. Si le triangle est isoscèle, on le divise en deux triangles égaux et rectangles, par le moyen d'un arc perpendiculaire qui partage en deux parties égales et la base et l'angle vertical, comme on peut le conclure des analogies (1054, 1056); lesquelles ne sont insuffisantes que dans le seul cas de deux angles droits (1012), parce

qu'alors le triangle peut se partager par des arcs perpendiculaires, en autant de triangles inégaux qu'on le voudrait. On a par la table VI, les analogies suivantes qui résolvent tous les autres cas.

1°. Le sinus d'un *côté* est au sinus de la demi-*base* comme le rayon au sinus du demi-*angle vertical.*

2°. La tangente d'un *côté* est à la tangente de la demi-*base*, comme le rayon au cosinus d'*un angle sur la base.*

3°. Le cosinus d'un *côté* est à la cotangente du demi-*angle vertical*, comme le rayon à la tangente d'*un angle sur la base.*

4°. Le cosinus de la demi-*base* est au cosinus du demi-*angle vertical*, comme le rayon au sinus d'*un angle sur la base.*

De la mesure de la surface du Triangle sphérique.

1143. Pour trouver la surface d'un triangle sphérique quelconque ABC, prolongez un de ses côtés, par exemple BC, en décrivant le cercle entier BCEFB, qui représentera la moitié d'une sphère (964). Prolongez aussi les deux côtés AB, AC, d'une part jusqu'à la rencontre du cercle décrit, et de l'autre jusqu'à ce qu'ils concourent ensemble en un point D. Il est évident par cette construction, en vertu de laquelle BAE $=$ 180° $=$ CAF $=$ ABD $=$ ACD $=$ CBF $=$ BFE, (966), que le triangle AEF, placé sur l'hémisphère antérieur, est égal (998) au triangle BCD décrit sur l'hémisphère opposé. Appelons m la surface de chacun de ces deux triangles, x la surface cherchée du triangle ABC, n et p les surfaces des triangles CAE, BAF. On sait d'ailleurs que la surface de la sphère est égale à la circonférence d'un grand cercle, multipliée par le diamètre. Mettant donc $2R \times 360°$ au lieu de la *surface de la sphère* dans la proportion (1007), nous aurons le fuseau ABDCA, ou $x + m$, $= 2A \times R$; le fuseau BAECB, ou $x + n$, $= 2B \times R$; et le fuseau CBFAC, ou $x + p$, $= 2C \times R$; de sorte qu'en additionnant les trois équations, on a $3x + m + n + p = (A + B + C) \times 2R$. Mais il est clair, par la figure, que la moitié de la surface de la sphère, ou $2R \times 180°$, $= x + m + n + p$. Donc $2x + 2R \times 180° = (A + B + C) 2R$; et par conséquent Fig. 60.

$$x = (A + B + C - 180°) \times R.$$

Donc la *surface d'un triangle sphérique se trouve en retranchant*

Fig. 66. 180° *de la somme des trois angles, et multipliant le reste par le rayon de la sphère.*

Cette solution, extrêmement simple, est tirée de Wallis. Le résultat fait voir que l'aire d'un triangle sphérique est proportionnelle à l'excès des angles sur 180°.

1144. Il faut observer, pour le calcul de cette équation, que les deux facteurs du second membre doivent être des quantités de même espèce. Soit $(A + B + C - 180°) = D$; si on veut en degrés ou minutes, etc. la surface cherchée, on emploiera D en degrés ou minutes, et, pour le rayon, R° ou R′, etc. (631). Si l'on veut la surface en pouces ou pieds, etc., on prendra R en pouces ou pieds, etc., et on réduira D en pouces ou pieds par la proportion R° ou R′ : D° ou D′ :: R en pouces ou pieds : D en pouces ou pieds.

1145. Si on voulait *déterminer mécaniquement une surface plane égale à celle d'un triangle sphérique donné*, on s'y prendrait comme il suit. Du rayon de la sphère à laquelle appartient le triangle, on décrira un cercle; on marquera sur la circonférence de ce cercle un arc égal à la somme des trois angles du triangle donné. Des extrémités de cet arc on mènera deux diamètres. Il en naîtra quatre secteurs, de deux desquels, opposés et égaux, l'aire sera égale à l'aire sphérique proposée. Cette construction, qui est due à de Gua (*Mém. de l'Académ. des Sc., Paris*, 1783), m'a paru digne d'être répétée et répandue, tant pour sa singulière simplicité, qu'à cause de l'usage dont elle peut être pour la description des planisphères. J'y ajouterai seulement deux règles. La surface cherchée est égale aux deux moindres secteurs, lorsque la somme des trois angles n'excède pas 270°; et aux deux plus grands, si cette somme est entre 270° et 360°. Si elle passe cette dernière limite, alors il faut décrire deux cercles, dans chacun desquels on coupera une partie de circonférence égale à la demi-somme des angles, et opérant comme je viens de le dire pour la somme entière, on aura l'aire sphérique partagée en quatre secteurs égaux.

1146. *Étant donnés les trois côtés d'un triangle sphérique, trouver la somme des angles.*

Puisqu'il est nécessaire, pour déterminer l'aire d'un triangle sphérique, de connaître la somme des angles, le problème proposé

devient utile, quand on cherche l'aire, et qu'au lieu des angles on connaît les trois côtés.

Soit s la demi-somme des côtés a, b, c, opposés aux angles A, B, C. Puisque $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)=\cos.\frac{1}{2}(A+B)\cos.\frac{1}{2}C-\sin.\frac{1}{2}(A+B)\sin.\frac{1}{2}C=(\cos.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B-\sin.\frac{1}{2}A\sin.\frac{1}{2}B)\cos.\frac{1}{2}C-(\sin.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}B+\cos.\frac{1}{2}A\sin.\frac{1}{2}B)\sin.\frac{1}{2}C$; si on écrit dans le dernier membre les valeurs (VIII. 11°) de $\sin.\frac{1}{2}A$, de $\cos.\frac{1}{2}A$, et les valeurs analogues de $\sin.\frac{1}{2}B$, $\cos.\frac{1}{2}B$, $\sin.\frac{1}{2}C$, $\cos.\frac{1}{2}C$, on aura Fig. 67.

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\left(\sqrt{\frac{\sin.s\sin.(s-a)}{\sin.b\sin.c}}\sqrt{\frac{\sin.s\sin.(s-b)}{\sin.a\sin.c}}-\sqrt{\frac{\sin.(s-b)\sin.(s-c)}{\sin.b\sin.c}}\sqrt{\frac{\sin.(s-a)\sin.(s-c)}{\sin.a\sin.c}}\right)\sqrt{\frac{\sin.s\sin.(s-c)}{\sin.a\sin.b}}-\left(\sqrt{\frac{\sin.(s-b)\sin.(s-c)}{\sin.b\sin.c}}\sqrt{\frac{\sin.s\sin.(s-b)}{\sin.a\sin.c}}+\sqrt{\frac{\sin.s\sin.(s-a)}{\sin.b\sin.c}}\sqrt{\frac{\sin.(s-a)\sin.(s-c)}{\sin.a\sin.c}}\right)\sqrt{\frac{\sin.(s-a)\sin.(s-b)}{\sin.a\sin.b}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin.s\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c)}}{\sin.a\sin.b\sin.c}\Big(\sin.s-\sin.(s-c)-\sin.(s-b)-\sin.(s-a)\Big).$$

Mais (II. 23°, 19°), $\sin.s-\sin.(s-c)=2\sin.\frac{1}{2}c\cos.(s-\frac{1}{2}c)=2\sin.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}(a+b)$; et $\sin.(s-b)+\sin.(s-a)=2\sin.\big(s-\frac{1}{2}(a+b)\big)\cos\frac{1}{2}(a\backsim b)=2\sin.\frac{1}{2}c\cos.\frac{1}{2}(a\backsim b)$. Donc $\sin.s-\sin.(s-c)-\sin.(s-b)-\sin.(s-a)=-2\sin.\frac{1}{2}c\big(\cos.\frac{1}{2}(a\backsim b)-\cos.\frac{1}{2}(a+b)\big)=-2\sin.\frac{1}{2}c\times 2\sin.\frac{1}{2}b\sin.\frac{1}{2}a$, (II. 17°). Donc $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)=-\frac{4\sin.\frac{1}{2}a\sin.\frac{1}{2}b\sin.\frac{1}{2}c}{\sin.a\sin.b\sin.c}\sqrt{\sin.s\times\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c)}$. Or $\sin.a=2\sin.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}a$; $\sin.b$ et $\sin.c$ se transforment de même. Donc enfin

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\frac{\sqrt{\sin.s\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c)}}{2\cos.\frac{1}{2}a\cos.\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}c},$$

De Gua (*loc. cit.*) parvient à une autre formule qui contient la valeur de la tangente de la demi-somme des angles. Cette formule est bien moins commode à calculer, ayant pour numérateur $1+\cos.a+\cos.b+\cos.c$, et pour dénominateur le double de mon numérateur.

1146.* *Connaissant deux côtés et l'angle compris, déterminer l'aire d'un triangle sphérique.*

Soient donnés les côtés b, c, et l'angle A; et soit x l'aire cher-

Fig. 67. chée. Nous avons (1143), $\cot.\frac{x}{2R} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(A+B+C) =$ $\text{tang.}\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\overline{B+C}) = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}A + \text{tang.}\,\frac{1}{2}(B+C)}{1 - \text{tang.}\,\frac{1}{2}A\ \text{tang.}\,\frac{1}{2}(B+C)}$. Substituons la valeur (1094) de $\text{tang.}\,\frac{1}{2}(B+C)$, et multiplions par $\cos.\frac{1}{2}(c+b)$ les deux termes de la fraction ; nous aurons $\cot.\frac{x}{2R} = \ldots\ldots$

$$\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}(c+b) + \cot.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}(c\backsim b)}{\cos.\frac{1}{2}(c+b) - \cos.\frac{1}{2}(c\backsim b)} = (\text{II. }3^{\circ}, 4^{\circ}; \text{ et I. }31^{\circ})$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A\,(\cot.\tfrac{1}{2}c\cot.\tfrac{1}{2}b - 1) - \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}A\,(\cot.\tfrac{1}{2}c\cot.\tfrac{1}{2}b + 1)$$

$$= -\cot.\tfrac{1}{2}c\cot.\tfrac{1}{2}b\,(\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}A) + \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}A -$$

$$\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}A = (\text{I. }9^{\circ}, 38^{\circ}) - \frac{\cot.\frac{1}{2}c\cot.\frac{1}{2}b}{\sin.A} - \cot.A = \ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{\cot.\frac{1}{2}c\cot.\frac{1}{2}b + \cos.A}{\sin.A}.$$

De la détermination du Périmètre et de la Perpendiculaire.

1147. *Connaissant les trois angles, trouver le périmètre.*

Nommant S la demi-somme des angles, la formule (1146) se réduit, au moyen du triangle supplémentaire, à la suivante qui donne sans difficulté la solution demandée ;

$$\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sqrt{-\cos.S\cos.(S-A)\cos.(S-B)\cos.(S-C)}}{2\sin.\frac{1}{2}A\sin.\frac{1}{2}B\sin.\frac{1}{2}C}.$$

1148. *Connaissant les trois côtés, trouver l'arc perpendiculaire sur l'un quelconque de ces côtés.*

Fig. 62. Nous avons (VIII. 11°), $2\sin.\frac{1}{2}B\cos.\frac{1}{2}B = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{2\sqrt{\sin.s\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c)}}{\sin.a\sin.c} = \sin.B$, (I. 6°). Mais (VI. 6°), $\sin.B = \frac{\sin.AD}{\sin.AB} = \frac{\sin.AD}{\sin.c}$. Donc

$$\sin.AD = \frac{2\sqrt{\sin.s.\sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c)}}{\sin.a}.$$

Changeons le dénominateur en $\sin.b$, ou en $\sin.c$, et cette même formule donnera respectivement la valeur du sinus de la perpendiculaire sur AC ou sur AB.

1149. *Connaissant les trois angles, trouver la même perpendiculaire.*

Au moyen du triangle supplémentaire, la formule ci-dessus se convertit en la suivante, qu'on trouverait directement par la méthode que nous venons d'employer :

$$\sin. AD = \frac{2\sqrt{-\cos. S \cos. (S-A) \cos. (S-B) \cos. (S-C)}}{\sin. A}.$$

Observez que la perpendiculaire dans un triangle sphérique a pour supplément dans le triangle supplémentaire, la perpendiculaire tombant du même côté, c'est-à-dire sur le côté supplémentaire de l'angle duquel est abaissée la perpendiculaire dans le premier triangle ; ce qui se démontre facilement par l'équation sin. AD = sin. AB sin. B. Par exemple, la perpendiculaire qui de l'angle A Fig. 55. tombe sur le côté BC, a pour supplément celle qui de l'angle F, supplément de BC, tombe sur le côté DE, supplément de A.

Exemples du calcul des Triangles obliquangles.

1150. EXEMPLE I. Connaissant la longitude et la latitude géographique (1009) de deux lieux, comme Pétersbourg et la Conception, ville du Chili, on demande l'arc de la Terre supposée sphérique, intercepté entre ces deux villes, ou, ce qui revient au même, leur distance.

Longitude de Pétersbourg comptée du méridien de Paris et à l'orient...........................	27°	59′	30″	
Longitude de la Conception, occident de Paris,	75	0	0	
Différence de longitude entre Pétersbourg et la Conception.....................................	102	59	30	
Latitude septentrionale de Pétersbourg.........	59	56	0	
Latitude méridionale de la Conception.........	36	42	53	
Soit donc (1009), A le pôle, et l'angle A =	102	59	30	Fig. 57.
B la Conception, et .... AB =	126	42	53	
D Pétersbourg, et .... AD =	30	4	0	

On cherche BD ; et c'est le cas de la solution (VIII. 8°). Je nomme AB la *base*, et AD le *côté donné*, et j'ai

Fig. 57.

log. — cos. A = 9,351814	log. cos. AD = 9,937238
log. tang. AD = 9,762606	comp. log. — cos. I seg. = 0,005647
log. — tang. I seg = 9,114420	log. cos. II segment = 9,842787
Donc I segm. = 172° 35′ 6″	log. — cos. BD = 9,783672
Base = 126 42 53	
Diff. ou II seg. = 45 52 13	Donc BD = 127° 25′ 18″

La distance cherchée est donc, à très-peu-près, de 7645 milles géographiques, de 60 au degré.

Pour faire d'autant plus promptement ce calcul, il est à propos de chercher et d'écrire, immédiatement l'un après l'autre, le log. de tang. AD, et celui de cos. AD; ainsi que le complément de log. cos. I segm., immédiatement après avoir trouvé la valeur de ce segment.

1151. Exemple II. Résolvons le même problème, en prenant AD pour la *base*, AB pour le *côté donné*.

log. — cos. A = 9,351814	log. — cos AB = 9,776578
log. — tang. AB = 10,127391	compl. log. cos. I segm. = 0,018886
log. tang. I segm. = 9,479205	log. cos. II segment = 9,988208
I segment. = 16° 46′ 30″	log. — cos. BD = 9,783672
Base = 30 4 0	Et c'est ce que nous venons de
Diff. ou II seg. = 13 17 30	trouver tout-à-l'heure.

On voit quelle est l'exactitude et la facilité de nos règles, qu'on pourra comparer avec celles que donne La Caille pour le même cas (*Élémens d'Astronomie*, *Traité préliminaire*, art. VI, problème X).

1152. Exemple III. Retournons le problème. *Connaissant la distance et les latitudes géographiques de deux lieux, trouver la différence de leurs longitudes.*

Ce problème est utile dans la navigation. Car si l'on suppose qu'un Pilote connaisse les longitude et latitude du lieu d'où il est parti, qu'il a tenu compte (542) de la route parcourue, et qu'il a observé la latitude (ou la hauteur du pôle) pour le point du globe où il se trouve; il ne lui reste plus, pour connaître exacte-

ment la situation de ce point, (1009), qu'à déterminer, au moyen de ces données, le chemin qu'il a fait en longitude: et c'est l'objet du problème que nous allons résoudre.

Soit donc BD la route déjà faite, AB le complément de la latitude du lieu de départ B, AD le complément de celle du point D où se trouve le vaisseau. Connaissant ces trois côtés du triangle ABD, on cherche l'angle au pôle, A, qui est la différence entre la longitude connue du méridien AB, et la longitude cherchée du méridien AD.

J'emploie pour résoudre ce cas, la première formule (VIII. 11°): j'appelle a le côté BD opposé à l'angle cherché, b et c les deux autres, à volonté; et je suppose

$a =$	37°	24′	46″
$b =$	41	9	0
$c =$	71	50	0
somme	150	3	46
demi-somme ou $s =$	75	1	53
$s - b =$	33	52	53
$s - c =$	3	31	53

Après ces préparations indiquées par la formule, je trouve

log. sin. $(s - b) =$	9,746226
log. sin. $(s - c) =$	8,789548
compl. log. sin. $b =$	0,181753
compl. log. sin. $c =$	0,023043
somme	8,740570
demi-somme ou log. sin. $\frac{1}{2}$ A $=$	9,370285

Ce log. répond à sin. 13° 54′ 0″; donc A = 27° 8′.

Pour s'exercer, on pourra chercher le même angle par la seconde formule (VIII. 11°).

1153. Exemple IV. Ayant les mêmes données, cherchons le même angle par la solution (IX. 7°).

Soit donc BD = 37° 24′ 46″, AD = 41° 9′, AB = 71° 50′. Je nomme *base* le côté AD, simplement *côtés* les deux autres : j'ai $\frac{1}{2}$ AD = 20° 34′ 30″; $\frac{1}{2}$(AB + BD) = 54° 27′ 23″; $\frac{1}{2}$(AB − BD) = 17° 2′ 37″. Donc

Fig. 57.

$$\begin{aligned}\text{log. tang. demi-somme des côtés} &= 0{,}146033\\ \text{log. tang. demi-différence des côtés} &= 9{,}486520\\ \text{log. cot. } \tfrac{1}{2} \text{ base} &= 0{,}425532\\ \hline \text{log. tang. } \tfrac{1}{2} a &= 0{,}058085\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2}a = 48° 49' 12'' \frac{1}{2}$. Dans le calcul de la quatrième équation (IX. 7°), je dois employer le segment et le côté adjacens à l'angle cherché : or AD étant la base, le seul côté adjacent à l'angle cherché est AB ; et comme AB est plus grand que l'autre côté BD, je dois, d'après la règle de la table, relativement à ce cas, employer avec AB le grand segment. C'est donc de ce segment seul que je m'occupe, et j'ai : grand segment $= 20° 34' 30'' + 48° 49' 12'' \frac{1}{2} = 69° 23' 42'' \frac{1}{2}$. J'ai ensuite

$$\begin{aligned}\text{log. tang. } 69° 23' 42'' \tfrac{1}{2} &= 0{,}424844\\ \text{log. cot. } 71° 30' &= 9{,}524520\\ \hline \text{log. cos. A} &= 9{,}949364\end{aligned}$$

Donc $A = 27° 8' 0''$, comme nous l'avons trouvé dans l'exemple III. Si l'on veut refaire le calcul de cet exemple, en prenant AB pour base, on retrouvera le même log. pour cos. A.

1154. EXEMPLE V. Ayant les mêmes données que dans l'exemple IV, cherchons l'angle D. Puisqu'il est, ainsi que A dans l'exemple précédent, adjacent à AD que nous avions pris et prenons encore pour la base, le calcul déjà fait de la 1° équation (IX. 7°) sera le même dans cet exemple-ci. Le côté adjacent à l'angle cherché sera BD < AB ; donc dans la 4° équation (IX. 7°) il faut employer le petit segment. Or on a : petit segm. $= 20° 34' 30'' - 48° 49' 12'' \frac{1}{2} = -28° 14' 42'' \frac{1}{2}$. Et la tangente de cet arc négatif sera négative.

$$\begin{aligned}\text{log.} - \text{tang. } 28° 14' 42'' \tfrac{1}{2} &= 9{,}730144\\ \text{log. cot. } 37\ 24\ 46 \quad &= 0{,}116389\\ \hline \text{log.} - \text{cos. D} &= 9{,}846533\end{aligned}$$

Et par conséquent $D = 154° 36' 47'', 3$.

1155. Un Auteur très-connu, employant les mêmes valeurs pour AB, AD et A, calcule cet angle D au moyen de la formule (VII. 17°), (dans laquelle je suppose D au lieu de C), et le

donne de 45° 23′ 14″, c'est-à-dire aigu. Il n'a pas fait attention que cos. AD cos. A est > sin. AD cot. AB, et que la quantité négative étant la plus grande dans le dénominateur, tang. D est nécessairement aussi une quantité négative. Cette méprise ne mériterait pas d'être relevée, si le même auteur n'annonçait pas, avant de donner le calcul du problème, que l'angle cherché doit être aigu, et s'il n'ajoutait pas que c'est par cette raison qu'il prend cos. AD cos. A avec un signe négatif. Quel que soit le triangle ABD qne l'on considère, jamais la règle suivante ne sera en défaut : *Le signe de* cos. AD cos. A *ne dépend nullement de l'espèce de l'angle* D, *mais seulement de l'espèce de* AD *et de celle de* A; *et il sera toujours négatif quand* AD *et* A *seront de même espèce.* Si cet Auteur justement estimé a pu se tromper ainsi relativement aux signes, cela prouve assez, du moins à mon avis, que l'espèce d'analyse algébrique très-compliquée dont il a fait usage pour construire les formules de la table VII, expose plus à des erreurs que l'analyse trigonométrique que j'ai adoptée dans cet Ouvrage, employée suivant les règles que j'ai données (1062). On peut comparer ces deux méthodes relativement à la formule (VII. 17°) : pour la construire par le moyen de l'analyse algébrique en question, il faut considérer treize lignes dans l'intérieur de la sphère, et les distribner dans quatre analogies : il est aisé de juger combien dès-lors la figure et le calcul doivent être compliqués, et l'on peut voir combien l'une et l'autre sont simples dans la méthode que j'ai suivie (1084). Aussi ai-je omis presque entièrement dans ce Traité la considération des lignes intérieures de la sphère, qui ne m'a paru fournir que des solutions pénibles, du moins pour les problèmes que j'ai rencontrés.

L'exemple suivant démontrera encore que dans le triangle dont il s'agit, Exemp. IV et V, l'angle D est réellement obtus, ainsi que nous l'avons trouvé en faisant usage des règles de la table IX.

1156. Exemple VI. Connaissant AB = 71° 30′, AD = 41° 9′, A = 27° 8′, cherchons à-la-fois les deux autres angles du triangle ABD, au moyen des formules très-expéditives de Neper (IX. 2°).

$\frac{1}{2}$A = 13° 34′, $\frac{1}{2}$(AB + AD) = 56° 19′ 30″, $\frac{1}{2}$(AB − AD) = 15° 10′ 30″. J'observe de plus, qu'en vertu de la règle (1005), D doit être > B; et je fais le calcul comme il suit :

Fig. 57. $\log. \cot. \frac{1}{2} A = 0{,}617425$ .... $0{,}617425$

$\log. \sin. \frac{1}{2}(AB - AD) = 9{,}417917$ .... log. cos. $9{,}984586$

compl. log. sin. $\frac{1}{2}(AB + AD) = 0{,}079774$ .. compl. log. cos. $0{,}256113$

$\log. \tan. \frac{1}{2}(D - B) = 0{,}115116$; $\log. \tan. \frac{1}{2}(D + B) = 0{,}858124$

Donc $\frac{1}{2}(D + B) = 82^\circ\ 6'\ 25'', 4$

$\frac{1}{2}(D - B) = 52\ \ 30\ \ 22, 0$

Donc $D = 134\ \ 36\ \ 47, 4$

et $B = 29\ \ 36\ \ 3, 4$;

résultat qui prouve la précision des règles employées dans l'exemple V. S'il y a un dixième de seconde de différence entre les calculs des exemples V et VI, c'est que nous avons pris les logarithmes avec six décimales seulement; avec une seule décimale de plus, les deux calculs donneraient absolument la même valeur pour l'angle D.

1157. Je vais donner ici, comme je l'ai fait (613) pour les triangles rectilignes, quelques théorèmes et problèmes, relatifs aux figures sphériques circonscrites par des cercles.

THÉORÈME. *Si deux arcs de grand cercle, terminés par un cercle petit ou grand, se coupent l'un l'autre, le rectangle des tangentes des demi-segmens de l'un est égal au rectangle des tangentes des demi-segmens de l'autre.*

Fig. 68. Soient AB, DE les deux arcs, qui se coupent en F, et se terminent à la circonférence ADBE, dont le pôle est C. De ce pôle on décrira les arcs CA, CE, CF, et les perpendiculaires CH, CG.

Les triangles rectangles CGF, CGA, qui ont le côté commun CG, donnent (1054), cos. CF : cos. CA :: cos. GF : cos. GA. De même dans les triangles CHF, CHE, cos.CF : cos.CE :: cos.HF : cos. HE. Mais parce que CA = CE, le premier rapport est le même dans les deux proportions. Donc cos.GF : cos.GA :: cos. HF : cos. HE; ou (II. 14°), $\cot. \frac{1}{2}(GA + GF) : \tan. \frac{1}{2}(GA - GF) :: \cot. \frac{1}{2}(HE + HF) : \tan. \frac{1}{2}(HE - HF)$. De plus, parce que dans les triangles isoscèles l'arc perpendiculaire coupe la base en deux parties égales (1142), on a $GA + GF = GB + GF = BF$; et de même, $HE + HF = DH + HF = DF$. Par conséquent $\cot. \frac{1}{2}BF : \tan. \frac{1}{2}AF :: \cot. \frac{1}{2}DF : \tan. \frac{1}{2}EF$; ou

$$\tan. \tfrac{1}{2}AF\ \tan. \tfrac{1}{2}BF = \tan. \tfrac{1}{2}DF\ \tan. \tfrac{1}{2}EF.$$

1158. THÉORÈME. *Les sommes des angles opposés d'un quadrilatère sphérique inscrit dans un petit cercle, sont égales entre elles.*

Soit P le pôle du cercle circonscrit au quadrilatère ABCD. Fig. 69. On a $PA = PB = PC = PD$. Or $B + D = m + n + r + s$. Mais de même $A + C = m + r + n + s$, puisque les triangles APB, APD, etc. sont isoscèles. Donc $A + C = B + D$.

1159. THÉORÈME. *Si on inscrit à un petit cercle un quadrilatère sphérique avec ses diagonales, le rectangle des sinus des demi-diagonales égale la somme des rectangles des sinus des moitiés des côtés opposés.*

Le cercle est omis dans la figure. ABCD est le quadrilatère Fig. 70. supposé inscrit; AC, BD sont les deux diagonales, arcs de grand cercle. Chacun des six arcs est supposé sous-tendu par sa corde, que je désignerai par les mêmes lettres que l'arc, mais minuscules, nommant ac la corde de l'arc AC, bc celle de l'arc BC, etc. Or il a été démontré (613), que $ac \times bd = bc \times ad + ab \times cd$. Donc (31), $2\sin.\frac{1}{2}AC \times 2\sin.\frac{1}{2}BD = 2\sin.\frac{1}{2}BC \times 2\sin.\frac{1}{2}AD + 2\sin.\frac{1}{2}AB \times 2\sin.\frac{1}{2}CD$; et, en divisant par 4,

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC \sin.\tfrac{1}{2}BD = \sin.\tfrac{1}{2}BC \sin.\tfrac{1}{2}AD + \sin.\tfrac{1}{2}AB \sin.\tfrac{1}{2}CD.$$

1160. PROBLÈME. *Exprimer une des diagonales par les côtés du quadrilatère sphérique inscrit.*

Les conditions subsistant, telles que dans le théorème précédent, et étant démontré (614) que $ac = \sqrt{\frac{(ab.ad + bc.cd)\,(ab.cd + ad.bc)}{ab.bc + ad.cd}}$, j'en conclus que

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{\frac{(\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AD + \sin.\frac{1}{2}BC \sin.\frac{1}{2}CD)\,(\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}CD + \sin.\frac{1}{2}AD \sin.\frac{1}{2}BC)}{\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}BC + \sin.\frac{1}{2}AD \sin.\frac{1}{2}CD}}.$$

1161. PROBLÈME. *Connaissant les trois angles, trouver leur distance du pôle du petit cercle qui circonscrit le triangle.*

Soit AP la distance cherchée; soit aussi PF perpendiculaire Fig. 71. sur AC, ce qui donne $AF = FC$, parce que $AP = PC$. On aura (VI. 10°), $\text{tang.}\,AP = \frac{\text{tang.}\,AF}{\cos.\,PAF}$. Mais (1147), $2S = A + B + C = 2PBA + 2PBC + 2PAC = 2B + 2PAC$; d'où PAF

Fig. 71. $= S - B$. Donc $\text{tang. AP} = \frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}\text{AC}}{\cos.(S-B)}$. De plus, $\text{tang}\ \frac{1}{2}\text{AC} = \frac{\sin.\frac{1}{2}\text{AC}}{\cos.\frac{1}{2}\text{AC}} = \sqrt{-\frac{\cos.S\cos.(S-B)}{\cos.(S-A)\cos.(S-C)}}$, (VIII. 12°). Donc

$$\text{tang. AP} = \sqrt{\frac{-\cos.S}{\cos.(S-A)\cos.(S-B)\cos.(S-C)}}.$$

1162. Problème. *Trouver la même distance, les trois côtés étant donnés.*

Soit PE perpendiculaire sur AB, et AD sur BC. On aura $\sin.\text{EPF} = \sin.\text{EPA}\ \cos.\text{APF} + \cos.\text{EPA}\ \sin.\text{APF} = \frac{\sin.\text{AE}}{\sin.\text{AP}} \times \cos.\text{AF}\ \sin.\text{PAF} + \cos.\text{AE}\ \sin.\text{PAE} \times \frac{\sin.\text{AF}}{\sin.\text{AP}}$, (VI. 6°, 12°). Mais comme (VI. 2°) $\text{tang. AE} = \text{tang. AP}\ \cos.\text{PAE}$, $\text{tang. AF} = \text{tang. AP}\ \cos.\text{PAF}$; ce qui donne $\frac{\sin.\text{AE}}{\sin.\text{AP}} = \frac{\cos.\text{AE}\cos.\text{PAE}}{\cos.\text{AP}}$, et $\frac{\sin.\text{AF}}{\sin.\text{AP}} = \frac{\cos.\text{AF}\cos.\text{PAF}}{\cos.\text{AP}}$. Par la substitution de ces valeurs on obtient $\sin.\text{EPF} = \frac{\cos.\text{AE}\cos.\text{AF}}{\cos.\text{AP}}(\sin.\text{PAF}\ \cos.\text{PAE} + \cos.\text{PAF}\ \sin.\text{PAE}) = \frac{\cos.\text{AE}\cos.\text{AF}\sin.\text{BAC}}{\cos.\text{AP}}$. Or $\text{AE} = \frac{1}{2}\text{AB}$, $\text{AF} = \frac{1}{2}\text{AC}$, $\text{EPF} = \frac{1}{2}\text{BPA} + \frac{1}{2}\text{APC} = 180° - \frac{1}{2}\text{BPC}$. Donc $\sin.\frac{1}{2}\text{BPC}\ \cos.\text{AP} = \cos.\frac{1}{2}\text{AB}\ \cos.\frac{1}{2}\text{AC}\ \sin.\text{A}$. On prouvera de même que $\sin.\frac{1}{2}\text{APC}\ \cos.\text{AP} = \cos.\frac{1}{2}\text{AB}\ \cos.\frac{1}{2}\text{BC}\ \sin.\text{B}$. Mais $\sin.\frac{1}{2}\text{APC} = \frac{\sin.\text{AF}}{\sin.\text{AP}}$, et $\sin.\text{B} = \frac{\sin.\text{AD}}{\sin.\text{AB}}$. Donc $\sin.\text{AF}\ \cot.\text{AP}\ \sin.\text{AB} = \cos.\frac{1}{2}\text{AB}\ \cos.\frac{1}{2}\text{BC}\ \sin.\text{AD}$, ou $\sin.\frac{1}{2}\text{AC} \times 2\sin.\frac{1}{2}\text{AB} = \text{tang AP}\ \cos.\frac{1}{2}\text{BC}\ \sin.\text{AD}$. Prenons (1148) la valeur de sin. AD; nous aurons, en la substituant, $2\sin.\frac{1}{2}\text{AB}\ \sin.\frac{1}{2}\text{AC}\ \sin.\text{BC} = \text{tang. AP}\ \cos.\frac{1}{2}\text{BC} \times 2\sqrt{\sin.s\ \sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c)}$; d'où

$$\text{tang. AP} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\text{AB}\ \sin.\frac{1}{2}\text{AC}\ \sin.\frac{1}{2}\text{BC}}{\sqrt{\sin.s\ \sin.(s-a)\sin.(s-b)\sin.(s-c)}}.$$

CHAPITRE XIX.

Résolution des Triangles sphériques par la Règle et le Compas.

1163. L'INVENTION des logarithmes a rendu la résolution des triangles si précise et si prompte, que les Géomètres ne tiennent plus aucun compte, pour ainsi dire, des opérations graphiques, sujettes à des erreurs de plusieurs minutes, quelque attention, quelque soin qu'on y apporte. Cependant, comme cette espèce de solutions peut être utile dans certains cas qui n'exigent pas une exactitude rigoureuse, ou pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec le calcul, je ne laisserai pas de les indiquer en peu de mots, et sans faire usage de la méthode des projections, pour mettre ces solutions à la portée d'un plus grand nombre de Lecteurs.

1164. Soient *donnés les trois côtés* d'un triangle sphérique ABC; par exemple AB de $71° \frac{1}{2}$, AC de $41° \frac{1}{4}$, et BC de $37° \frac{1}{2}$. On demande la valeur de l'angle C.

Décrivez un cercle entier *nac*M, le plus grand qu'il sera possible; puis, au moyen d'un rapporteur ou demi-cercle (703), ou de l'échelle des cordes d'un compas de proportion, ou par tel autre moyen que vous voudrez, coupez, sur la circonférence du cercle décrit, et d'un point *c* pris à volonté sur cette circonférence, les arcs *cb*, *ca* respectivement égaux aux côtés donnés BC, AC qui comprennent l'angle cherché. Marquez de même, du côté opposé, un arc *c*M égal à l'un quelconque des côtés *cb*, *ca*, par exemple à *cb*, et menez la corde M*b*. Alors de l'extrémité *a* de l'autre *ca* de ces mêmes côtés, marquez les arcs *an*, *a*N égaux chacun au troisième côté donné AB; menez la corde *n*N qui coupera (989, 990) l'autre corde *b*M en un point comme P. Enfin prenez la moitié Fig. 70

Fig. 72. MD de cette dernière, du point D décrivez le demi-cercle M R b; élevez jusqu'à sa rencontre la perpendiculaire PR, et menez le rayon RD : l'angle bDR sera égal à l'angle cherché C. Cet angle bDR se mesure ensuite ou avec le rapporteur ou avec l'échelle des cordes, en ayant égard à la valeur du rayon DR, ou de telle autre manière qu'on voudra.

1165. Actuellement si on veut avoir l'angle A opposé au côté $BC = bc$, il suffit de prendre la moitié de Nn, et de couper l'autre corde Mb en décrivant un arc d'un rayon égal à cette moitié, et du point R pour centre En supposant que E soit le point de la section, l'on mènera la ligne RE, et l'on aura DER égal à l'angle cherché A.

Si l'on voulait l'angle B, il faudrait changer la construction, et faire, pour déterminer cet angle, toutes les opérations que nous avons faites pour trouver l'angle C.

1166. Nous verrons bientôt que la construction de la figure 72 suffit pour résoudre tous les cas non douteux des triangles sphériques. Il est donc à propos d'expliquer les principes de cette construction.

Si l'on conçoit que le demi-segment cDb fasse une révolution autour de la droite Dc, la base de la calotte sphérique engendrée par cette révolution, sera un cercle ayant Db pour rayon, c pour pôle, et D pour centre. La demi-circonférence de ce cercle sera donc $=$ MRb, et appartiendra à la surface de la sphère. Imaginons de même un autre cercle décrit sur la surface de la sphère, du pôle a et de l'intervalle $an = a$N ; Nn sera évidemment le diamètre de ce cercle. Or les diamètres Mb, Nn se coupant en un point P, il faut que les circonférences auxquelles ils appartiennent respectivement, se coupent en un point R ; le point P ne pouvant être commun aux diamètres, que l'ordonnée PR ne soit commune aux circonférences. Si donc an est la distance du point R au point a sur la surface de la sphère, et cb la distance du point c au point R, que l'on conçoive un triangle acR sur la surface de la sphère, et on reconnaîtra que par la construction il est égal au triangle donné ABC. L'angle cherché C est l'angle acR, qui est du même nombre de degrés (985) que l'arc de parallèle bR. Mais $b\text{R} = \text{D}$: donc $\text{D} = \text{C}$, comme il fallait le démontrer.

Considérons maintenant que dans le triangle rectiligne RDE, ER : DR :: sin. D : sin. DER, (89). Mais par construction ER $= \frac{1}{2}$ N*n* = sin. *an* (31) = sin. AB; de même DR = $\frac{1}{2}$ M*b* = sin. *cb* = sin. BC. De plus nous venons de voir que D = C. Donc l'analogie devient sin. AB : sin. BC :: sin. C : sin. DER; et par conséquent (VII. 1°), DER = A, comme nous l'avons avancé (1165).

1167. Nous avons vu (1164) comment, connaissant les trois côtés, on trouve un angle. *Si les données étaient les trois angles*, on aurait par la même construction la valeur d'un côté, en faisant usage du triangle supplémentaire, c'est-à-dire en employant le supplément à 180°, de chacun des angles donnés. Pour cet effet on nommera BC l'angle A, AC l'angle B, et AB l'angle C, (1043). Alors si le côté cherché est, par exemple, BC, on cherchera, au lieu de ce côté, l'angle A, dont le supplément sera la valeur du côté cherché BC.

1168. *Si deux côtés et l'angle compris étaient donnés*, on trouverait le troisième côté et l'un quelconque des deux autres angles, de la manière suivante :

Sur la circonférence *nac*M on prendrait deux arcs *cb*, *ca*, égaux aux côtés donnés : nommant *cb* le côté opposé à l'angle cherché, on tirerait (1164) la corde M*b*, et de l'extrémité *a* de l'autre côté *ca*, le rayon *am*, *m* étant le centre du cercle *nac*M. Sur M*b* on décrirait le demi-cercle MR*b*, dont on prendrait, du côté des arcs *cb*, *ca*, un arc *b*R égal à l'angle donné. Enfin abaissant du point R la perpendiculaire RP, menant le rayon DR, et faisant passer par le point P une corde N*n* perpendiculaire à *am*, on aurait *a*N ou *an* pour la mesure du côté inconnu dans le triangle proposé.

Prenant ensuite la ligne RE égale à la moitié de N*n*, (1165), on aurait DER égal à l'angle cherché.

1169. *Si les données sont deux angles et le côté compris*, on aura le troisième angle et l'un quelconque des deux autres côtés, en prenant les supplémens des angles et du côté donnés, moyen déjà employé (1167), et en résolvant le triangle de la manière indiquée (1168). Le supplément du côté qu'on trouvera sera l'angle cherché; le supplément de l'angle qu'on trouvera sera le côté cherché.

1170. Je ne parlerai pas de la manière de résoudre le triangle, lorsque les données sont deux côtés et un angle opposé, ou deux angles et un côté opposé : 1°. parce que ce sont les cas douteux ; 2°. parce que, dans la pratique, ces cas se rencontrent moins fréquemment ; 3°. parce que leur solution graphique est beaucoup plus laborieuse que les précédentes, et que, pour ces cas, je ne crois pas que ce genre de solution puisse jamais être préféré au calcul numérique qui, pour la solution quelconque d'un triangle sphérique, n'exige jamais plus de cinq minutes de temps, si l'on ne tient compte que des degrés et minutes de degrés, et qui atteint toujours à une précision bien supérieure à celle qu'on peut obtenir avec la règle et le compas.

CHAPITRE XX.

Comparaison des Triangles sphériques aux Triangles rectilignes.

1171. 1°. Nous comparerons le triangle sphérique au triangle rectiligne formé par les cordes des arcs ou côtés du premier ; comparaison qui peut-être n'a pas encore été faite, mais qui me paraît n'être pas déplacée dans un Traité sur les deux Trigonométries rectiligne et sphérique.

2°. Il est très-usité et très-commode de résoudre comme rectilignes les petits triangles sphériques rectangles ; or nous déterminerons pour tous les cas les limites auxquelles cette méthode peut s'étendre, au moyen d'une correction facile ; ce qui nous donnera lieu de comparer entre elles les formules des Trigonométries rectiligne et sphérique.

3°. En nous occupant de cette recherche, nous avons trouvé que, dans le cas où l'un des côtés de l'angle droit est un arc de petit cercle, ainsi qu'il arrive le plus souvent en Astronomie,

l'erreur sur l'angle droit, à laquelle je crois qu'on n'a pas fait attention jusqu'ici, peut influer sensiblement sur les résultats. Nous indiquerons les moyens d'éviter cette erreur.

1172. La différence de l'arc à sa corde peut se déterminer d'une manière aussi approchée qu'on le voudra par le moyen de la dernière équation (278). Si les arcs sont petits, ces différences sont, à très-peu-près, proportionnelles aux cubes des arcs, quand on se borne à l'approximation que donne le premier terme du second membre de cette équation. Pour l'arc de 1°, la différence est $0'',04569$, et son logarithme est 8,6598; auquel ajoutant le triple du log. d'un arc quelconque (pourvu qu'il n'excède pas 8°) exprimé en degrés et décimales de degrés, on aura le logarithme de la différence exacte de cet arc à sa corde en secondes et dixièmes de seconde. On peut encore multiplier par R°, ou par R', ou par R'', (631), le double du sinus de la moitié d'un arc quelconque (31); on aura la valeur de la corde en degrés, ou en minutes, ou en secondes; et cette valeur, comparée à celle de l'arc, donnera la différence cherchée.

1173. Pour déterminer la différence des angles sphériques aux angles rectilignes, proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Dans un triangle sphérique quelconque, connaissant deux côtés et l'angle compris, trouver l'angle rectiligne correspondant (J'entends par *angle correspondant*, l'angle formé par les cordes des deux côtés donnés).

Soit ABC un triangle sphérique, et *abc* le triangle rectiligne formé par les cordes des trois arcs. Le triangle sphérique donne (VII. 26e), Fig. 73.
$\cos. BC = \cos. A \sin. AB \sin. AC + \cos. AB \cos. AC$, ou (I. 22e), $1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} BC = \cos. A \sin. AB \sin. AC + (1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} AB)(1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} AC)$. Donc $2\sin.^2 \frac{1}{2} AB + 2\sin.^2 \frac{1}{2} AC - 2\sin.^2 \frac{1}{2} BC = \cos. A \sin. AB \sin. AC + 4\sin.^2 \frac{1}{2} AB \sin.^2 \frac{1}{2} AC$. Le triangle *abc* donne (III. 25e), $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \times ac \cos. a$. Mais $bc = 2\sin. \frac{1}{2} BC$, (31). En transformant ainsi les autres cordes, l'équation devient $4\sin.^2 \frac{1}{2} BC = 4\sin.^2 \frac{1}{2} AB + 4\sin.^2 \frac{1}{2} AC - 8\sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC \cos. a$, ou $2\sin.^2 \frac{1}{2} AB + 2\sin.^2 \frac{1}{2} AC - 2\sin.^2 \frac{1}{2} BC = 4\sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC \cos. a$. Substituant la valeur du premier membre, trouvée ci-dessus, j'aurai $\cos. A \sin. AB \sin. AC + 4\sin.^2 \frac{1}{2} AB \sin.^2 \frac{1}{2} AC = 4\sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC \cos. a$. En divisant

Fig. 73. par $4 \sin. \frac{1}{2}$ AB $\sin. \frac{1}{2}$ AC, et observant que sin. AB sin. AC $=$ $4 \sin. \frac{1}{2}$ AB cos. $\frac{1}{2}$ AB sin. $\frac{1}{2}$ AC cos. $\frac{1}{2}$ AC, (I. 6°), je trouve une formule très-simple pour la solution générale du problème proposé, et j'ai

$$(A)\ldots \cos. a = \cos. A \cos. \tfrac{1}{2} AB \cos. \tfrac{1}{2} AC + \sin. \tfrac{1}{2} AB \sin. \tfrac{1}{2} AC.$$

1174. De cette formule il est aisé de conclure 1°. que l'angle sphérique, droit ou obtus, est toujours plus grand que l'angle rectiligne correspondant. En effet, si $A = 90°$, $\cos. a = \sin. \frac{1}{2}$ AB sin. $\frac{1}{2}$ AC, quantité toujours positive. Si A est $> 90°$; ou le second membre reste positif, et a est $< 90°$; ou le second membre devient négatif, et alors sa valeur numérique (qui est celle de cos. a) sera toujours moindre que celle de cos. A, puisqu'elle est le résultat du produit de cos. A par la fraction cos. $\frac{1}{2}$ AB cos. $\frac{1}{2}$ AC, et qu'en outre, il y a soustraction de sin. $\frac{1}{2}$ AB sin. $\frac{1}{2}$ AC. Par conséquent (56), a est $<$ A.

2°. Que l'angle sphérique aigu est moindre que l'angle rectiligne correspondant, lorsqu'on a $\cos. A > \frac{\sin. \frac{1}{2} AB \sin. \frac{1}{2} AC}{1 - \cos. \frac{1}{2} AB \cos. \frac{1}{2} AC}$. En effet (48) soit $\cos. a < \cos. A$; on aura cos. A cos. $\frac{1}{2}$ AB cos. $\frac{1}{2}$ AC $+$ sin. $\frac{1}{2}$ AB sin. $\frac{1}{2}$ AC $<$ cos. A; d'où naît l'expression qui précède.

Fig. 74. 1175. Du reste, je ne dois pas omettre le théorème suivant.

P *étant le pôle du petit cercle qui circonscrit le triangle sphérique* ABC, *l'angle* a, *formé par les cordes des arcs* AB, AC, *est égal à* $\frac{1}{2}$P, *c'est-à-dire à la moitié de l'angle au pôle, opposé au troisième côté* BC.

Soit BMC une portion de la circonférence qui passe par les points A, B, C. Or cette portion est du même nombre de degrés (985, 975) que l'angle P; elle est de plus double de l'angle à la circonférence, formé par les cordes aB, aC, (d'après la XXe du IIIe d'Euclide). Donc, etc.

La facilité de cette démonstration ajoute encore à l'intérêt de ce Théorème. Lexell (*Mémoires de Pétersbourg*, 1782, pag. 64) a employé, pour y parvenir, une page entière d'analyse trigonométrique.

1176. De la formule (A), (1173), on passe aisément à la solution du problème inverse.

Dans un triangle rectiligne abc, *connaissant deux côtés et*

l'angle compris, trouver l'angle des deux arcs AB, AC, *dont les deux côtés donnés seraient les cordes.*

La formule (I. 18°) donne $\cos.\frac{1}{2}AB\cos.\frac{1}{2}AC = \sqrt{(1-\sin.^2\frac{1}{2}AB)}$ Fig. 73. $(1-\sin.^2\frac{1}{2}AC)$: on a d'ailleurs $\sin.\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}ab$, et $\sin.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}ac$. Substituons ces valeurs dans l'équation (A), et nous aurons

$$(B)\ldots\ \cos.A = \frac{\cos.a - \frac{1}{2}ab\times\frac{1}{2}ac}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}ab)(1+\frac{1}{2}ab)(1-\frac{1}{2}ac)(1+\frac{1}{2}ac)}}.$$

Pour calculer cette formule, il faut que les valeurs des côtés ab, ac soient telles qu'ils puissent être cordes d'un cercle ayant l'unité pour rayon. C'est ce qu'on obtiendra facilement en divisant les valeurs des côtés, données en mètres ou toises, ou autres mesures, par une puissance de 10, telle qu'aucun côté n'excède 2, valeur de la plus grande corde, quand on suppose $R = 1$.

1177. Si $AB = AC$, et que par conséquent $ab = ac$, les formules (A), (B) se réduisent aux suivantes (C), (D). En effet, dans ce cas, $\cos.a = \cos.A\cos.^2\frac{1}{2}AB + \sin.^2\frac{1}{2}AB$, et par conséquent (I. 22°, 5°), $1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}a = (1-2\sin.^2\frac{1}{2}A)\cos.^2\frac{1}{2}AB + 1 - \cos.^2\frac{1}{2}AB$; équation de laquelle on tire

$$(C)\ldots\ \sin.\tfrac{1}{2}a = \sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}AB.$$

Mais $\cos.\frac{1}{2}AB = \sqrt{(1-\sin.^2\frac{1}{2}AB)} = \sqrt{(1-\frac{1}{4}ab^2)}$. Donc

$$(D)\ldots\ \sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}ab)(1+\frac{1}{2}ab)}}.$$

La formule (C) fait voir que l'angle vertical d'un triangle sphérique isoscèle est toujours plus grand que l'angle rectiligne correspondant.

1178. Enfin si $A = 90°$, les formules (A), (B) donnent

$$(E)\ldots\ \cos.a = \sin.\tfrac{1}{2}AB\ \sin.\tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{4}ab\times\tfrac{1}{4}ac.$$

Toutes les formules que nous venons de donner sont générales et rigoureuses, quelle que soit la grandeur du triangle. Mais si un triangle sphérique rectangle est petit, on pourra mettre les arcs au lieu des sinus (627) dans la formule (E); et comme $\cos.a = \sin.(90° - a) = 90° - a$, le petit excès de l'angle droit sphérique sur l'angle rectiligne correspondant, sera donné en secondes par

Fig. 73. la formule suivante, qui suppose les arcs AB, AC pris en secondes :

$$(\mathrm{F})\ldots\ 90^\circ - a = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \frac{1}{2}\mathrm{AC}}{\mathrm{R}''}.$$

Quand la somme des côtés serait de 10°, l'erreur qu'occasionnerait cette formule ne serait pas d'une seconde.

1179. Si l'hypoténuse n'excède pas 1° 30′, on peut mettre BC sin. C au lieu de AB, et BC cos. C au lieu de AC, (537) ; ce qui donne $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = \mathrm{BC}^2 \sin. \mathrm{C} \cos. \mathrm{C} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}^2 \sin. 2(90^\circ - \mathrm{B}) = \frac{1}{2}\mathrm{BC}^2 \sin. 2\mathrm{B}$; de sorte que la différence cherchée se trouve aussi par la formule suivante :

$$(\mathrm{G})\ldots\ 90^\circ - a = \frac{(\frac{1}{2}\mathrm{BC})^2 \sin. 2\mathrm{C}}{2\mathrm{R}''} = \frac{(\frac{1}{2}\mathrm{BC})^2 \sin. 2\mathrm{B}}{2\mathrm{R}''}.$$

Si BC = 1° 30′, et que B = C = 45° à-peu-près, on trouve $90^\circ - a = 17'',7$.

1180. En supposant encore que l'hypoténuse n'excède pas 1° 30′, considérons les angles obliques B, C.

La formule (A) appliquée à l'angle B, par exemple, donne $\cos. b = \cos. \mathrm{B} \cos. \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cos. \frac{1}{2}\mathrm{BC} + \sin. \frac{1}{2}\mathrm{AB} \sin. \frac{1}{2}\mathrm{BC}$. Mais $\cos. \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cos. \frac{1}{2}\mathrm{BC} = (1 - 2\sin.^2 \frac{1}{4}\mathrm{AB})(1 - 2\sin.^2 \frac{1}{4}\mathrm{BC}) = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{4}\mathrm{AB} - 2\sin.^2 \frac{1}{4}\mathrm{BC}$, en négligeant la quantité $4\sin.^2 \frac{1}{4}\mathrm{AB} \sin.^2 \frac{1}{4}\mathrm{BC}$, qui dans notre hypothèse est absolument insensible. Substituant la dernière valeur de $\cos. \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cos. \frac{1}{2}\mathrm{BC}$, et mettant les arcs au lieu des sinus, on a $\cos. b = \cos. \mathrm{B} - \frac{1}{8}\cos. \mathrm{B}(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2) + \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \frac{1}{2}\mathrm{BC}$. Dans le dernier terme on peut mettre, sans erreur sensible, BC cos. B au lieu de AB : donc $\cos. b - \cos. \mathrm{B} = \frac{1}{8}\cos. \mathrm{B}(\mathrm{BC}^2 - \mathrm{AB}^2) = \frac{1}{8}\mathrm{AC}^2 \cos. \mathrm{B}$. De plus (II. 24°), $\cos b - \cos. \mathrm{B} = 2\sin. \frac{1}{2}(\mathrm{B} - b) \sin. \frac{1}{2}(\mathrm{B} + b) = (\mathrm{B} - b)\sin. \mathrm{B}$, attendu l'extrême petitesse de $\mathrm{B} - b$. Donc on aura, pour la différence de l'angle sphérique oblique à l'angle rectiligne correspondant,

$$(\mathrm{H})\ldots\ \mathrm{B} - b = \frac{(\frac{1}{2}\mathrm{AC})^2 \cot. \mathrm{B}}{2\mathrm{R}''}.$$

Et comme AC cot. B = AB, (537), on aura aussi

$$(\mathrm{K})\ldots\ \mathrm{B} - b = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \frac{1}{2}\mathrm{AC}}{2\mathrm{R}''}.$$

1181. La même méthode donnerait pour $\mathrm{C} - c$ la même valeur

(K) que pour B — *b*, valeur qui est visiblement la moitié de celle donnée par la formule (F). Donc 1°. quelque différens en grandeur que soient les angles obliques d'un petit triangle sphérique rectangle, ils excèdent chacun d'une même quantité l'angle rectiligne qui correspond à chacun d'eux respectivement; 2°. la somme des deux excès est égale à l'excès de l'angle droit sur l'angle rectiligne correspondant. D'où l'on doit conclure que l'une, à volonté, des formules (F), (G), (H), (K) suffit pour déterminer la différence de chacun des trois angles d'un petit triangle sphérique rectangle à l'angle rectiligne qui correspond à chacun d'eux respectivement.

1182. Les formules que nous avons données jusqu'à présent font connaître la différence d'un angle sphérique à l'angle rectiligne correspondant, différence constante dans un triangle donné. Mais quand on résout un triangle sphérique par les formules de la Trigonométrie rectiligne, l'erreur que l'on commet alors sur les angles est d'une autre espèce, et ne me paraît pas devoir être appelée *la différence* de l'angle sphérique à l'angle rectiligne, puisque dans un même triangle l'erreur varie pour un même angle, selon qu'on emploie pour le déterminer telles ou telles autres parties du triangle. De la Lande (*Mémoires Acad.* 1763) a déterminé l'erreur sur les angles obliques d'un petit triangle sphérique rectangle trouvés par le moyen des deux côtés et par les formules de la Trigonométrie rectiligne : nous suivrons les traces de ce célèbre Astronome pour rechercher les erreurs qui se commettent dans tous les cas, lorsqu'on se sert des formules de la Trigonométrie rectiligne pour résoudre les petits triangles sphériques rectangles. Cette recherche, la seconde de celle que nous avons pour but (1171) dans ce Chapitre, nous donnera un nouveau moyen très-commode pour obtenir les petits arcs avec une précision très-grande, et fort supérieure à celle qu'on peut espérer par les formules ordinaires, en se servant des tables de logarithmes à sept décimales.

1183. *Dans un triangle sphérique* ABC *rectangle en* A, *connaissant l'hypoténuse* BC, que je suppose ne pas excéder 4°, *et un angle*, par exemple B, *trouver l'erreur* e *que l'on commet en cherchant par la Trigonométrie rectiligne le côté opposé* AC.

La Trigonométrie sphérique donne $\sin. AC = \sin. BC \sin. B$.

Donc, (267), $AC - \frac{1}{6} AC^3 = \sin. B\,(BC - \frac{1}{6} BC^3)$. Les quantités du 5ᵉ ordre, et à plus forte raison celles des ordres supérieurs, sont négligées dans cette transformation, parce que la 5ᵉ puissance d'un arc de 4°, divisée par 120, ne vaut pas 0″, 01. On a donc $AC = BC \sin. B - \frac{1}{6}(BC^3 \sin. B - AC^3)$. Par la Trigonométrie rectiligne on a $AC = BC \sin. B$: cette formule donne donc le côté AC trop grand de la quantité $\frac{1}{6}(BC^3 \sin. B - AC^3)$. Mais, toujours en négligeant les quantités du 5ᵉ ordre, l'avant-dernière équation élevée au cube, donne $AC^3 = BC^3 \sin.^3 B$. Donc $e = -\frac{1}{6} BC^3 \sin. B\,(1 - \sin.^2 B)$; et pour avoir cette erreur en secondes, (nous supposerons toujours les côtés pris en secondes),

$$e = - BC \sin. B \times \frac{BC^2 \cos.^2 B}{6R''R''}.$$

1184. Si $BC = 4°$, et que $B = 55° 16'$, ce qui est le cas de la plus grande valeur (229) de $\sin. B \cos.^2 B$, on trouve $e = -4'', 50$.

On observera (et cette réflexion s'applique de même à tous les problèmes qui suivent) combien il serait facile ou de former une table de cette erreur, ou de trouver l'erreur dans chaque cas particulier. Car en calculant BC sin. B, on a déjà en occasion de prendre le log. de BC; de plus on sait ordinairement les logarithmes de 6 et de R″, attendu l'usage fréquent qu'on en fait dans le calcul; et il suffit de les employer avec quatre décimales, de même que celui de cos. B. Peut-être en coûterait-il moins de travail que de chercher par les parties proportionnelles les logarithmes de sin. BC et de sin. AC, en résolvant le triangle comme sphérique ; et peut-être cette dernière méthode ne donnerait-elle jamais les centièmes de seconde aussi exactement qu'on les aurait par les logarithmes des nombres, à sept décimales, dans le calcul de l'équation $AC = BC \sin. B$.

1185. Les données étant les mêmes que dans le problème précédent, *trouver le côté* AB *adjacent à l'angle donné.*

Puisque (1028), $\text{tang.} AB = \cos. B\ \text{tang.} BC$, on aura (281), $AB + \frac{1}{3} AB^3 = \cos. B\,(BC + \frac{1}{3} BC^3)$; et par conséquent $AB = BC \cos. B + \frac{1}{3}(BC^3 \cos. B - AB^3)$. Donc $e = \frac{1}{3} BC^3 (1 - \cos.^2 B) \cos. B$, ou

$$e = BC \cos. B \times \frac{BC^2 \sin.^2 B}{3R''R''}.$$

Cette erreur est en sens contraire de la précédente. La table qu'on formerait (1184) de l'erreur de AC donnerait aussi celle de AB, en adoptant pour argument $(90^\circ - B)$ au lieu de B, et prenant le double de l'erreur donnée par la table.

1186. Les données étant toujours les mêmes, *trouver l'angle* C.

Puisque (1028), $\cot. C = \cos. BC \operatorname{tang}. B = \operatorname{tang}. B (1 - \frac{1}{2} BC^2)$, (285), si on fait $C = 90^\circ - B + e$, on aura $\cot. C = \operatorname{tang}. (B - e)$: et par conséquent $\operatorname{tang}. B - \operatorname{tang}. (B - e) = \frac{1}{2} BC^2 \operatorname{tang}. B = \frac{\sin. e}{\cos. B \cos. (B - e)}$, (II. 25°). Mettant cos. B au lieu de cos. $(B - e)$, et e au lieu de sin. e, on aura

$$e = (\tfrac{1}{2} BC)^2 \times \frac{\sin. 2B}{R''}.$$

Cette formule est très-commode, puisqu'elle suffit seule pour faire connaître la valeur de C. Il est vrai qu'elle n'est pas propre à donner les centièmes de secondes, lorsque $BC > 1^\circ 30'$: mais on aura bien rarement un dixième de seconde d'erreur lorsque BC sera $< 3^\circ$.

1187. *Connaissant l'hypoténuse* $BC < 3^\circ$, *et un côté*, par exemple AB, *trouver l'angle opposé* C.

On a (1028), $\sin. C = \frac{\sin. AB}{\sin. BC} = \frac{AB - \frac{1}{6} AB^3}{BC - \frac{1}{6} BC^3} = \frac{AB}{BC} \times \frac{1 - \frac{1}{6} AB^2}{1 - \frac{1}{6} BC^2}$. Nommant $C - e$ la valeur que donne la Trigonométrie rectiligne pour l'angle cherché, on aura $\sin. C - \sin. (C - e) = \frac{AB}{BC}\left(\frac{1 - \frac{1}{6} AB^2}{1 - \frac{1}{6} BC^2} - 1\right) = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC^2 - AB^2}{6 - BC^2} = 2 \sin. \frac{1}{2} e \cos. (C - \frac{1}{2} e)$; (II. 23°). Négligeant dans le dénominateur le terme BC^2, qui, en effectuant la division, ne donnerait que des quantités d'ordres supérieurs au troisième ; et mettant, comme à l'ordinaire, $\frac{1}{2} e$ au lieu de sin. $\frac{1}{2} e$, et cos. C au lieu de cos. $(C - \frac{1}{2} e)$, il reste $e = \frac{AB (BC^2 - AB^2)}{6BC \times \cos. C} = \frac{1}{6} AB \times AC$, (537; 14°, 12°). Pour former une table, on aurait donc

$$e = \frac{AB}{6R''} \times \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}.$$

Mais la formule suivante

$$e = \frac{AB \times BC \cos. C}{6R''}$$

serait plus commode pour corriger l'angle C, après l'avoir déterminé par la formule $\sin. C = \frac{AB}{BC}$.

Cette erreur est trois fois plus petite que celle que nous avons trouvée (1186) pour le même angle C, l'hypoténuse et l'autre angle étant donnés. Il est facile de comparer les deux valeurs de e, en mettant dans la dernière formule BC cos. B au lieu de AB, et sin. B au lieu de cos. C. Je suis donc fondé dans ce que j'ai avancé (1182).

1188. Les données étant les mêmes, *trouver l'angle adjacent* B.

La Trigonométrie sphérique donne $\cos. B = \cot. BC \tan g. AB$; et la rectiligne, $\cos. (B - e) = \frac{AB}{BC}$. Donc $\cos. (B - e) - \cos. B = \frac{AB}{BC} - \frac{AB + \frac{1}{3}AB^3}{BC + \frac{1}{3}BC^3} = \frac{AB}{BC}\left(1 - \frac{3 + AB^2}{3 + BC^2}\right) = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC^2 - AB^2}{3 + BC^2} = e \times \sin. B$, (II. 24°). Et par conséquent $e = \frac{AB}{BC \times \sin. B} \times \frac{AC^2}{3 + BC^2} = \frac{1}{3} AB \times AC$, (537, 10°), en négligeant dans le dénominateur le terme BC^2, (1187). L'erreur, dans ce cas, est donc double de l'erreur produite ci-dessus dans la détermination de l'angle C; d'où il suit que les mêmes formules serviront pour l'un et l'autre angle. Cependant, pour avoir, dans le problème présent, la valeur de e avec le plus grand degré d'exactitude qu'on puisse attendre des tables dans la valeur de $(B - e)$ au moyen de la formule $\cos. (B - e) = \frac{AB}{BC}$, il faut que l'hypoténuse n'excède pas deux degrés.

1189. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté* AC.

Puisque $\cos. BC = \cos. AB \cos. AC$, on aura, en négligeant les quantités du 6e ordre, $1 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{24}BC^4 = (1 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{24}AB^4)(1 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AC^4) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AB^4 + \frac{1}{24}AC^4 + \frac{1}{4}AB^2 \times AC^2$. Réduisant, multipliant par 2, et transposant, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{1}{12}BC^4 - \frac{1}{12}AB^4 - \frac{1}{12}AC^4 - \frac{1}{2}AB^2 \times AC^2$. Mais, toujours en négligeant les quantités du 6e ordre, cette équation élevée au quarré, donne $BC^4 = AB^4 + 2AB^2 \times AC^2 + AC^4$. Donc, en substituant cette valeur de BC^4 dans l'équation qui vient de nous donner celle de BC^2, on aura $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2$, ou $\sqrt{(BC^2 - AB^2)} = AC \sqrt{(1 - \frac{1}{3}AB^2)}$. En développant ce dernier binôme, et négligeant les quantités du

5° ordre, on a $AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)} + \frac{1}{6} AB^2 \times AC$. Dans ce dernier terme, qui est la valeur de e, on peut sans scrupule substituer à AC sa valeur exprimée par le premier terme seulement : ce qui donne pour résultat

$$e = \frac{AB^2}{6R''R''} \times \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}.$$

Cette formule donne les centièmes de secondes, quand l'hypoténuse n'excède pas 4°.

Comme ce problème est d'un usage fréquent, nous croyons devoir observer que quand on a calculé la valeur de AC par la formule (537, 14°), il ne reste plus, pour avoir la correction de cette valeur, qu'à la multiplier par $\frac{AB^2}{6R''R''}$.

1190. *Connaissant un côté et l'angle opposé*, par exemple AC et B, *trouver l'angle* C.

Puisque $\sin. C = \frac{\cos. B}{\cos. AC}$, si on fait $C = 90° - B + e$, on aura $\cos.(B - e) = \frac{\cos. B}{\cos. AC} = \cos. B \times (1 - \frac{1}{2} AC^2)^{-1} = \cos. B + \frac{1}{2} AC^2 \cos. B$, en négligeant les quantités du 4ᵉ ordre. Et par conséquent $\cos.(B - e) - \cos. B = \frac{1}{2} AC^2 \cos. B = e \sin. B$, (II. 24°). Donc

$$e = \frac{AC^2 \times \cot. B}{2R''}.$$

Cette formule donne les centièmes de secondes, quand la somme des côtés, ou (AC + AC cot. B), n'excède pas 2° 40′. Si on voulait former une table de cette précision, même pour les cas où on aurait (AC + AC cot. B) = 8°, il faudrait se servir de la formule $e = \frac{AC^2 \cot. B}{2R''}\left(1 + \frac{5 AC^2}{12R''R''}\right) + \frac{e^2 \cot. B}{2R''}$, en employant dans le dernier terme la valeur de e tirée du premier terme seulement.

1191. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté* AB.

Puisque $\sin. AB = \cot. B \tang. AC$, on aura $AB - \frac{1}{6} AB^3 = \cot. B (AC + \frac{1}{3} AC^3)$: donc $AB = AC \times \cot. B + \frac{1}{3} AC^3 \cot. B + \frac{1}{6} AB^3$. Et par conséquent $e = \frac{1}{3} AC^3 \cot. B + \frac{1}{6} AC^3 \cot.^3 B$, ou

$$e = AC \times \cot. B \times \frac{AC^2}{3R''R''}(1 + \frac{1}{2} \cot.^2 B).$$

Cette formule et la suivante donnent les centièmes de seconde; lorsqu'on a $(AC + AC \cot. B) < 8^\circ$.

1192. Les données étant les mêmes, *trouver l'hypoténuse* BC.

La seconde équation (1183) donne $BC = \frac{AC}{\sin. B} + \frac{1}{6}\left(BC^3 - \frac{AC^3}{\sin. B}\right)$.
Et par conséquent $e = \frac{1}{6}\left(BC^3 - \frac{AC^3}{\sin. B}\right) = \frac{AC^3}{6 \sin. B}\left(\frac{1}{\sin.^2 B} - 1\right)$, ou

$$e = \frac{AC}{\sin. B} \times \frac{AC^2 \cot.^2 B}{6 R'' R''}.$$

1193. *Connaissant un côté et l'angle adjacent*, par exemple AB et B, *trouver l'angle opposé* C.

$\text{Cos. } C = \sin. B \cos. AB = \sin. B\,(1 - \frac{1}{2} AB^2)$. Soit $C = 90^\circ - B + e$; on aura $\sin. B - \sin.(B - e) = \frac{1}{2} AB^2 \sin. B = e \times \cos. B$, (II. 23e). Donc

$$e = \frac{AB^2 \operatorname{tang.} B}{2 R''}.$$

Cette formule donne les centièmes de seconde, quand on a $(AB + AB \operatorname{tang.} B) < 2^\circ\ 40'$; limite qui s'étendra jusqu'à 8° par la formule suivante, $e = \frac{AB^2 \operatorname{tang.} B}{2R''}\left(1 - \frac{AB^2}{12 R'' R''}\right) - \frac{e^2 \operatorname{tang.} B}{2 R''}$, dans laquelle la valeur de e, tirée du premier terme, s'emploiera pour calculer le dernier.

1194. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté* AC.

La seconde équation (1191) donne $AC = AB \operatorname{tang.} B - \frac{1}{6} AB^3 \times \operatorname{tang.} B - \frac{1}{3} AC^3$. Donc $e = -\frac{1}{6} AB^3 \operatorname{tang.} B - \frac{1}{3} AB^3 \operatorname{tang.}^3 B$, ou

$$e = - AB \operatorname{tang.} B \times \frac{AB^2}{6 R'' R''}(1 + 2 \operatorname{tang.}^2 B).$$

Cette formule donne les centièmes de seconde, lorsque l'on a $(AB + AB \operatorname{tang.} B) < 8^\circ$.

1195. Les données étant les mêmes, *trouver l'hypoténuse* BC.

La 3e équation (1185) donne $BC = \frac{AB}{\cos. B} - \frac{1}{3}\left(BC^3 - \frac{AB^3}{\cos. B}\right)$.
Donc $e = -\frac{1}{3}\left(\frac{AB^3}{\cos.^3 B} - \frac{AB^3}{\cos. B}\right) = -\frac{AB^3}{3 \cos. B}\left(\frac{1}{\cos.^2 B} - 1\right)$, ou

$$e = -\frac{AB}{\cos. B} \times \frac{AB^2 \operatorname{tang.}^2 B}{3 R'' R''}.$$

La limite est la même que dans la solution précédente, (1194).

1196. *Connaissant deux côtés*, AB, AC, *dont la somme n'excède pas* 4°, *trouver un des angles*, par exemple B.

La Trigonométrie sphérique donne $\text{tang. B} = \frac{\text{tang. AC}}{\text{sin. AB}}$; et la rectiligne, $\text{tang.}(\text{B} - e) = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}$. Donc $\text{tang. B} - \text{tang.}(\text{B} - e)$ $= \frac{\text{AC}}{\text{AB}}\left(\frac{1 + \frac{1}{3}\text{AC}^2}{1 - \frac{1}{6}\text{AB}^2} - 1\right) = \frac{\text{AC}}{\text{AB}} \times \frac{2\text{AC}^2 + \text{AB}^2}{6 - \text{AB}^2} = \frac{e}{\cos.^2\text{B}}$, (II. 25°). Négligeant dans le dénominateur le terme AB^2, (1187), et mettant $\frac{\text{AB}^2}{\text{BC}^2}$ au lieu de $\cos.^2\text{B}$, et BC^2 au lieu de $\text{AC}^2 + \text{AB}^2$, on aura $e = \frac{1}{6}\,\text{AB} \times \text{AC} \times \frac{\text{BC}^2 + \text{AC}^2}{\text{BC}^2} = \frac{1}{6}\,\text{AB} \times \text{AC}\left(1 + \frac{\text{AC}^2}{\text{BC}^2}\right)$, ou

$$e = \frac{\text{AB} \times \text{AC}}{6\text{R}''}(1 + \sin.^2\text{B}).$$

1197. *Connaissant deux côtés*, AB, AC, *dont la somme n'excède pas* 8°, *trouver l'hypoténuse* BC.

Nous avons eu (1189), $\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - \frac{1}{3}\,\text{AB}^2 \times \text{AC}^2$. Donc $\text{BC} = \sqrt{(\text{AB}^2 + \text{AC}^2 - \frac{1}{3}\,\text{AB}^2 \times \text{AC}^2)}$; et en développant le second membre par le binôme de Newton, et négligeant les quantités du 5e ordre, $\text{BC} = \sqrt{(\text{AB}^2 + \text{AC}^2)} - \frac{\text{AB}^2 \times \text{AC}^2}{6\sqrt{(\text{AB}^2 + \text{AC}^2)}}$; et par conséquent

$$e = -\frac{\text{AB}^2 \times \text{AC}^2}{6\text{R}''\,\text{R}''\sqrt{(\text{AB}^2 + \text{AC}^2)}}.$$

Comme ce problème se présente très-fréquemment, je donne ici le logarithme constant $8{,}59300 = \log.\frac{1}{6\text{R}''\,\text{R}''}$.

1198. Pour donner un exemple de l'utilité de notre formule, soient $\text{AB} = 4^\circ\ 1'\ 13''$, $\text{AC} = 3^\circ\ 55'\ 17''$; on trouvera, en se servant des logarithmes à sept décimales, $\sqrt{(\text{AB}^2 + \text{AC}^2)} = 5^\circ\ 36'\ 57'',75$. Donc $\log. -e = 8{,}59300 + 2\log.\text{AB} + 2\log.\text{AC} - \log.\sqrt{(\text{AB}^2 + \text{AC}^2)}$ $= 0{,}90787$; et par conséquent $e = -8'',09$, et l'hypoténuse cherchée $\text{BC} \doteq 5^\circ\ 36'\ 49'',66$, valeur approchée à moins d'un centième de seconde. La formule ordinaire, $\cos.\text{BC} = \cos.\text{AB}\cos.\text{AC}$, ne donne pas même les secondes exactement, quand BC est $< 4^\circ$, et l'erreur qu'elle produit est d'autant plus grave que BC est plus audessous de 4°.

L'expression $\sqrt{(\text{AB}^2 + \text{AC}^2)}$ se calcule ordinairement par le

moyen d'un angle; on a, par exemple, tang. $B = \frac{AC}{AB}$, puis BC ou $\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \frac{AB}{\cos. B}$. On observera que, dans cette dernière équation, il faut employer l'angle B tel qu'il a été donné par la précédente, sans faire usage de la correction (1196). La méthode (429) peut trouver ici son application.

1199. *Connaissant les deux angles*, il faut toujours chercher en premier lieu l'hypoténuse par la formule (1035); de là, avec l'hypoténuse et un angle, on pourra trouver les côtés par les moyens donnés (1183, 1185).

Fig. 75. 1200. Les méthodes que nous venons de donner peuvent aussi résoudre un triangle dont un seul côté serait petit. Soit P le pôle arctique, A l'Observatoire de Paris, M la ville de Marseille, ou un point de cette ville qui ait servi de signal dans les opérations (801); et soit ME un arc de grand cercle perpendiculaire sur AE. Je suppose qu'on ait déterminé la distance ME de Marseille au méridien de Paris, de 126210 toises, et la distance AE à la perpendiculaire, de 314131 toises. Nous avons dit (1010) que ME se nomme aussi *la différence de longitude*, et AE la *différence de latitude* entre les deux points A et M, dont il s'agit; mais que ces dénominations sont inexactes et impropres, puisque la différence de longitude est réellement l'angle P, et la différence de latitude l'arc AL, en supposant PL = PM, et considérant la Terre comme étant de figure sphérique (801). Or connaissant ME, AE, on en déduit facilement la valeur de P et celle de AL, pourvu qu'on connaisse la distance de l'un des deux lieux au pôle. En effet, soit AP = 41° 9′ 46″; si on réduit AE en secondes par la proportion (696), dans laquelle on écrira 3268253 toises pour le rayon de la Terre (1559), et R″ (631) au lieu de R = 1; on aura, pour quatrième terme, AE = 5° 30′ 25″; et par conséquent PE = 46° 40′ 11″. Dans le triangle PEM rectangle en E, on a (VI. 14°), cot. P = sin. PE cot. ME, ou tang. $P = \frac{\text{tang. } ME}{\sin. PE}$. Donc $P + \frac{1}{3}P^3 = \frac{ME + \frac{1}{3}ME^3}{\sin. PE}$, et $P = \frac{ME}{\sin. PE}(1 + \frac{1}{3}ME^2) - \frac{1}{3}P^3$. En mettant $\frac{ME^3}{\sin.^3 PE}$ au lieu de P^3, (ce qui suppose qu'on négligo

les puissances supérieures à la quatrième), on a $P = \frac{ME}{\sin. PE}$ $\left(1 + \frac{1}{3} ME^2 \times \overline{1 - \frac{1}{\sin.^2 PE}}\right)$, et par conséquent $P = \frac{ME}{\sin. PE} \times$ $(1 - \frac{1}{3} ME^2 \times \cot.^2 PE)$. Voici le calcul de cette formule.

log. ME = 126210 toises = 5,1010938
compl. log. (R = 3268233 tois.) = 3,4856870

log. (ME en parties de R = 1) = 8,5867808
log. R″ = 5,3144251
compl. log. sin. PE = 0,1382206

$\log. \frac{ME}{\sin. PE}$ = 4,0394265 = log. 10950″, 3
compl. log. 3 = 9,5229
log. ME, comme ci-dessus, = 8,5868
idem = 8,5868
log. cot. PE = 9,9747
idem = 9,9747

$\log. - \frac{ME^2 \cot.^2 PE}{3 \sin. PE}$ = 0,6853 = log. − 4″, 8

Donc P = 10945″, 5 = 3° 2′ 25″, 5.

Pour avoir AL, ou PM — PA, l'équation ordinaire cos. PM = cos. PE cos. ME me paraît la plus commode.

1201. Examinons maintenant le cas qui se rencontre très-souvent, où l'un des arcs qui forment l'angle droit est un arc de parallèle et par conséquent de petit cercle. Comme, dans les petits triangles, cet arc ne diffère pas sensiblement de sa corde pour la longueur, on a coutume de résoudre le triangle en le considérant sans scrupule comme rectiligne rectangle. Mais la vérité est que l'erreur sur l'angle droit peut être très-sensible, et qu'elle peut produire sur les parties cherchées du triangle, des altérations qu'il me semble qu'on n'a pas encore observées, et qui cependant sont plus considérables que celles dont nous avons parlé jusqu'à présent. C'est ce que nous allons établir, et c'est la troisième des recherches que nous nous sommes proposées (1171).

1202. Dans le petit triangle sphérique BAC rectangle en A Fig. 76.

Fig. 76 relativement à l'arc de parallèle CDA, soit P le pôle de cet arc, et C*a* l'arc correspondant de grand cercle. Si on résout le triangle BAC comme rectiligne, c'est dans le fait employer l'arc C*a* plutôt que l'arc CDA, puisque le premier est celui qui approche le plus de sa corde (974), ou de la ligne droite. Mais l'angle *a* est d'autant plus au-dessus ou au-dessous de 90°, que la distance au pôle ou l'arc *a*P est plus au-dessus ou au-dessous de 90°; comme l'indique l'équation (1142, 2°), cos. $a =$ tang. $\frac{1}{2} a$C cot. aP, dans laquelle faisant, comme à notre ordinaire, $e = 90° - a$, on a

$$e = \tfrac{1}{2} a\mathrm{C} \times \cot. a\mathrm{P};$$

formule qui donne l'erreur sur l'angle que l'on considère comme droit.

1203. Supposant AP $< 90°$, on aura aussi $a < 90°$; et il est facile de reconnaître que si on résout le triangle BAC comme rectiligne rectangle, il en résultera diverses erreurs, selon la diversité des données.

Par exemple, soient donnés le côté AB, et l'arc ADC en parties de grand cercle (983).

Observons d'abord que dans les petits triangles il est rare que la différence de longueur entre ADC et *a*C puisse mériter attention. En effet, ADC $=$ P $\times$ sin. AP, (985), et sin. $\frac{1}{2}$ *a*C $=$ sin. $\frac{1}{2}$ P sin. AP, (1142, 1°.); égalant les deux valeurs de sin. AP tirées de ces deux équations, on déduit de la nouvelle équation qui en résulte, cette analogie,

$$\mathrm{P} : \sin. \tfrac{1}{2}\mathrm{P} :: \mathrm{ADC} : \sin. \tfrac{1}{2} a\mathrm{C},$$

par le moyen de laquelle on pourra réduire le côté ADC au côté *a*C. Mais on trouvera leurs différences insensibles dans les cas ordinaires, dans lesquels P n'excède pas 1° 30'.

Fig. 77. 1204. Prenant donc indifféremment *a*C au lieu de ADC, soit B*a*C (fig. 77) le même triangle que celui de la fig. 76 formé par trois arcs de grand cercle, et soit désigné par *a* l'angle B*a*C. Puisque a est $< 90°$, qu'on élève du point *a* l'arc perpendiculaire *a*M $=$ *a*B, et qu'on mène l'arc CM. Le triangle C*a*M est celui qu'on résoudra effectivement, si avec les données *a*C, *a*B, on résout B*a*C comme rectangle. Par conséquent on trouvera l'hypoténuse CM $>$ CB, l'angle MC*a* $<$ BC*a*, et CM*a* différera aussi de CB*a*. Les erreurs ne seraient plus les mêmes si les données étaient, par exemple, B*a*, BC, puisqu'en abaissant l'arc perpen-

diculaire BN, sensiblement égal à Ba, le triangle qu'on résoudrait en pareil cas serait BCN.

1205. Pour remédier facilement à toutes les erreurs de cette espèce, j'observe d'abord que l'on peut sans scrupule supposer $NBa = BaM = 90° - a = e$. Cela posé, par le moyen de la formule (1202), j'ai calculé la table suivante des valeurs de e en minutes et décimales de minutes, en supposant $aC = 1'$, et faisant d'abord la distance au pôle ou $AP = 10°$, à cause de la variation Fig. 76.
trop irrégulière des valeurs de e pour de plus petites distances au pôle. Dans le cas de ces moindres distances, il faudrait calculer exprès la formule $e = \frac{1}{2} aC \times \cot. aP$; ou, à toute rigueur, $\sin. e = \text{tang.} \frac{1}{2} aC \times \cot. aP$.

DIST. au PÔLE.	VALEURS de e.	DIST. au PÔLE.	VALEURS de e.	DIST. au PÔLE.	VALEURS de e.	DIST. au PÔLE.	VALEURS de e.
10°	2',836	30°	0',866	50°	0',420	70°	0',182
11	2,572	31	0,832	51	0,405	71	0,172
12	2,352	32	0,800	52	0,391	72	0,162
13	2,166	33	0,770	53	0,377	73	0,153
14	2,005	34	0,741	54	0,363	74	0,143
15	1,866	35	0,714	55	0,350	75	0,134
16	1,744	36	0,688	56	0,337	76	0,125
17	1,635	37	0,664	57	0,325	77	0,115
18	1,539	38	0,640	58	0,312	78	0,106
19	1,452	39	0,617	59	0,300	79	0,097
20	1,374	40	0,596	60	0,289	80	0,088
21	1,303	41	0,575	61	0,277	81	0,079
22	1,238	42	0,555	62	0,266	82	0,070
23	1,178	43	0,536	63	0,255	83	0,061
24	1,123	44	0,518	64	0,244	84	0,053
25	1,072	45	0,500	65	0,233	85	0,044
26	1,025	46	0,483	66	0,223	86	0,035
27	0,981	47	0,466	67	0,212	87	0,026
28	0,940	48	0,450	68	0,202	88	0,017
29	0,902	49	0,435	69	0,192	89	0,009
30	0,866	50	0,420	70	0,182	90	0,000.

1206. Pour donner un exemple de l'usage de cette table, je suppose qu'étant donné un arc de parallèle de 60′, tel que ADC, situé à 30° de distance du pôle P, on demande de quelle quantité l'angle PAD de 90° excède l'angle a, (1202). L'équation de la table, à 30° de distance du pôle, est 0″,866; multipliez cette valeur par 60, vous aurez $e = 51'',96 = 51'' 57''',6$. C'est à-peu-près la valeur de N Ba, dans le cas proposé. Pour connaître le petit angle NBa, il suffit donc de multiplier l'équation de la table par l'arc aC pris en minutes.

Fig. 77.

1207. Connaissant l'angle NBa, on a immédiatement les autres différences des parties du triangle proposé CBa aux parties correspondantes du triangle réellement rectangle CBN. En effet, 1°. NBa $= N - a = 90° - a$; 2°. BN = Ba × cos. NBa; la différence de BN à Ba, qui sera donnée par cette équation, sera le plus souvent insensible; 3°. Na = Ba sin. NBa; cette réduction est celle qui mérite attention. Supposons Ba = 1′, NBa = 1′; on a Na = 0″, 01745, et log. 0″, 01745 = 8,242. Donc en général on aura, quelles que soient les valeurs de Ba et de NBa, prises en minutes,

$$Na = 0'',01745 \times Ba \times NBa.$$

Soit, par exemple, Ba = 60′, NBa = 20′; alors Na = 0″, 01745 × 60 × 20 = 20″, 94.

1208. Si l'on fait aussi Ca = 60′, et qu'on résolve le triangle CBa comme rectiligne rectangle, on trouvera, en négligeant la petite correction (1197), 1° 24′ 51″, 17 pour la valeur de l'hypoténuse; mais cette valeur est réellement celle de CM, et non celle de BC. Si, au contraire, dans ce calcul, au lieu de Ca on emploie CN = 59′ 59″, 06, on trouve en effet la valeur de BC = 1° 24′ 36″, 38. D'où l'on voit qu'en résolvant le triangle CBa comme rectangle, l'erreur sur l'hypoténuse est 14″, 79, et que cette erreur serait d'autant plus grande que CDA serait plus près de son pôle. Dans le cas présent AP = 56° 18′. Mes corrections peuvent donc être importantes pour l'Astronomie, lorsque l'arc de parallèle est un almicantarat.

Fig. 76.

1209. Dans le cas où l'un des côtés de l'angle droit sera un arc de parallèle, on pourra donc éviter toute erreur, en résolvant le triangle BCN au lieu du triangle BCa. Si l'arc de parallèle est connu, il faut le diminuer de la quantité Na, (1207), avant de résoudre le

Fig. 77.

triangle BCN. De même si l'angle CB*a* était donné, il faudrait, avant de l'employer, le diminuer de la quantité NB*a*, (1205). Au contraire, si *a*C ou CB*a* sont les choses cherchées, il faudra, après les avoir trouvées, leur appliquer les mêmes corrections, mais en sens opposé, parce que la résolution du triangle BCN donne CN et CBN au lieu de C*a* et CB*a*. Au surplus, si l'on veut une très-grande exactitude, on pourra résoudre le triangle BCN par les méthodes et les formules (1183 à 1199).

1210. Il reste seulement à observer que quand AP est $> 90°$, et que l'angle CB*a* opposé à l'arc de parallèle se trouve situé entre cet arc et le pôle, alors la perpendiculaire BN tombe en dehors du triangle CB*a*, et par conséquent toutes les corrections précédentes doivent se faire en sens contraire de ce que nous avons prescrit pour le cas où AP est $< 90°$. Fig. 76 et 77.

1211. Il arrive très-souvent, surtout dans l'Astronomie, que deux triangles ont l'hypoténuse commune, et un arc de parallèle pour l'un des côtés de l'angle droit dans chacun d'eux. Connaissant deux côtés, par exemple AB, AC de l'un de ces triangles, et la différence, par exemple ACD, de deux de leurs angles ayant le sommet commun; pour avoir la valeur des côtés BD, CD de l'autre triangle, on résout ordinairement ces triangles comme rectilignes rectangles, et on fait ACD = ABD. Mais ces angles sont d'autant plus inégaux, que la correction ACF de l'angle A (1205) diffère davantage de la correction DCM de l'angle D. Pour éviter toute erreur, il faut employer dans le calcul BF au lieu de BA, et MCF au lieu de ACD. Or MCF = BCM — BCF = BCD — DCM — (BCA — ACF) = ACD + ACF — DCM; l'angle donné ACD doit donc être augmenté (diminué si DCM est $>$ ACF) de la différence des deux corrections ACF, DCM. Alors on aura MCF = ABD sensiblement; et en employant MCF dans le calcul, on pourra faire usage des formules (647 à 651), pour trouver CM, BM. Ces lignes se réduiront ensuite à CD, BD, (1207). Un exemple (1459) fera voir combien ces opérations sont faciles. Fig. 78.

CHAPITRE XXI.

Des Analogies différentielles des Triangles sphériques.

1312. Je donnerai les analogies différentielles des triangles sphériques sous trois formes : la première, rigoureuse et qui est nouvelle, pour les différences finies, de quelque grandeur qu'elles soient, rapportées aux parties d'un triangle ABC; la seconde pour les différences infiniment petites, comme on les donne ordinairement, mais en augmentant de beaucoup le nombre des analogies publiées jusqu'à présent, et en appliquant le signe négatif à l'une des deux variations que l'on considère, quand elle se fait dans un sens opposé relativement à l'autre; la troisième, pour les mêmes analogies infinitésimales, mais exprimées avec les dénominations des parties du triangle, et sans égard aux signes, qu'on pourra prendre dans les analogies de la forme précédente. De chacune des proportions fondamentales, je déduirai par des substitutions autant d'autres analogies qu'on peut en obtenir sans introduire dans le second rapport plus de trois parties du triangle (en exceptant (1360) six cas seulement), ou plus de deux quand le triangle est rectangle. Ces substitutions peuvent rarement avoir lieu dans les analogies finies ou de la première forme. Je supprimerai aussi les analogies de la troisième forme, quand elles seront compliquées, et longues et difficiles à énoncer. Je donne toutes les analogies sans interruption, me réservant de les démontrer ensuite. De cette manière elles forment une table, à laquelle on pourra recourir aisément.

TABLE DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES

DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Quantités constantes AB, A ; ou *un côté et un angle adjacent.*

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT,
ET DE L'ANGLE ADJACENT AU CÔTÉ CONSTANT.

1213. $\text{Sin}\ \delta AC : \sin.\delta B :: \sin.(BC+\delta BC) : \sin.C :: \sin.BC : \sin.(C+\delta C).$

$$\delta AC : \delta B :: \sin.BC : \sin.C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant
Est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

1214. $\text{Sin}.\delta AC : \sin.\delta B :: \sin.BC \sin.(BC+\delta BC) : \sin.AB \sin.A,$ (VII. 6°).

$$\delta AC : \delta B :: \sin.^2BC : \sin.AB \sin.A.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le quarré du sinus du côté opposé à l'angle constant
Est au produit du sinus du côté constant par le sinus de l'angle constant.

1215. $\sin.\delta AC : \sin.\delta B :: \sin.BC \sin.(AC+\delta AC) : \sin.AB \sin.(B+\delta B).$

$$\delta AC : \delta B :: \sin.BC \sin.AC : \sin.AB \sin.B.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le produit des sinus des côtés variables
Est au produit du sinus du côté constant par le sinus de l'angle variable adjacent.

1216. $\sin. \partial AC : \sin. \partial B :: \sin. AB \sin. A : \sin. C \sin. (C + \partial C)$, (VII. 19°), (1213).

$$\partial AC : \partial B :: \sin. AB \sin. A : \sin.^2 C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le produit du sinus du côté constant par le sinus de l'angle constant
Est au quarré du sinus de l'angle opposé au côté constant.

Si $A = 90°$, ou si $AB = 90°$;

1217. $\sin. \partial AC : \sin. \partial B :: \sin. AC \cos. (AC + \partial AC) : \sin. B \cos. (B + \partial B)$.

$$\partial AC : \partial B :: \sin. 2AC : \sin. 2B.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du double du côté variable
Est au sinus du double de l'angle opposé.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT, ET DE L'ANGLE OPPOSÉ AU CÔTÉ CONSTANT.

1218. $\text{tang.} \tfrac{1}{2} \partial AC : -\sin. \tfrac{1}{2} \partial C :: \text{tang.} (BC + \tfrac{1}{2} \partial BC) : \sin. (C + \tfrac{1}{2} \partial C)$.

$$\partial AC : -\partial C :: \text{tang.} BC : \sin. C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme la tangente du côté opposé à l'angle constant
Est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

1219.* $\sin. \tfrac{1}{2} \partial AC : -\tfrac{1}{2} \sin. \partial C :: 1 : \sin (C + \partial C) \times \dfrac{\cos. \tfrac{1}{2} \partial AC \sin. C \cot. A + \cos. C \cos (AC + \tfrac{1}{2} \partial AC)}{\sin. AC}$

$$\partial AC : -\partial C :: \sin. AC : \sin.^2 C \cot. A + \sin. C \cos. C \cos. AC.$$

1220. $\partial AC : -\partial C :: \sin. BC \,\text{tang.} BC : \sin. AB \sin. A$, (VII. 6°), (1218).

Si $A = 90°$;

1221. $\sin. \tfrac{1}{2} \partial AC : -\tfrac{1}{2} \sin. \partial C :: \dfrac{\sin. AC}{\cos. (AC + \tfrac{1}{2} \partial AC)} : \sin. (C + \partial C) \cos. C$, (1219).

$$\partial AC : -\partial C :: 2 \,\text{tang.} AC : \sin. 2C.$$

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme le double de la tangente du côté variable
Est au sinus du double du même angle.

Si $AB = 90°$;

1222. $\sin. \frac{1}{2} \partial AC : \frac{1}{2} \sin. \partial C :: \frac{\cos. AC}{\sin. (AC + \frac{1}{2} \partial AC)} : \sin. (C + \partial C) \cos. C$

$$\partial AC : \partial C :: 2 \cot. AC : \sin. 2C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant,
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant
Comme le double de la cotangente du premier de ces côtés
Est au sinus du double du second de ces angles.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT, ET DE L'ANGLE ADJACENT AU CÔTÉ CONSTANT.

1223. $\sin. \frac{1}{2} \partial BC : \text{tang.} \frac{1}{2} \partial B :: \sin. (BC + \frac{1}{2} \partial BC) : \text{tang.} (C + \frac{1}{2} \partial C).$

$$\partial BC : \partial B :: \sin. BC : \text{tang.} C.$$

La variation du côté opposé à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant
Est à la tangente de l'angle opposé au côté constant.

1224.* $\frac{1}{2} \sin. \partial BC : \sin. \frac{1}{2} \partial B :: \frac{\cos. \frac{1}{2} \partial B \sin. BC \cot. AB - \cos. BC \cos (B + \frac{1}{2} \partial B)}{\sin. B} : \frac{1}{\sin. (BC + \partial BC)}.$

$$\partial BC : \partial B :: \sin^2. BC \cot. AB - \sin. BC \cos. BC \cos. B : \sin. B.$$

1225. $\partial BC : \partial B :: \sin. AB \sin. A : \sin. C \text{ tang.} C$, (VII. 19°), (1223).

Si $A = 90°$;

1226. $\frac{1}{2} \sin. \partial BC : \sin. \frac{1}{2} \partial B :: \sin. (BC + \partial BC) \cos. BC : \frac{\cos. B}{\sin. (B + \frac{1}{2} \partial B)};$

$$\partial BC : \partial B :: \sin. 2BC : 2 \cot. B.$$

La variation de l'hypoténuse
Est à celle de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du double de l'hypoténuse
Est au double de la cotangente du même angle.

Si $AB = 90°$;

1227. $-\tfrac{1}{2}\,\text{sin.}\,\partial BC : \text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial B :: \text{sin.}\,(BC + \partial BC)\,\text{cos.}\,BC : \dfrac{\text{sin.}\,B}{\text{cos.}\,(B + \frac{1}{2}\,\partial B)}$.

$-\,\partial BC : \partial B :: \text{sin.}\,2\,BC : 2\,\text{tang.}\,B.$

La variation du côté opposé à l'angle constant
Est à celle de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du double du premier de ces côtés
Est au double de la tangente du second de ces angles.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT, ET DE L'ANGLE OPPOSÉ AU CÔTÉ CONSTANT.

1228.* $\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial BC : -\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\partial C :: \text{tang.}\,(BC + \tfrac{1}{2}\,\partial BC) : \text{tang.}\,(C + \tfrac{1}{2}\,\partial C)$.

$\partial BC : -\,\partial C :: \text{tang.}\,BC : \text{tang.}\,C.$

La variation du côté opposé à l'angle constant
Et la variation de l'angle opposé au côté constant
Sont proportionnelles à leurs tangentes.

1229. $\partial BC : -\,\partial C :: \text{sin.}\,AC : (\text{cos.}\,AC + \text{tang.}\,C\,\text{cot.}\,A)\,\text{sin.}\,C$, (VII. 52°).

1230. $\partial BC : -\,\partial C :: (\text{tang.}\,BC\,\text{cot.}\,AB - \text{cos.}\,B)\,\text{sin.}\,BC : \text{sin.}\,B$, (VII. 18°), (1228).

Si $A = 90°$;

1231. $\partial BC : -\,\partial C :: \text{sin.}\,BC : \text{cot.}\,B$, (1028, 5°), (1228).

La variation de l'hypoténuse
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme le sinus de l'hypoténuse
Est à la cotangente de l'autre angle.

Si $AB = 90°$;

1232. $\partial BC : \partial C :: \text{sin.}\,BC : \text{tang.}\,B$, (1230).

La variation du côté opposé à l'angle constant
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant
Est à la tangente de l'angle variable adjacent au côté constant.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX COTÉS.

1233. $\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\delta AC : \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\delta BC :: \cos.\,\tfrac{1}{2}\delta C : \cos.\,(C + \tfrac{1}{2}\delta C).$

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos. C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation du côté opposé,
Comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté constant.

1234.* $\sin.\,\tfrac{1}{2}\delta AC : \sin.\,\tfrac{1}{2}\delta BC :: 1 : \dfrac{\cos.\,\tfrac{1}{2}\delta AC \cos. AB - \cos. BC \cos.\,(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC)}{\sin. AC \sin.\,(BC + \tfrac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : \delta BC :: \sin. BC \sin. AC : \cos. AB - \cos. BC \cos. AC.$$

1235. $\sin. \delta AC : \sin. \delta BC :: \sin.(AC + \delta AC) : \cos. AB \sin.(BC + \delta BC) - \dfrac{\sin. AB \cos.(B + \tfrac{1}{2}\delta B) \cos.(BC + \delta BC)}{\cos.\,\tfrac{1}{2}\delta B}.$

$$\delta AC : \delta BC :: \sin. AC : \cos. AB \sin. BC - \sin. AB \cos. B \cos. BC.$$

1236. $\delta AC : \delta BC :: 1 ; \cos. AB \sin. A \sin. B - \cos. A \cos. B$, (VII. 12ᵉ), (1233).

Si $A = 90°$;

1237. $\sin.\,\tfrac{1}{2}\delta AC : \sin.\,\tfrac{1}{2}\delta BC :: \dfrac{\cos. AC}{\sin.\,(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC)} : \dfrac{\cos. BC}{\sin.\,(BC + \tfrac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : \delta BC :: \cot. AC : \cot. BC.$$

Les variations de l'hypoténuse et du côté
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Si $AB = 90°$;

1238. $\sin.\,\tfrac{1}{2}\delta AC : -\sin.\,\tfrac{1}{2}\delta BC :: \dfrac{\sin. AC}{\cos.\,(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC)} : \dfrac{\cos. BC}{\sin.\,(BC + \tfrac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : -\delta BC :: \text{tang.}\,AC : \cot. BC.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation du côté opposé,
Comme le produit de leurs tangentes est au rayon.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX ANGLES.

1239. $\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\delta B : -\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\delta C :: \cos.\,\tfrac{1}{2}\delta BC : \cos.\,(BC + \tfrac{1}{2}\delta BC).$

$$\delta B : -\delta C :: 1 : \cos. BC.$$

La variation de l'angle adjacent au côté constant
Est à la variation de l'angle opposé,
Comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle constant.

1240 * $\sin.\frac{1}{2}\partial B : -\sin.\frac{1}{2}\partial C :: 1 : \frac{\cos.\frac{1}{2}\partial B \cos.A + \cos.C\cos.(B+\frac{1}{2}\partial B)}{\sin.B\sin.(C+\frac{1}{2}\partial C)}$.

$$\partial B : -\partial C :: \sin.B\sin.C : \cos.A + \cos.B\cos.C.$$

1241. $\partial B : -\partial C :: 1 : \cos.A\sin.AB\sin.AC + \cos.AB\cos.AC$, (VII, 26°), (1239).

Si $A = 90°$;

1242. $\sin.\frac{1}{2}\partial B : -\sin.\frac{1}{2}\partial C :: \frac{\sin.B}{\cos.(B+\frac{1}{2}\partial B)} : \frac{\cos.C}{\sin.(C+\frac{1}{2}\partial C)}$.

$$\partial B : -\partial C :: \text{tang}.B : \cot.C.$$

La variation de l'angle adjacent au côté constant
Est à la variation de l'angle opposé,
Comme le produit de leurs tangentes est au rayon.

Si $AB = 90°$;

1243. $\sin.\frac{1}{2}\partial B : \sin.\frac{1}{2}\partial C :: \frac{\cos.B}{\sin.(B+\frac{1}{2}\partial B)} : \frac{\cos.C}{\sin.(C+\frac{1}{2}\partial C)}$.

$$\partial B : \partial C :: \cot.B : \cot.C.$$

Les variations des angles
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Quantités constantes BC, A; ou *un côté et l'angle opposé.*

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX CÔTÉS.

1244. $\text{tang}.\frac{1}{2}\partial AB : -\text{tang}.\frac{1}{2}\partial AC :: \frac{\cos.(C+\frac{1}{2}\partial C)}{\cos.\frac{1}{2}\partial C} : \frac{\cos.(B+\frac{1}{2}\partial B)}{\cos.\frac{1}{2}\partial B}$.

$$\partial AB : -\partial AC :: \cos.C : \cos.B.$$

Les variations des côtés
Sont proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

1245. $\partial AB : -\partial AC :: \cos.AB\sin.A\,\text{tang}.B - \cos.A : 1$, (VII. 12°).

1246. $\partial AB : -\partial AC :: 1 : \cos.AC\sin.A\,\text{tang}.C - \cos.A$, (VII. 10°), (1244).

1247.* $\partial AB : -\partial AC :: \frac{\sin.AB}{\sin.AC} : \frac{\cos.AC - \cos.BC\cos.AB}{\cos.AB - \cos.BC\cos.AC}$, (VII. 11°, 9°), (1244).

1248.* $\delta AB : -\delta AC :: 1 : \frac{1 - \text{tang. } AC \text{ cot. } AB \text{ cos. } A}{\text{tang. } AC \text{ cot. } AB - \text{cos. } A}$, (VII. 26[e]).

Si $A = 90^\circ$;

1249. $\frac{\text{sin. } \frac{1}{2}\delta AB}{-\text{sin. } \frac{1}{2}\delta AC} : 1 :: \frac{\text{cos.}(AB + \delta AB)}{\text{sin.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)} : \frac{\text{cos. } AC}{\text{sin.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} :: \frac{\text{cos. } AB}{\text{sin.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)} : \frac{\text{cos.}(AC + \delta AC)}{\text{sin.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)}$.

$\delta AB : -\delta AC :: \text{cot. } AB : \text{cot. } AC$.

Les variations des côtés
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Si $BC = 90^\circ$;

1250. $\text{sin. } \delta AB : -\text{sin. } \delta AC :: \text{sin. } AB \text{ cos.}(AB + \delta AB) : \text{sin.}(AC + \delta AC) \text{cos. } AC$.

$\delta AB : -\delta AC :: \text{sin. } 2AB : \text{sin. } 2AC$, (I. 6[e]).

Les variations des côtés
Sont proportionnelles aux sinus des côtés doubles.

1251. $\text{sin. } \delta AB : -\text{sin. } \delta AC :: \text{cos.}(C + \delta C) : \text{cos. } B :: \text{cos. } C : \text{cos.}(B + \delta B)$.

$\delta AB : -\delta AC :: \text{cos. } C : \text{cos. } B$, (1244).

1252. $\delta AB : \delta AC :: \text{cos. } A : \text{cos.}^2 B :: \text{cos.}^2 C : \text{cos. } A$.

RAPPORTS DES VARIATIONS.

DES DEUX ANGLES.

1253. $\text{tang. } \frac{1}{2}\delta C : -\text{tang. } \frac{1}{2}\delta B :: \frac{\text{cos.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\delta AB} : \frac{\text{cos.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC)}{\text{cos. } \frac{1}{2}\delta AC}$.

$\delta C : -\delta B :: \text{cos. } AB : \text{cos. } AC$.

Les variations des angles
Sont proportionnelles aux cosinus des côtés opposés.

1254 $\delta C : -\delta B :: \text{cos. } C \text{ sin. } BC \text{ tang. } AC + \text{cos. } BC : 1$, (VII. 50[e]).

1255. $\delta C : -\delta B :: 1 : \text{cos. } B \text{ sin. } BC \text{ tang. } AB + \text{cos. } BC$, (VII. 28[e]), (1253).

1256.* $\delta C : -\delta B :: \frac{\text{sin. } C}{\text{sin. } B} : \frac{\text{cos. } B + \text{cos. } A \text{ cos. } C}{\text{cos. } C + \text{cos. } A \text{ cos. } B}$, (VII. 29[e], 27[e]), (1253).

1257.* $\delta C : -\delta B :: \text{tang. } B \text{ cot. } C + \text{cos. } BC : 1 + \text{tang. } B \text{ cot. } C \text{ cos. } BC$, (VII. 8[e]).

Si $A = 90^\circ$;

1258. $\text{sin. } \delta C : -\text{sin. } \delta B :: \text{sin. } C \text{ cos.}(C + \delta C) : \text{sin.}(B + \delta B) \text{ cos. } B$.

$\delta C : -\delta B :: \text{sin. } 2C : \text{sin. } 2B$.

Les variations des angles
Sont proportionnelles aux sinus des angles doubles.

1259. $\sin.\partial C : -\sin.\partial B :: \cos.(AB+\partial AB) : \cos.AC :: \cos.AB : \cos.(AC+\partial AC)$.

$$\partial C : -\partial B :: \cos.AB : \cos.AC, \text{ (1253)}.$$

1260. $\partial C : -\partial B :: \cos.BC : \cos.^2AC :: \cos.^2AB : \cos.BC$, (1028; 10°, 7°).

Si $BC = 90°$;

1261. $\sin.\frac{1}{2}\partial C : -\sin.\frac{1}{2}\partial B :: \frac{\cos.(C+\partial C)}{\sin.(C+\frac{1}{2}\partial C)} : \frac{\cos.B}{\sin.(B+\frac{1}{2}\partial B)} :: \frac{\cos.C}{\sin.(C+\frac{1}{2}\partial C)} : \frac{\cos.(B+\partial B)}{\sin.(B+\frac{1}{2}\partial B)}$.

$$\partial C : -\partial B :: \cot.C : \cot.B.$$

Les variations des angles
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

D'UN CÔTÉ ET DE L'ANGLE OPPOSÉ.

1262. * $\sin.\frac{1}{2}\partial AB : \sin.\frac{1}{2}\partial C :: \frac{\sin.AB}{\cos.(AB+\frac{1}{2}\partial AB)} : \frac{\sin.C}{\cos.(C+\frac{1}{2}\partial C)}$.

$$\partial AB : \partial C :: \text{tang.}AB : \text{tang.}C.$$

Les variations d'un côté et de l'angle oppposé
Sont proportionnelles à leurs tangentes.

1263. $\partial AB : \partial C :: \sin.AC : \sin.A + \cos.A\cos.AC\,\text{tang.}C$, (VII. 35°).

1264. $\partial AB : \partial C :: \sin.BC : \sin.B + \cos.B\cos.BC\,\text{tang.}C$, (VII. 36°), (1262).

1265. $\partial AB : \partial C :: \sin.AC - \cos.AC\cos.A\,\text{tang.}AB : \sin.A$, (VII. 17°), (1262).

1266. $\partial AB : \partial C :: \sin.BC - \cos.BC\cos.B\,\text{tang.}AB : \sin.B$, (VII. 18°), (1262).

De même

1267. * $-\sin.\frac{1}{2}\partial AC : -\sin.\frac{1}{2}\partial B :: \frac{\sin.AC}{\cos.(AC+\frac{1}{2}\partial AC)} : \frac{\sin.B}{\cos.(B+\frac{1}{2}\partial B)}$.

$$-\partial AC : -\partial B :: \text{tang.}AC : \text{tang.}B.$$

1268. $-\partial AC : -\partial B :: \sin.AB : \sin.A + \cos.A\cos.AB\,\text{tang.}B$.

1269. $-\partial AC : -\partial B :: \sin.BC : \sin.C + \cos.C\cos.BC\,\text{tang.}B$.

1270. $-\partial AC : -\partial B :: \sin.AB - \cos.AB\cos.A\,\text{tang.}AC : \sin.A$.

1271. $-\partial AC : -\partial B :: \sin.BC - \cos.BC\cos.C\,\text{tang.}AC : \sin.C$.

RAPPORTS DES VARIATIONS

D'UN CÔTÉ ET DE L'ANGLE ADJACENT.

1272. $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\partial AB : -\tfrac{1}{2}\sin.\partial B :: \frac{\sin. AC}{\cos.\frac{1}{2}\partial AC \cos.(AC+\frac{1}{2}\partial AC)} \times \frac{\cos.(C+\frac{1}{2}\partial C)}{\cos.\frac{1}{2}\partial C} : \sin. B.$

$$\partial AB : -\partial B :: \text{tang. } AC \cos. C : \sin. B.$$

La variation d'un côté
Est à la variation de l'angle adjacent,
Comme le produit de la tang. de l'autre côté variab. par le cos. de l'autre ang. var.
Est au sinus du premier de ces angles.

1273. $\text{tang.}\tfrac{1}{2}\partial AB : -\tfrac{1}{2}\sin.\partial B :: \sin. AB : \frac{\cos.\frac{1}{2}\partial AC \cos.(AC+\frac{1}{2}\partial AC) \sin. C \cos.\frac{1}{2}\partial C}{\cos.(C+\frac{1}{2}\partial C)}.$

$$\partial AB : -\partial B :: \sin. AB : \cos. AC \text{ tang. } C.$$

La variation d'un côté
Est à la variation de l'angle adjacent,
Comme le sinus du même côté
Est au produit du cos. de l'autre côté variable par la tang. de l'autre ang. variab.

1274. $\partial AB : -\partial B :: \cos. AB \text{ tang.} AC - \sin. AB \cos. A : \sin. A$, (VII. 17[e]).

1275. $\partial AB : -\partial B :: \sin. BC : \cos. B \text{ tang.} C + \sin. B \cos. BC$, (VII. 33[e]), (1272).

1276.* $\partial AB : -\partial B :: \frac{\text{tang.} BC - \cos. B \text{ tang.} AB}{\sin. B} : 1 + \cos. B \text{ tang.} AB \text{ tang.} BC$, (VII. 18[e]).

1277.* $\partial AB : -\partial B :: \sin. AB : \frac{\text{tang.} B \cos. AB + \text{tang.} A}{\text{tang.} A \text{ tang.} B \cos. AB - 1}$, (VII. 31[e]).

De même

1278. $-\text{tang.}\tfrac{1}{2}\partial AC : \tfrac{1}{2}\sin.\partial C :: \frac{\sin. AB}{\cos.\frac{1}{2}\partial AB \cos.(AB+\frac{1}{2}\partial AB)} \times \frac{\cos.(B+\frac{1}{2}\partial B)}{\cos.\frac{1}{2}\partial B} : \sin. C.$

$$-\partial AC : \partial C :: \text{tang. } AB \cos. B : \sin. C.$$

1279. $-\text{tang.}\tfrac{1}{2}\partial AC : \tfrac{1}{2}\sin.\partial C :: \sin. AC : \frac{\cos.\frac{1}{2}\partial AB \cos.(AB+\frac{1}{2}\partial AB) \sin. B \cos.\frac{1}{2}\partial B}{\cos.(B+\frac{1}{2}\partial B)};$

$$-\partial AC : \partial C :: \sin. AC : \cos. AB \text{ tang. } B.$$

1280. $-\partial AC : \partial C :: \cos. AC \text{ tang.} AB - \sin. AC \cos. A : \sin. A.$

1281. $-\partial AC : \partial C :: \sin. BC : \cos. C \text{ tang.} B + \sin. C \cos. BC.$

1282.* $-\partial AC : \partial C :: \text{tang.} BC - \cos. C \text{ tang.} AC : (1 + \cos. C \text{ tang.} AC \text{ tang.} BC) \sin. C.$

1283.* $-\partial AC : \partial C :: (\text{tang.} A \text{ tang.} C \cos. AC - 1) \sin. AC : \text{tang.} C \cos. AC + \text{tang.} A.$

Si $A = 90°$;

1284. $\frac{1}{2}\sin.\delta AB : -\sin\frac{1}{2}\delta B :: \sin. AB \cos.(AB + \delta AB) : \frac{\cos. B}{\sin.(B + \frac{1}{2}\delta B)}$.

$$\delta AB : -\delta B :: \sin. 2AB : 2 \cot. B.$$

La variation d'un côté
Est à la variation de l'angle adjacent,
Comme le sinus du double de ce côté
Est au double de la cotangente du même angle.

De même

1285. $-\frac{1}{2}\sin.\delta AC : \sin.\frac{1}{2}\delta C :: \sin. AC \cos.(AC + \delta AC) : \frac{\cos. C}{\sin.(C + \frac{1}{2}\delta C)}$.

$$-\delta AC : \delta C :: \sin. 2AC : 2\cot. C.$$

Si $BC = 90°$;

1286. $\sin.\frac{1}{2}\delta AB : -\frac{1}{2}\sin.\delta B :: \frac{\cos. AB}{\sin.(AB + \frac{1}{2}\delta AB)} : \sin. B \cos.(B + \delta B)$.

$$\delta AB : -\delta B :: 2\cot. AB : \sin. 2B.$$

La variation d'un côté
Est à celle de l'angle adjacent,
Comme le double de la cotangente du même côté
Est au sinus du double du même angle.

De même

1287. $-\sin.\frac{1}{2}\delta AC : \frac{1}{2}\sin.\delta C :: \frac{\cos. AC}{\sin.(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} : \sin. C \cos.(C + \delta C)$.

$$-\delta AC : \delta C :: 2\cot. AC : \sin. 2C.$$

Quantités constantes AB, AC; ou *deux côtés.*

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX ANGLES OPPOSÉS AUX CÔTÉS CONSTANS.

1288.* $\tan.\frac{1}{2}\delta B : \tan.\frac{1}{2}\delta C :: \tan.(B + \frac{1}{2}\delta B) : \tan.(C + \frac{1}{2}\delta C)$.

$$\delta B : \delta C :: \tan. B : \tan. C.$$

Les variations des angles opposés aux côtés constans
Sont proportionnelles aux tangentes de ces mêmes angles.

1289. $\delta B : \delta C :: \cos. C : \sin. BC \cot. AC - \cos. BC \cos. C$, (VII. 15°).

1290. $\delta B : \delta C :: \cos. AB - \cos. BC \cos. AC : \cos. AC - \cos. BC \cos. AB$, (VII. 11°).

1291. $\delta B : \delta C :: \sin. BC \cot. AB - \cos. BC \cos. B : \cos. B$, (VII. 18°), (1288).

1292. $\delta B : \delta C :: 1 : \frac{\sin. AB \cot. AC - \cos. AB \cos. A}{\sin. AC \cot. AB - \cos. AC \cos. A}$, (VII. 16°, 17°), (1288).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIÈME CÔTÉ ET D'UN ANGLE ADJACENT.

1293. $-\sin. \tfrac{1}{2}\delta BC : \text{tang.} \tfrac{1}{2}\delta B :: \sin. (BC + \tfrac{1}{2}\delta BC) : \cot. (C + \tfrac{1}{2}\delta C)$.

$$-\delta BC : \delta B :: \sin. BC : \cot. C.$$

La variation du troisième côté
Est à la variation d'un angle adjacent,
Comme le sinus du même côté
Est à la cotangente de l'autre angle adjacent.

1294.* $-\sin. \tfrac{1}{2}\delta BC : \sin. \tfrac{1}{2}\delta B :: \sin. (B + \tfrac{1}{2}\delta B) : \frac{\cot. AB \sin. (BC + \frac{1}{2}\delta BC) - \cos. B \cos (BC + \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin. (BC + \delta BC)}$.

$$-\delta BC : \delta B :: \sin. B : \cot. AB - \cot. BC \cos. B.$$

1295. $-\delta BC : \delta B :: \sin. AB \sin. A : \cos. C$, (VII. 19°), (1293).

1296. $-\delta BC : \delta B :: \sin. AB : \cos. AB \sin. B - \cot. A \cos. B$ (VII. 12°).

De même

1297. $-\sin. \tfrac{1}{2}\delta BC : \text{tang.} \tfrac{1}{2}\delta C :: \sin. (BC + \tfrac{1}{2}\delta BC) : \cot. (B + \tfrac{1}{2}\delta B)$.

$$-\delta BC : \delta C :: \sin. BC : \cot. B.$$

1298.* $-\sin. \tfrac{1}{2}\delta BC : \sin. \tfrac{1}{2}\delta C :: \sin. (C + \tfrac{1}{2}\delta C) : \frac{\cot. AC \sin. (BC + \frac{1}{2}\delta BC) - \cos. C \cos. (BC + \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin. (BC + \delta BC)}$

$$-\delta BC : \delta C :: \sin. C : \cot. AC - \cot. BC \cos. C.$$

1299. $-\delta BC : \delta C :: \sin. AC \sin. A : \cos. B$.

1300. $-\delta BC : \delta C :: \sin. AC : \cos. AC \sin. C - \cot. A \cos. C$.

Si $AC = 90°$;

1301. $\tfrac{1}{2} \sin. \delta BC : \sin. \tfrac{1}{2}\delta B :: \sin. (BC + \delta BC) \cos. BC : \frac{\cos. B}{\sin. (B + \frac{1}{2}\delta B)}$.

$$\delta BC : \delta B :: \sin. 2\, BC : 2 \cot. B.$$

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90°,

Comme le sinus du double du côté variable
Est au double de la cotangente du même angle.

1302. $-\ \partial BC : \partial B :: \cos. AB : \cos. C \cot. C.$

Si $AB = 90°$;

On changera C en B, et B en C, dans les analogies (1301, 1302).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIÈME CÔTÉ ET DE L'ANGLE OPPOSÉ.

1303. $-\sin.\frac{1}{2}\partial BC : -\sin.\frac{1}{2}\partial A :: \sin. AB \sin. AC \sin(A+\frac{1}{2}\partial A) : \sin.(BC+\frac{1}{2}\partial BC).$

$$-\ \partial BC : -\ \partial A :: \sin. AB \sin. AC \sin. A : \sin. BC.$$

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé,
Comme le produit du rectangle des sinus des côtés constans par le sinus de l'angle qu'ils comprennent
Est au sinus du côté variable.

1304. $-\ \partial BC : -\ \partial A :: \sin. AB \sin. B : 1$, (VII. 20°).

1305. $-\ \partial BC : -\ \partial A :: \sin. AC \sin. C : 1$, (VII. 4°).

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé,
Comme le produit du sinus d'un côté constant par le sinus de l'angle opposé à l'autre côté constant est au rayon.

Si $AC = 90°$, ou si $AB = 90°$;

1306. $-\sin.\frac{1}{2}\partial BC : -\sin.\frac{1}{2}\partial A :: \frac{\cos. BC}{\sin.(BC+\frac{1}{2}\partial BC)} : \frac{\cos. A}{\sin.(A+\frac{1}{2}\partial A)}.$

$$-\ \partial BC : -\ \partial A :: \cot. BC : \cot. A.$$

Les variations du côté et de l'angle opposé
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DE L'ANGLE COMPRIS ENTRE LES CÔTÉS CONSTANS, ET DE L'UN DES DEUX AUTRES ANGLES.

1307. $-\sin.\frac{1}{2}\partial A : \frac{1}{2}\sin. \partial B :: \frac{1}{\sin.^2 AC} : \frac{\cos. AB \cos. \frac{1}{2}\partial A - \sin. AB \cot. AC \cos.(A+\frac{1}{2}\partial A)}{\sin. BC \sin.(BC+\partial BC)}.$

$$-\ \partial A : \partial B :: \sin.^2 BC : \sin.^2 AC (\cos. AB - \sin. AB \cot. AC \cos. A).$$

1308.* $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\sin.\delta B :: \frac{1}{\sin.(B+\delta B)} : \frac{\cos.AB\sin.B\sin.(A+\frac{1}{2}\delta A)-\cos.B\cos.(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.(A+\delta A)}$

$$-\delta A : \delta B :: 1 : (\cos.AB - \cot.B\cot.A)\sin.^2B.$$

1309. $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\sin.\delta B :: \frac{\sin.(A+\delta A)}{\sin.(B+\delta B)} : \frac{\cos.C\sin.(A+\frac{1}{2}\delta A)+\cos.B\sin.\frac{1}{2}\delta A}{\sin.A}.$

$$-\delta A : \delta B :: \sin.A : \sin.B\cos.C.$$

La variation de l'angle opposé au côté variable
Est à la variation de l'un des angles adjacens,
Comme le sinus du même angle opposé
Est au produit du sinus du même angle adjacent par le cos. du troisième angle.

1310. $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \mathrm{tang}.\frac{1}{2}\delta B :: \frac{\sin.^2(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.BC} : \sin.AC \times \frac{\sin.(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.A} \times \frac{\sin.C}{\mathrm{tang}.(C+\frac{1}{2}\delta C)}.$

$$-\delta A : \delta B :: \sin.BC : \sin.AC\cos.C$$

La variation de l'angle opposé au côté variable
Est à la variation de l'un des angles adjacens,
Comme le sinus du côté variable
Est au produit du sinus du côté opposé au même angle adjacent par le cos. de l'autre angle adjacent.

1311. $-\delta A : \delta B :: \sin.^2BC : \cos.AB - \cos.BC\cos.AC$, (VII. 11[e]).

1312. $-\delta A : \delta B :: 1 : \cos.AB - \sin.AB\cos.B\cot.BC$, (VII. 28[e]).

De même

1313. $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\sin.\delta C :: \frac{1}{\sin.^2AB} : \frac{\cos.AC\cos.\frac{1}{2}\delta A - \sin.AC\cot.AB\cos.(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.BC\sin.(BC+\delta BC)}.$

$$-\delta A : \delta C :: \sin.^2BC : \sin.^2AB(\cos.AC - \sin.AC\cot.AB\cos.A).$$

1314.* $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\sin.\delta C :: 1 : \sin.(C+\delta C) \times \frac{\cos.AC\sin.C\sin.(A+\frac{1}{2}\delta A)-\cos.C\cos.(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.(A+\delta A)}.$

$$-\delta A : \delta C :: 1 : (\cos.AC - \cot.C\cot.A)\sin.^2C.$$

1315. $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\sin.\delta C :: \frac{\sin.(A+\delta A)}{\sin.(C+\delta C)} : \frac{\cos.B\sin.(A+\frac{1}{2}\delta A)-\cos.C\sin.\frac{1}{2}\delta A}{\sin.A}.$

$$-\delta A : \delta C :: \sin.A : \sin.C\cos.B$$

1316. $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \mathrm{tang}.\frac{1}{2}\delta C :: \frac{\sin.^2(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.BC} : \sin.AB \times \frac{\sin.(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.A} \times \frac{\sin.B}{\mathrm{tang}.(B+\frac{1}{2}\delta B)}.$

$$-\delta A : \delta C :: \sin.BC : \sin.AB\cos.B.$$

1317. $-\delta A : \delta C :: \sin.^2BC : \cos.AC - \cos.BC\cos.AB.$

1318. $-\delta A : \delta C :: 1 : \cos.AC - \sin.AC\cos.C\cot.BC.$

Si $AB = 90°$;

1319. $\sin. \frac{1}{2}\delta A : \frac{1}{2}\sin. \delta B :: \frac{\sin. A}{\cos.(A + \frac{1}{2}\delta A)} : \sin. B \cos.(B + \delta B)$.

$$\delta A : \delta B :: 2 \,\text{tang.}\, A : \sin. 2B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constans
Est à la variation de l'autre angle adjacent au côté de 90°,
Comme le double de la tangente du premier angle
Est au sinus du double du second angle.

1320. $\sin. \delta A : \sin. \delta C :: \sin.(A + \delta A) \cos. A : \sin.(C + \delta C) \cos. C$.

$$\delta A : \delta C :: \sin. 2A : \sin. 2C.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constans
Et la variation de l'angle opposé au côté de 90°
Sont proportionnelles aux sinus de ces mêmes angles doubles.

1321. $- \sin. \delta A : \sin. \delta C :: \sin.(BC + \delta BC) : \cos. B$.

$$- \delta A : \delta C :: \sin. BC : \cos. B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constans
Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90°,
Comme le sinus du côté variable
Est au cosinus du troisième angle.

1322. $- \sin. \delta A : \sin. \delta C :: \cos. AC : \cos. B \cos.(B + \delta B)$.

$$- \delta A : \delta C :: \cos. AC : \cos.^2 B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constans
Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90°,
Comme le cosinus de l'autre côté constant
Est au quarré du cosinus du troisième angle.

Si $AC = 90°$;

On changera B en C, et C en B dans les analogies (1319 à 1322).

Quantités constantes B, C; ou *deux angles.*

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX CÔTÉS OPPOSÉS AUX ANGLES CONSTANS.

1323. * $\text{tang.} \frac{1}{2}\delta AC : \text{tang.} \frac{1}{2}\delta AB :: \text{tang.}(AC + \frac{1}{2}\delta AC) : \text{tang.}(AB + \frac{1}{2}\delta AB)$.

$$\delta AC : \delta AB :: \text{tang.}\, AC : \text{tang.}\, AB$$

Les variations des côtés opposés aux angles constans
Sont proportionnelles aux tangentes des mêmes côtés.

1324. $\delta AC : \delta AB :: \cos. AB : \sin. A \cot. B + \cos. A \cos. AB$, (VII. 34°).

1325. $\delta AC : \delta AB :: \cos. C + \cos. A \cos. B : \cos. B + \cos. A \cos. C$, (VII. 29°).

1326. $\delta AC : \delta AB :: \sin. A \cot. C + \cos. A \cos. AC : \cos. AC$, (VII. 35°), (1323).

1327. $\delta AC : \delta AB :: 1 : \frac{\sin. C \cot. B + \cos. C \cos. BC}{\sin. B \cot. C + \cos. B \cos. BC}$, (VII. 33°, 36°), (1323).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIÈME ANGLE ET D'UN CÔTÉ ADJACENT.

1328. $\sin. \frac{1}{2}\delta A : \text{tang}. \frac{1}{2}\delta AC :: \sin. (A + \frac{1}{2}\delta A) : \cot. (AB + \frac{1}{2}\delta AB)$.

$$\delta A : \delta AC :: \sin. A : \cot. AB.$$

La variation du troisième angle
Est à la variation d'un côté adjacent,
Comme le sinus du même angle
Est à la cotangente de l'autre côté adjacent.

1329.* $\sin. \frac{1}{2}\delta A : \sin. \frac{1}{2}\delta AC :: \sin. (AC + \frac{1}{2}\delta AC) : \frac{\cot. C \sin. (A + \frac{1}{2}\delta A) + \cos. AC \cos. (A + \frac{1}{2}\delta A)}{\sin. (A + \delta A)}$,

$$\delta A : \delta AC :: \sin. AC : \cot. C + \cos. AC \cot. A.$$

1330. $\delta A : \delta AC :: \sin. BC \sin. C : \cos. AB$, (VII°. 1°), (1328).

1331. $\delta A : \delta AC :: \sin. C : \cos. C \sin. AC + \cot. BC \cos. AC$, (VII. 30°).

De même

1332. $\sin. \frac{1}{2}\delta A : \text{tang}. \frac{1}{2}\delta AB :: \sin. (A + \frac{1}{2}\delta A) : \cot. (AC + \frac{1}{2}\delta AC)$.

$$\delta A : \delta AB :: \sin. A : \cot. AC.$$

1333.* $\sin. \frac{1}{2}\delta A : \sin. \frac{1}{2}\delta AB :: \sin. (AB + \frac{1}{2}\delta AB) : \frac{\cot. B \sin. (A + \frac{1}{2}\delta A) + \cos. AB \cos (A + \frac{1}{2}\delta A)}{\sin. (A + \delta A)}$;

$$\delta A : \delta AB :: \sin. AB : \cot. B + \cos. AB \cot. A.$$

1334. $\delta A : \delta AB :: \sin. BC \sin. B : \cos. AC$.

1335. $\delta A : \delta AB :: \sin. B : \cos. B \sin. AB + \cot. BC \cos. AB$.

Si $B = 90°$;

1336. $\frac{1}{2} \sin. \delta A : \sin. \frac{1}{2}\delta AC :: \sin. (A + \delta A) \cos. A : \frac{\cos. AC}{\sin. (AC + \frac{1}{2}\delta AC)}$.

$$\delta A : \delta AC :: \sin. 2 A : 2 \cot. AC.$$

La variation de l'angle
Est à la variation de l'hypoténuse,
Comme le sinus du double de l'angle variable
Est au double de la cotangente de l'hypoténuse.

1337. $\delta A : \delta AC :: \cos. C : \cos. AB \cot. AB.$

Si $C = 90°$;

On changera B en C, et C en B, dans les analogies (1336, 1337).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIÈME ANGLE ET DU CÔTÉ OPPOSÉ.

1338. $\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \sin. B \sin. C \sin. (BC + \frac{1}{2}\delta BC) : \sin. (A + \frac{1}{2}\delta A).$

$\delta A : \delta BC :: \sin. B \sin. C \sin. BC : \sin. A.$

La variation de l'angle
Est à la variation du côté opposé;
Comme le produit du rectangle des sinus des angles constans par le sinus du côté compris
Est au sinus de l'angle variable.

1339. $\delta A : \delta BC :: \sin. AB \sin. B : 1$, (VII. 1°).

1340. $\delta A : \delta BC :: \sin. AC \sin. C : 1$, (VII. 23°).

La variation de l'angle
Est à la variation du côté opposé,
Comme le produit du sinus d'un angle constant par le sinus du côté opposé à l'autre angle constant est au rayon.

Si $B = 90°$, ou si $C = 90°$;

1341. $\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \frac{\cos. A}{\sin. (A + \frac{1}{2}\delta A)} : \frac{\cos. BC}{\sin. (BC + \frac{1}{2}\delta BC)}.$

$\delta A : \delta BC :: \cot. A : \cot. BC.$

Les variations de l'angle et du côté opposé
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ COMPRIS ENTRE LES ANGLES CONSTANS, ET DE L'UN DES DEUX AUTRES CÔTÉS.

1342.* $\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\frac{1}{2}\sin.\delta AC} : 1 :: \frac{1}{\sin.(AC+\delta AC)} : \frac{\cos.C \sin.AC \sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC) + \cos.AC \cos.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.(BC+\delta BC)}$;

$$\delta BC : \delta AC :: 1 : (\cos.C + \cot.AC \cot.BC) \sin.^2 AC.$$

1343. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \frac{1}{2}\sin.\delta AC :: \frac{\sin.(BC+\delta BC)}{\sin.(AC+\delta AC)} : \frac{\cos.AB \sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC) - \cos.AC \sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\sin.BC}$,

$$\delta BC : \delta AC :: \sin.BC : \sin.AC \cos.AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'un des deux autres côtés,
Comme le sinus du premier côté
Est au produit du sinus du second côté par le cosinus du troisième côté.

1344. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \tang.\frac{1}{2}\delta AC :: \frac{\sin.^2(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.A} : \sin.B \times \frac{\sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.BC} \times \frac{\sin.AB}{\tang.(AB+\frac{1}{2}\delta AB)}$;

$$\delta BC : \delta AC :: \sin.A : \sin.B \cos.AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'un des deux autres côtés,
Comme le sinus de l'angle variable
Est au produit du sinus de l'angle constant opposé à ce dernier côté par le cosinus du troisième côté.

1345. $\delta BC : \delta AC :: \sin.^2 A : \cos.C + \cos.A \cos.B$, (VII. 29°).

1346. $\delta BC : \delta AC :: 1 : \cos.C + \sin.C \cos.AC \cot.A$, (VII. 10°).

De même

1347.* $\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\frac{1}{2}\sin.\delta AB} : 1 :: \frac{1}{\sin.(AB+\delta AB)} : \frac{\cos.B \sin.AB \sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC) + \cos.AB \cos.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.(BC+\delta BC)}$,

$$\delta BC : \delta AB :: 1 : (\cos.B + \cot.AB \cot.BC) \sin.^2 AB.$$

1348. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \frac{1}{2}\sin.\delta AB :: \frac{\sin.(BC+\delta BC)}{\sin.(AB+\delta AB)} : \frac{\cos.AC \sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC) - \cos.AB \sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\sin.BC}$,

$$\delta BC : \delta AB :: \sin.BC : \sin.AB \cos.AC.$$

1349. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \tang.\frac{1}{2}\delta AB :: \frac{\sin.^2(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.A} : \sin.C \times \frac{\sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.BC} \times \frac{\sin.AC}{\tang.(AC+\frac{1}{2}\delta AC)}$;

$$\delta BC : \delta AB :: \sin.A : \sin.C \cos.AC.$$

1350. $\delta BC : \delta AB :: \sin.^2 A : \cos. B + \cos. A \cos. C.$

1351. $\delta BC : \delta AB :: 1 : \cos. B + \sin. B \cos. AB \cot. A.$

Si $C = 90°$;

1352. $\sin. \frac{1}{2} \delta BC : \frac{1}{2} \sin. \delta AC :: \frac{\sin. BC}{\cos. (BC + \frac{1}{2} \delta BC)} : \sin. AC \cos. (AC + \delta AC).$

$$\delta BC : \delta AC :: 2 \tan g. BC : \sin. 2 AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'autre côté,
Comme le double de la tangente du premier côté
Est au sinus du double du second côté.

1353. $\sin. \delta BC : \sin. \delta AB :: \sin. (BC + \delta BC) \cos. BC : \sin. (AB + \delta AB) \cos. AB.$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin. 2 BC : \sin. 2 AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'hypoténuse,
Comme le sinus du double du même côté
Est au sinus du double de l'hypoténuse.

1354. $\sin. \delta BC : \sin. \delta AB :: \sin. (A + \delta A) : \cos. AC.$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin. A : \cos. AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'hypoténuse,
Comme le sinus de l'angle variable
Est au cosinus du côté adjacent.

1355. $\sin. \delta BC : \sin. \delta AB :: \cos. B : \cos. AC \cos. (AC + \delta AC).$

$$\delta BC : \delta AB :: \cos. B : \cos.^2 AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'hypoténuse,
Comme le cosinus de l'angle oblique constant
Est au quarré du cosinus du côté opposé.

Si $B = 90°$;

On changera C en B et B en C dans les analogies (1352 à 1355).

Démonstration des Analogies de la Table précédente.

1356. Soit le triangle sphérique ABC converti en ABD, le côté Fig. 79.
AB et l'angle adjacent A demeurant constans; et soient CBD $= \mathfrak{d}$B, D $=$ C $+ \mathfrak{d}$C, CD $= \mathfrak{d}$AC, et BD $=$ BC $+ \mathfrak{d}$BC, comme nous avons fait (617). Ces expressions adoptées, on entendra facilement les démonstrations suivantes.

1357. Les analogies finies (1213) dépendent de la proportion entre les sinus des côtés et les sinus des angles opposés (1051), appliquée au triangle BCD.

1358. Chaque analogie infinitésimale précédée dans un même article d'une analogie finie, est déduite de cette analogie finie, par les moyens déjà employés (622, 636, 638).

1359. En substituant dans les analogies (1213) la valeur de sin. C, (VII. 6e), on obtient les analogies (1214). C'est ce que signifie le renvoi à la formule 6e de la table VII, que l'on a vu (1214), et c'est ainsi que doivent s'entendre toutes les citations ou renvois pareils dans ces analogies.

Et quand la substitution n'a pas été faite dans l'article qui précède immédiatement, mais dans un article plus éloigné, alors j'ai cité de plus l'article où elle a eu lieu. Par exemple, dans les analogies (1216), la citation (VII. 19e), (1213) signifie que l'expression contenue dans la formule 19e de la table VII a été substituée dans les analogies de l'article 1213.

Ce n'est que dans les analogies infinitésimales, et non dans les analogies finies, que les substitutions indiquées par la table ont été faites; à l'exception cependant des substitutions dont nous venons de parler pour les articles (1214, 1216).

1360. Le triangle ABD donne (1051), sin. BD : sin. A :: sin. AD : sin. ABD; ou (1356), sin. (BC $+ \mathfrak{d}$BC) : sin. A :: sin. (AC $+ \mathfrak{d}$AC) : sin. (B $+ \mathfrak{d}$B). Substituez le second de ces deux derniers rapports au premier, dans l'analogie finie (1214), et vous aurez l'analogie finie (1215). L'utilité de cette analogie (1215), ainsi que des cinq analogies (1235, 1303, 1307, 1310, 1313), m'a engagé à

Fig. 29. les comprendre parmi les autres, quoiqu'elles s'écartent du système général (1212) de la table, en ce qu'elles contiennent dans le second rapport quatre parties du triangle.

1361. Lorsque $A = 90°$, la formule (VII. 34°) donne tang. AC $=$ tang. B sin. AB, parce qu'alors sin. $A = 1$ et cos. $A = 0$, (73). Prenant dans cette équation les différentielles finies, selon la formule (II. 33°), et observant que AB est constant, on aura $\frac{\sin. \delta AC}{\cos. AC \cos. (AC + \delta AC)} = \frac{\sin. \delta B}{\cos. B \cos. (B + \delta B)} \times \sin. AB$. En substituant dans cette équation la valeur de sin. AB prise de l'équation précédente, (qu'on se souvienne que c'est ainsi que dans toutes les différentiations semblables nous ferons disparaître la quantité constante), on en tirera aussitôt la première analogie (1217).

1362. Si $AB = 90°$, alors l'équation (VII. 34°) devient tang. AC $= \frac{\text{tang. B}}{\text{sin. A}}$, et l'on a toujours la même analogie finie (1217), en différentiant cette équation, et observant que A est constant.

1363. L'analogie infinitésimale (1217), déduite comme nous l'avons dit (1358), se trouve simplifiée dans le second rapport, au moyen de la formule (I. 6°). Parmi les analogies suivantes, beaucoup d'autres ont été simplifiées de la même manière; ce à quoi nous ne nous arrêterons pas.

1364. Dans le triangle sphérique BCD, on a (IX. 4°), $\cos. \frac{1}{2}(BCD + D) : \cos. \frac{1}{2}(BCD - D) :: \text{tang.} \frac{1}{2} CD : \text{tang.} \frac{1}{2}(BD + BC)$. Or $\cos. \frac{1}{2}(BCD + D) = \cos. \frac{1}{2}(180° - \overline{C - D}) = (7) \sin. \frac{1}{2}(C - D) = \sin. -\frac{1}{2}\delta C$, (1356), $= -\sin. \frac{1}{2}\delta C$, (75); et $\cos. \frac{1}{2}(BCD - D) = \cos. \frac{1}{2}(180° - \overline{C + D}) = \sin. \frac{1}{2}(C + D) = \sin. (C + \frac{1}{2}\delta C)$. Substituons ces valeurs dans le premier rapport de l'analogie ci-dessus, mettons dans le second les expressions (1356), et nous aurons la première analogie (1218).

1365. Prenons les différentielles finies (II. 31°, 32°, 34°) dans l'équation (VII. 17°) exprimée comme il suit, (621), sin. A cot. C $=$ sin. AC cot. AB $-$ cos. AC cos. A, et en nous rappelant que A et AB sont constans, nous aurons $- \frac{\sin. \delta C \sin. A}{\sin. C \sin. (C + \delta C)} = 2 \sin. \frac{1}{2}\delta AC \times (\cos. \overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC} \cot. AB + \sin. \overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC} \cos. A)$.

Substituons à cot. AB sa valeur (VII. 35°), multiplions l'équation par $\frac{\sin. AC}{\sin A.}$, et, en observant que $\cos. (AC + \frac{1}{2} \partial AC) \times \cos. AC + \sin.(AC + \frac{1}{2} \partial AC) \sin. AC = \cos. \frac{1}{2} \partial AC$, (II. 4°), nous aurons $- \sin. \partial C \times \frac{\sin. AC}{\sin. C \sin. (C + \partial C)} = 2 \sin. \frac{1}{2} \partial AC \times$ $(\cot. C \cos. \overline{AC + \frac{1}{2} \partial AC} + \cos. \frac{1}{2} \partial AC \cot. A)$; équation qui donne la première analogie (1219).

1366. On verra (1425) ce que signifie l'astérisque *. Quant à la forme fractionnaire adoptée dans l'un des termes de cette analogie, et qu'on retrouvera dans beaucoup d'autres, elle n'a d'autre but que de faire entrer l'analogie dans une seule ligne, au moyen de l'emploi de plus petits caractères typographiques.

1367. L'analogie infinitésimale (1220) n'a point d'analogie différentielle finie qui lui corresponde; pour la former il faudrait avoir à substituer dans la première (1218) une valeur exacte de $\sin. (C + \frac{1}{2} \partial C)$ correspondante à celle de sin. C que nous avons substituée dans la seconde analogie (1218). C'est par la même cause qu'on ne trouve point d'analogies finies dans quelques autres articles de la table.

1368. Lorsque $A = 90°$, la première analogie (1221) se tire immédiatement de la première (1219).

Quand $AB = 90°$, la formule (VII. 17°) devient $\cot. C = - \cos. AC \cot. A$. Prenant les différentielles, et observant qu'elles auront le même signe après la substitution (1361) de la valeur de cot. A que l'équation précédente donne négative, on aura la première analogie (1222).

1369. On remarquera l'utilité des signes que j'ai insérés dans les analogies différentielles, puisqu'ils font connaître dans le cas présent que quand $AB = 90°$, les changemens de C et de AC ne se font plus en sens contraire, pourvu cependant que AC et C soient de la même espèce. Le changement de signe, par comparaison avec les analogies précédentes, fait voir combien il serait facile, tant dans ce cas que dans d'autres pareils de la table, de prendre l'accroissement pour le décroissement, ou *vice versâ*, en

Fig. 79. se servant des analogies infinitésimales telles qu'elles ont été données jusqu'à présent, c'est-à-dire sans aucune distinction de signes.

1370. Dans le triangle BCD, on a (IX. 2°), $\sin.\frac{1}{2}(BD + BC) : \sin.\frac{1}{2}(BD - BC) :: \cot.\frac{1}{2}CBD : \tang.\frac{1}{2}(BCD - D)$. En substituant les expressions (1356), et observant que $\tang.\frac{1}{2}(BCD - D) = \cot.(C + \frac{1}{2}\partial C)$, (1364), et que le second rapport peut s'exprimer comme il suit, $\tang.(C + \frac{1}{2}\partial C) : \tang.\frac{1}{2}\partial B$, l'analogie se convertit en la première (1223).

1371. La formule (VII. 31°) peut se tranformer ainsi; $-\cot.BC \sin.AB = -\sin.B \cot.A - \cos.B \cos.AB$. Prenons les différentielles finies, nous aurons $\frac{\sin.\partial BC \sin.AB}{\sin.BC \sin.(BC + \partial BC)} = 2\sin.\frac{1}{2}\partial B \times (\cos.AB \sin.\overline{B + \frac{1}{2}\partial B} - \cos.\overline{B + \frac{1}{2}\partial B} \cot.A)$. Substituons la valeur (VII. 13°) de cot. A, multiplions l'équation par $\frac{\sin.B}{\sin.AB}$; et remarquant que $\sin.(B + \frac{1}{2}\partial B)\sin.B + \cos.(B + \frac{1}{2}\partial B)\cos.B = \cos.\frac{1}{2}\partial B$, (II. 4°), ce que nous observons pour la dernière fois, nous aurons la première analogie (1224).

1372. Si $A = 90°$, la formule (VII. 31°) donne $\cos.B = \tang.AB \cot.BC$. En faisant négatifs les deux membres, différentiant, et réduisant comme il a été dit (1361), on trouvera la première analogie (1226).

De l'équation $\tang.A \cot.BC = \sin.B$, à laquelle se réduit la formule (VII. 13°) quand $AB = 90°$, on parvient de la même manière, mais sans changement de signes, à la première analogie (1227).

1373. Dans le triangle BCD on a (1092), $\tang.\frac{1}{2}(BD + BC) : \tang.\frac{1}{2}(BD - BC) :: \tang.\frac{1}{2}(BCD + D) : \tang.\frac{1}{2}(BCD - D)$, ou (1364), $:: -\cot.\frac{1}{2}\partial C : \cot.(C + \frac{1}{2}\partial C)$, ou encore $:: \tang.(C + \frac{1}{2}\partial C) : -\tang.\frac{1}{2}\partial C$. Employez dans le premier de ces deux rapports les expressions (1356); de ce premier et du dernier, vous formerez la première analogie (1228).

1374. Qu'on observe le changement du signe dans l'analogie (1232) comparée à la précédente. Il est clair que, dans le cas où $AB = 90°$, le produit des termes moyens $-\partial C$ et $-\cos.B \sin.BC$ sera positif; ∂C acquiert par conséquent le signe positif.

1375. Dans le triangle BCD, on a (IX. 4°), $\text{tang.}\frac{1}{2}(BD-BC) : \text{tang.}\frac{1}{2}CD :: \sin.\frac{1}{2}(BCD-D) : \sin.\frac{1}{2}(BCD+D)$. En procédant comme on a fait (1364), cette analogie se transforme en la première (1233).

1376. En prenant les différentielles finies dans l'équation (VII. 26°), dont on aura changé les signes pour rendre positives les différentielles des cosinus, on a $2\sin.\frac{1}{2}\delta BC \sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC) = 2\sin.\frac{1}{2}\delta AC \times (\cos. AB \sin. \overline{AC+\frac{1}{2}\delta AC} - \sin. AB \cos. \overline{AC+\frac{1}{2}\delta AC} \cos. A)$. Substituant la valeur (VII. 7°) de cos. A, et multipliant l'équation par sin. AC, on aura cos. AB multiplié par la valeur de $\cos.\frac{1}{2}\delta AC$, énoncée (1365); puis, la première analogie (1234).

1377. Si dans l'opération (1371), on emploie la valeur de cot. A dans le triangle ABD, c'est-à-dire $\frac{\sin. AB \cot.(BC+\delta BC) - \cos. AB \cos.(B+\delta B)}{\sin(B+\delta B)}$, il en résulte $\frac{\sin.\delta BC \sin. AB}{\sin. BC \sin.(BC+\delta BC)} = 2\sin.\frac{1}{2}\delta B \times \Big(\cos. AB \times \frac{\cos.(B+\delta B)\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)+\sin(B+\delta B)\sin.(B+\frac{1}{2}\delta B)}{\sin.(B+\delta B)} - \cot.(BC+\delta BC) \cos.(B+\frac{1}{2}\delta B) \times \frac{\sin. AB}{\sin.(B+\delta B)}\Big) = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta B}{\sin.(B+\delta B)}\Big(\cos. AB \cos.\frac{1}{2}\delta B - \cot.(BC+\delta BC)\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)\sin. AB\Big)$. Qu'on multiplie par sin. (BC+δBC) l'équation entre le premier et le troisième membre, puis, qu'on écrive $\frac{\sin.\delta B}{\cos.\frac{1}{2}\delta B}$ au lieu de $2\sin.\frac{1}{2}\delta B$; on aura $\frac{\sin.\delta BC \sin. AB}{\sin. BC} = \frac{\sin.\delta B}{\sin.(B+\delta B)} \times \Big(\cos. AB \sin.(BC+\delta BC) - \frac{\cos.(BC+\delta BC)\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)\sin. AB}{\cos.\frac{1}{2}\delta B}\Big)$. Enfin qu'on introduise la valeur (1215) de sin. δB, et on aura $\sin.\delta BC = \frac{\sin.\delta AC}{\sin.(AC+\delta AC)} \times \Big(\cos. AB \sin.(BC+\delta BC) - \frac{\sin AB \cos.(BC+\delta BC)\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)}{\cos.\frac{1}{2}\delta B}\Big)$; d'où se déduit la première analogie (1235).

1378. Quand A = 90°, le dernier terme de l'équation (1376) disparaît; et mettant dans cette équation, au lieu de cos. AB, $\frac{\cos. BC}{\cos. AC}$, valeur qui se tire, dans ce cas, de la formule (VII. 26°), on en déduit la première analogie (1237).

Fig. 79. Si c'est AB qui égale 90°, la formule citée donne $\cos. BC = \sin. AC \cos. A$. En différentiant cette équation, et la réduisant comme nous avons dit (1361), on en tire la première analogie (1238).

1379. Dans le triangle BCD, on a (IX. 2°), $\cos.\frac{1}{2}(BD + BC) : \cos.\frac{1}{2}(BD - BC) :: \cot.\frac{1}{2} CBD : \tang.\frac{1}{2}(BCD + D)$. Ces expressions, transformées comme on a déjà fait plus d'une fois, donneront la première analogie (1239).

1380. En différentiant l'équation (VII. 12°), substituant la valeur (VII. 29°) de cos. AB, et réduisant, comme on l'a vu de même plusieurs fois, on aura la première analogie (1240).

La première analogie (1242) se déduit immédiatement de la première (1240).

1381. Nous obtiendrons la première (1243), en différentiant l'équation $\cos. C = -\cos. A \cos. B$, à laquelle se réduit la formule (VII. 12°), dans le cas où $AB = 90°$. Les différentielles ont un même signe dans l'analogie (1243), par une cause semblable à celle que nous avons exposée (1368).

Fig. 80. 1382. Actuellement soit converti en ADE le triangle ABC; de manière qu'on ait $DE = BC$: alors $DF + FE = BF + FC$, et par conséquent $FE - BF = FC - DF$. Et dans les triangles BFE, CFD, on a (IX. 4°)

$$\sin.\tfrac{1}{2}(EBF + E) : \sin.\tfrac{1}{2}(EBF - E) :: \tang.\tfrac{1}{2}BE : \tang.\tfrac{1}{2}(FE - BF);$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(CDF + C) : \sin.\tfrac{1}{2}(CDF - C) :: \tang.\tfrac{1}{2}CD : \tang.\tfrac{1}{2}(FC - DF).$$

Qu'on observe 1°. que la valeur du dernier terme est la même dans les deux analogies, ensorte que si on les divise l'une par l'autre, le quotient de ces deux termes est 1; 2°. que $BE = \delta AB$, et que $CD = -\delta AC$; 3°. que (1356), $E = B + \delta B$, et que $D = C + \delta C$. En opérant comme on a fait (1364), on a $\sin.\frac{1}{2}(EBF + E) = \cos.\frac{1}{2}\delta B$; et $\sin.\frac{1}{2}(EBF - E) = \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)$; et de même $\sin.\frac{1}{2}(CDF + C) = \cos.\frac{1}{2}\delta C$, et $\sin.\frac{1}{2}(CDF - C) = \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Avec ces substitutions, les deux analogies ci-dessus, divisées l'une par l'autre, donneront la première (1244).

1383. Substituez dans l'analogie (1247) la valeur (VII. 26°) de cos. BC; mettez $1 - \sin.^2 AC$ au lieu de $\cos.^2 AC$, et $1 - \sin.^2 AB$ au

lieu de $\cos.^2 AB$; puis divisez le second rapport par $\sin.^2 AB \sin. AC \cos. AC$, et vous aurez l'analogie (1248).

1384. Quand $A = 90°$, on a (VII. 26°), $\cos. BC = \cos. AB \cos. AC$. Le second membre de cette équation étant un produit de deux variables, il paraît d'abord impossible d'en avoir les différentielles finies (621). C'est la première fois dans le cours de cet Ouvrage, que nous nous trouvons obligés de recourir à la sécante. La difficulté disparaît en faisant, par exemple, $\cos. BC \text{ séc. } AB = \cos. AC$.

1385. Pour avoir l'expression de la différentielle finie d'une sécante, j'observe que $\cos. B - \cos. A = \frac{1}{\text{séc. } B} - \frac{1}{\text{séc. } A} = \frac{\text{séc. } A - \text{séc. } B}{\text{séc. } B \text{ séc. } A} = (\text{séc. } A - \text{séc. } B) \cos. B \cos. A$. Donc (II. 24°), $\text{séc. } A - \text{séc. } B = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(A - B) \sin. \frac{1}{2}(A + B)}{\cos. A \cos. B}$; d'où je tire, en procédant comme pour les autres différentielles (212),

$$\delta \text{ séc. } B = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \delta B \sin. (B + \frac{1}{2} \delta B)}{\cos. B \cos. (B + \delta B)}.$$

1386. Maintenant, en différentiant l'équation $\cos. AC = \cos. BC \text{ séc. } AB$, j'aurai donc $- 2 \sin. \frac{1}{2} \delta AC \sin. (AC + \frac{1}{2} \delta AC) = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \delta AB \sin. (AB + \frac{1}{2} \delta AB)}{\cos. AB \cos. (AB + \delta AB)} \times \cos. BC$. En mettant $\cos. AB \cos. AC$ au lieu de $\cos. BC$, je trouve l'analogie formée par les deux premiers rapports (1249). Celle que forment le premier et le troisième, s'obtient en différentiant l'équation $- \cos. AB = - \text{séc. } AC \cos. BC$.

1387. Quand $BC = 90°$, on a (VII. 7°), $\cos. A = - \cot. AB \cot. AC$, ou $\cos. A \text{ tang. } AB = - \cot. AC$. Différentiant et observant que l'une des différentielles devient négative par la substitution de la valeur négative de $\cos. A$, ainsi qu'on l'a dit (1368), on aura la première analogie (1250).

1388. Dans le cas où $BC = 90°$, on a aussi $\cos. AC = \cos. B \sin. AB$, (VII. 28°); et par la même raison, dans le triangle ADE, $\cos. AE = \cos. D \sin. AD$, ou $\cos. (AB + \delta AB) = \cos. (C + \delta C) \times \sin. (AC + \delta AC)$: faisant ces substitutions dans la première analogie (1250), on aura les deux premiers rapports (1251).

Fig 80. 1389. Dans le même cas, on a encore (VII. 8°), $\cos. A = - \cos. B \cos. C = - \cos. D \cos. F = - \cos. (C + d C) \cos. (B + d B)$. Donc 1°. $\cos. (C + d C) : \cos. B :: \cos. C : \cos. (B + d B)$, second et troisième des rapports (1251). 2°. En prenant, dans l'équation $\cos. A = - \cos. B \cos. C$, la valeur de $\cos. B = - \frac{\cos. A}{\cos. C}$, et celle de $\cos. C = - \frac{\cos. A}{\cos. B}$, et les substituant alternativement dans l'analogie infinitésimale (1251), on aura les analogies (1252).

1390. Si l'on change tous les signes (56) dans la première analogie (1244), et qu'ensuite on substitue aux expressions de cette analogie celles du triangle supplémentaire, par la méthode facile que j'ai donnée (1043), on observera que AB diminuant, l'angle opposé dans le triangle supplémentaire doit croître; de sorte qu'au lieu de $- \text{tang.} \frac{1}{2} d AB$, on aura $\text{tang.} \frac{1}{2} d C$, et, par la même raison, $- \text{tang} \frac{1}{2} d B$ au lieu de $\text{tang.} \frac{1}{2} d AC$. On sait d'ailleurs que le cosinus d'un arc et celui de son supplément diffèrent pour le signe (66); on aura donc $\cos. (AB + \frac{1}{2} d AB)$, au lieu de $- \cos. (C - \frac{1}{2} d C)$, et $\cos. (AC + \frac{1}{2} d AC)$ au lieu de $- \cos. (B - \frac{1}{2} d B)$. Mais au lieu de $\cos. \frac{1}{2} d C$, on a $\cos. \frac{1}{2} d AB$; et $\cos. \frac{1}{2} d AC$, au lieu de $\cos. \frac{1}{2} d B$, sans aucun changement de signe (75). C'est d'après ces observations que se forme la première analogie (1253).

1391. Substituons dans l'analogie (1256) la valeur (VII. 8°) de $\cos. A$; mettons $1 - \sin.^2 B$ au lieu de $\cos.^2 B$, et $1 - \sin.^2 C$ au lieu de $\cos.^2 C$; puis divisons le second rapport par $\sin. B \cos. B \times \sin.^2 C$, nous trouverons l'analogie (1257).

1392. Quand $A = 90°$, on a (VII 25°), $\cos. BC = \cot. B \cot. C$, ou $\cos. BC \, \text{tang.} C = \cot. B$. Différentions à l'ordinaire (1361), et nous aurons la première analogie (1258).

1393 Dans le même cas, $\cos B = \cos. AC \sin. C$, (VII. 10°), et par la même raison, $\cos. D = \cos. AE \sin. E$, ou $\cos (C + d C) = \cos (AB + d AB) \sin. (B + d B)$. Ces substitutions dans l'analogie finie (1258) donneront les deux premiers rapports (1259). De plus (VI. 13°), $\cos. BC = \cos. AB \cos AC = \cos AE \cos. AD = \cos. (AB + d AB) \cos (AC + d AC)$. Donc $\cos. (AB + d AB) : \cos. AC :: \cos. AB : \cos. (AC + d AC)$, second et troisième rapports (1259).

1394. Soit maintenant BC = 90°. Alors (VII. 8°), cos. A = — cos. B cos. C; par conséquent cos. A séc. C = — cos. B, et cos. A séc. B = — cos. C. En différentiant ces deux équations, et chassant cos. A au moyen de celle qui précède, on parvient aux analogies (1261).

1395. Prenant les différentielles finies dans l'équation sin. BC × sin. C = sin. AB sin. A, (VII. 1°), puis substituant $\frac{\text{sin. AB}}{\text{sin. C}}$ à la quantité constante $\frac{\text{sin. BC}}{\text{sin. A}}$, on aura la première analogie (1262).

1396. En changeant B en C et C en B dans les analogies (1262 à 1266), on obtient les analogies (1267 à 1271). On pourrait donner dans celles-ci le signe positif aux deux variations, puisqu'elles sont dans un même sens; mais je leur ai donné le signe négatif, pour conserver l'uniformité entre ces analogies et les analogies (1244 et suiv.).

1397. Lorsque A ou que BC = 90°, il n'en résulte aucune analogie différente des précédentes (1262 à 1271); mais alors ces analogies se simplifient, comme je l'indiquerai (1432).

1398. La première analogie (1272) se trouve en prenant le produit, terme à terme, des analogies finies (1244, 1267).

Mettant dans l'analogie (1272), sin. AB : sin. C au lieu de sin. AC : sin. B, on a la première (1273).

1399. Substituons la valeur (VII. 18°) de tang. C dans l'analogie (1275); réduisons le second rapport à un même dénominateur que nous supprimerons; écrivons 1 — sin.²BC au lieu de cos.²BC; enfin divisons le second rapport par sin. BC cos. BC cot. AB; nous aurons l'analogie (1276).

Substituons dans celle-ci la valeur (VII. 31°) de tang. BC; réduisons encore le second rapport à un même dénominateur que nous supprimerons, et mettons 1 — sin.²B au lieu de cos.²B. Divisons ensuite ce second rapport par sin. B cos. B; multiplions-le par cos. AB tang. A, et observons que sin.²AB + cos.²AB = 1 : nous trouverons l'analogie (1277).

1400. Les analogies (1278 à 1283) s'obtiennent en changeant B en C et C en B dans les analogies (1272 à 1277), et changeant

Fig. 80. les signes des différentielles, pour conserver l'uniformité, comme nous l'avons dit (1396); ce qu'on observera aussi dans les analogies (1285), qui sont tirées des analogies (1284).

1401. La première (1284) se trouve en différentiant à l'ordinaire l'équation cos. B = tang. AB cot. BC, donnée par la formule (VII. 31e), dans le cas où $A = 90°$.

1402. Quand $BC = 90°$, de la formule (VII. 13e) on tire tang. A $\times$ cos. AB = — tang. B. Différentiant et se rappelant ce qui a été dit (1368) sur le changement de signe, on aura la première analogie (1286).

En changeant dans celle-ci B en C, on a la première (1287).

Fig. 81. 1403. Soit converti en ABD le triangle ABC, de sorte qu'on ait $AD = AC$. Les deux côtés AB, AC seront constant, et on aura $CBD = \partial B$, $ABD = B + \partial B$, $D = C + \partial C$, $CAD = -\partial A$, (en appelant toujours A l'angle BAC du triangle primitif ABC), et $BD = BC + \partial BC$.

1404. Puisque sin. AB : sin. AC :: sin. C : sin. B :: sin. D : sin. ABD, la dernière analogie donne (II. 13e), tang. $\frac{1}{2}$ (ABD + B) : tang. $\frac{1}{2}$ (ABD — B) :: tang. $\frac{1}{2}$ (D + C) : tang. $\frac{1}{2}$ (D — C). Substituez les expressions ci-dessus, vous aurez la première analogie (1288).

1405. Les arcs finis qui se trouvent ensemble dans l'une quelconque des analogies (1289 à 1292) ne sont réunis dans aucune autre de ces analogies. En général j'ai eu l'attention d'éviter cette réunion dans la table. Il serait inutile, il serait même nuisible de multiplier les analogies par ce moyen. Cependant celles que donne La Caille dans le cas présent sont $\partial B : \partial C$ :: tang. B : tang. C :: sin. AC cos. C : sin. AB cos. B :: sin. B cos. C : sin. C cos. B. Je ne sais de quel usage peuvent être les deux derniers rapports, qui l'un et l'autre supposent que l'on connaisse les angles B et C; et quel sera le Calculateur qui, dans ce cas, ne préférera pas de se servir du rapport tang. B : tang. C? Les analogies de La Caille sont plus d'une fois susceptibles de cette légère critique, et j'ai cru devoir en faire l'observation, d'autant plus que d'autres Auteurs les ont adoptées.

Lorsque l'un des côtés constans égale 90°, il n'en résulte d'autres analogies que celles données (1288 à 1292).

1406. Dans le triangle BCD, on a (IX. 2°), $\sin. \frac{1}{2}(BC + BD) : \sin. \frac{1}{2}(BC - BD) :: \cot. \frac{1}{2} CBD : \tang. \frac{1}{2}(BDC - BCD)$. Mais $BDC - BCD = D + ADC - (ACD - C) = D + C$, le triangle CAD étant isoscèle. En substituant cette valeur et les expressions (1403) dans l'analogie ci-dessus, on aura la première (1293).

1407. Puisque (VII. 9°), $\sin. BC \sin. AB \cos. B = \cos. AC - \cos. BC \cos. AB$; en employant la cosécante, on aura $\sin. AB \cos. B = \cos. AC \operatorname{cos\acute{e}c}. BC - \cot. BC \cos. AB$. La différentielle finie de la cosécante se déduit de la formule (II. 23°), en opérant comme nous l'avons fait (1385), pour trouver la différentielle de la sécante : sa valeur est

$$- \partial \operatorname{cos\acute{e}c}. B = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \partial B \cos. (B + \frac{1}{2} \partial B)}{\sin. B \sin. (B + \partial B)}.$$

1408. Différentions maintenant l'équation précédente, après en avoir changé les signes pour conserver l'uniformité avec l'analogie (1293). Nous aurons $2 \sin. \frac{1}{2} \partial B \sin. (B + \frac{1}{2} \partial B) \sin. AB = - \cos. AC \times \frac{-2 \sin. \frac{1}{2} \partial BC \cos. (BC + \frac{1}{2} \partial BC)}{\sin. BC \sin. (BC + \partial BC)} - \frac{\sin. \partial BC . \cos. AB}{\sin. BC \sin. (BC + \partial BC)}$. Substituons au lieu de cos. AC sa valeur (VII. 28°), $2 \sin. \frac{1}{2} \partial BC \cos. \frac{1}{2} \partial BC$ au lieu de $\sin. \partial BC$, et, (II. 4°), $\cos. BC \cos. (BC + \frac{1}{2} \partial BC) + \sin. BC \sin. (BC + \frac{1}{2} \partial BC)$ au lieu de $\cos. \frac{1}{2} \partial BC$: réduisons et divisons l'équation par 2 sin. AB; nous aurons la première analogie (1294).

En changeant B en C et C en B dans les analogies (1293 à 1296), on a les analogies (1297 à 1300).

1409. Quand $AC = 90°$, on a (VII. 9°), $\cos. B = - \cot. BC \cot. AB$. Changez les signes, différentiez à l'ordinaire (1368), vous aurez la première analogie (1301).

Dans ce même cas, on a aussi (VII. 30°), $\cos. AB = \cos. C \sin. BC$, ou $\sin. BC = \frac{\cos. AB}{\cos. C}$. Substituez cette valeur dans l'analogie infinitésimale (1293), vous aurez l'infinitésimale (1302).

1410. Si au lieu de $AC = 90°$, on avait $BC = 90°$, on aurait alors (VII. 11°), $\cos. C = \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$, et (1293), $- \partial BC : \partial B :: 1 : \cot. C$. Connaissant les deux côtés constans, on trouverait, par l'équation, l'angle C, qui servirait ensuite pour résoudre l'analogie.

Fig 81. C'est à quoi se réduit la formule compliquée $dB : dBC :: \cos. AB : \sqrt{(\sin.^2 AC - \cos.^2 AB)}$, que donne *l'Almanach astronomique* de Berlin, pour l'année 1750. Mais nous verrons (1477) que cette analogie est assez défectueuse pour l'usage auquel on l'applique.

1411. La première analogie (1303) se trouve en différentiant l'équation (VII. 26°).

Quand un des côtés constans est de 90°, la formule (VII 26°) devient $\cos. BC = \cos. A \sin. AB$, ou $\cos. BC = \cos. A \sin. AC$. En différentiant l'une ou l'autre de ces équations, on aura la première analogie (1306).

1412. Quand $BC = 90°$, on a (VII. 11°), $\cos. C = \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$. Les deux côtés constans supposés connus, cette équation donnera l'angle C, qu'on emploiera ensuite pour résoudre l'analogie (1305), sans qu'il soit besoin d'introduire un radical (1472) de la forme de l'expression citée (1410).

1413. La formule (VII. 16°) donne $\cot. B = \sin. AB \cot. AC \times \text{coséc}. A - \cos. AB \cot. A$. Changeons les signes; différentions, en prenant (1407) la différentielle de la cosécante; mettons $2 \sin. \frac{1}{2} dA \cos. \frac{1}{2} dA$ au lieu de $\sin. dA$: enfin substituons, ou l'expression $\frac{\sin.^2 AC}{\sin. BC \sin. (BC + dBC)}$ à $\frac{\sin. B \sin. (B + dB)}{\sin. A \sin. (A + dA)}$, et nous parviendrons à la première analogie (1307); ou la valeur (VII. 34°) de $\cot. AC$, et, (II. 4°), $\cos. A \cos. (A + \frac{1}{2} dA) + \sin. A \sin. (A + \frac{1}{2} dA)$ au lieu de $\cos. \frac{1}{2} dA$, et, en réduisant, nous aurons la première analogie (1308).

En substituant dans celle-ci la valeur (VII. 29°) de cos. AB, réduisant le dernier terme de l'analogie à un même dénominateur, et observant que $\sin. (A + \frac{1}{2} dA) \cos. A - \cos. (A + \frac{1}{2} dA) \sin. A = \sin. \frac{1}{2} dA$, (II. 2°), on obtiendra la première analogie (1309).

1414. En passant de cette première à la seconde, le terme $\cos. B \sin. \frac{1}{2} dA$ disparaît, parce que le produit de ce terme par le premier de l'analogie donnerait l'infiniment-petit du second ordre $\sin.^2 \frac{1}{2} dA$, (193).

1415. La première (1310) s'obtient en divisant l'une par l'autre

les analogies différentielles finies (1293, 1303), et substituant la valeur (VII. 24°) de sin. AB.

Les analogies (1313 à 1318) s'obtiennent en changeant B en C et C en B dans les analogies (1307 à 1312).

1416. Quand AB = 90°, on a (VII. 16°), tang. B = sin. A tang. AC, et (VII. 17°), cot. C = — cos. AC cot. A. En différentiant (1361) chacune de ces deux équations, on aura les premières analogies (1319, 1320).

1417. Dans le même cas, on a (VII. 12°), cos. C = — cos. A cos. B. Si l'on substitue cette valeur dans la première analogie (1320), sin. ∂A devient négatif, et l'analogie se change en celle-ci, — sin. ∂A : sin. ∂C :: sin. (A + ∂A) : sin. (C + ∂C) cos. B. Mais dans le triangle ABD, on a sin. BAD = sin. BD sin. D, (1051), ou sin. (A + ∂A) = sin. (BC + ∂BC) sin. (C + ∂C). Substituons cette valeur dans la dernière analogie ci-dessus, et nous en tirerons la première (1321).

1418. Enfin quand AB = 90°, le triangle ABD donne (VII. 28°), cos. AD = cos. ABD sin. BD, ou sin. (BC + ∂BC) = $\frac{\text{cos. AC}}{\text{cos. (B} + \partial\text{B)}}$. En substituant cette valeur dans la première analogie (1321), on aura la première (1322).

1419. Toutes les analogies (1323 à 1355) se trouvent en prenant les parties du triangle opposées à celles que renferment les analogies (1288 à 1322), et faisant usage du triangle supplémentaire, après avoir changé les signes conformément à ce que nous avons dit (1390). Au surplus, pour diminuer la difficulté relativement aux signes, j'ai renvoyé à la table VII : c'est de cette table que j'ai tiré les valeurs dont les substitutions m'ont donné celles d'entre les analogies infinitésimales, que j'ai formées par cette voie.

Dans la première analogie (1328) on observera qu'au lieu de donner au troisième terme le signe négatif, tel qu'il devrait l'avoir, j'ai rendu le premier terme positif; ce qui a lieu dans plusieurs des analogies suivantes. Dans l'analogie (1337), le quatrième terme est celui qui serait négatif, si l'on ne rendait pas le premier terme positif.

Pour tirer la première analogie (1338) de la première (1303), il ne faut pas changer les signes dans celle-ci.

Fig. 81. Dans le premier rapport de l'analogie finie (1341), j'ai préféré les signes positifs, pour conserver l'uniformité avec les analogies précédentes.

J'ai omis les analogies correspondantes aux analogies (1307), (1313), parce que je n'en vois pas l'utilité.

S'il reste quelques difficultés pour l'intelligence des analogies (1323 à 1355), on pourra chercher la démonstration directe de ces analogies, par les méthodes que j'ai employées pour démontrer les analogies correspondantes (1288 à 1322).

1420. On observera que la dernière analogie (1355), dont nous ferons usage (1508), n'exigeant que deux données AC et B pour faire connaître le rapport entre les deux différentielles, cette analogie est préférable à celle que La Caille a donnée (n° 310), et qui exige que l'on connaisse non-seulement AC et B, mais encore AB.

Réflexions et explications sur l'usage des analogies (1213 à 1355).

1421. Peut-être ne verra-t-on pas au premier coup-d'œil quelle est l'utilité des analogies différentielles finies, analogies absolument nouvelles, et dont la forme est souvent compliquée.

1°. Ces analogies renferment la solution immédiate, et ordinairement la plus simple, des problèmes relatifs à deux triangles obliquangles ayant deux parties communes ou égales, lorsque l'énoncé du problème conduit à la considération de quelques différences entre les parties de l'un de ces triangles et les parties de l'autre: nous en verrons divers exemples (chap. XXIII.).

2°. Les analogies différentielles finies apprendront au Calculateur ce qu'il y a de négligé dans les infinitésimales correspondantes, de sorte qu'en se servant de celles-ci, il saura à-peu-près à quelle erreur il s'expose, et qu'il pourra ou diminuer cette erreur, ou l'éviter, en ayant recours aux analogies finies; avantage réel, surtout quand les différentielles sont divisées ou multipliées par des quantités voisines de zéro ou de l'infini, parce qu'alors les analogies infinitésimales sont sujettes à des erreurs énormes, et même infiniment grandes.

1422. Et quand on n'en tirerait d'autre utilité que de rendre

les analogies infinitésimales très-exactes, même lorsque les *différences* sont de quelques degrés, ce serait encore un très-grand avantage de la règle que j'ai proposée (941), et qui consiste à employer les lignes trigonométriques correspondantes aux parties qui constituent le triangle, au milieu de chaque variation, c'est-à-dire sin. $(A + \frac{1}{2}\partial A)$ au lieu de sin. A, et ainsi des autres variables. Par exemple, l'analogie infinitésimale (1311) devient, au moyen de cette règle,

$$-\partial A : \partial B :: \sin.^2(BC + \tfrac{1}{2}\partial BC) : \cos.AB - \cos.AC\cos.(BC + \tfrac{1}{2}\partial BC).$$

1423. Pour plus de sureté, au lieu de $-\partial A : \partial B$, on pourrait employer le premier rapport fini (1310), c'est-à-dire $-$ sin. $\frac{1}{2}\partial A$: tang. $\frac{1}{2}\partial B$: mais l'usage apprendra que souvent même on peut passer les limites assignées (628) sans inconvénient dans les analogies différentielles des triangles sphériques, parce que les deux premiers termes sont de même nature, et que, par conséquent, en employant les arcs au lieu de leurs lignes trigonométriques, les deux erreurs se compensent de manière que celle qui peut affecter le résultat est ordinairement insensible.

1424. On ne se sert ordinairement des analogies infinitésimales que pour chercher la valeur d'une différentielle; et l'on pourrait penser que mes analogies finies ne sont pas susceptibles du même usage, puisqu'elles renferment souvent dans le second rapport les différentielles contenues dans le premier. Mais j'ai déjà donné (675, 676) deux méthodes pour calculer la valeur d'une différentielle précisément dans ce cas. De plus il est nécessaire d'observer que les analogies finies sont toutes rigoureuses, et par conséquent propres à donner la valeur exacte de l'une quelconque des quantités qu'elles contiennent, et non pas seulement de l'une des différentielles.

1425. Au reste j'ai marqué d'un astérisque * les analogies au lieu desquelles on peut employer, et quelquefois même avec avantage, la méthode suivante, qui est rigoureuse, et que me fournit la table VII. Huit de ces analogies (1247, 1248, 1256, etc.) sont infinitésimales, et n'ont point d'analogie finie correspondante; c'est surtout dans le cas de ces huit analogies que la méthode que je vais proposer est avantageuse.

Soit, par exemple, ∂C l'inconnue dans l'analogie (1219) Puisque AB et A sont les parties constantes relativement à cette analogie, qui d'ailleurs ne renferme point AB, je cherche dans la table VII une valeur de AB exprimée par le moyen de AC, A et C, parties contenues dans cette même analogie. La formule 35ᵉ me donne pour le triangle ABC, $\text{tang. AB} = \frac{\text{sin. AC}}{\text{sin. A cot. C} + \text{cos. A cos. AC}}$; Fig. 29.

et pour le triangle ABD, $\text{tang. AB} = \frac{\text{sin. AD}}{\text{sin. A cot. D} + \text{cos. A cos. AD}}$. En mettant en équation ces deux valeurs de tang. AB, dans la seconde desquelles je substitue les expressions (1356), j'ai........ $(\text{sin. A cot. } \overline{C + \partial C} + \text{cos. A cos. } \overline{AC + \partial AC}) \text{ sin. AC} = (\text{sin. A cot. C} + \text{cos. A cos. AC}) \text{ sin. } \overline{AC + \partial AC}$. Pour simplifier, je divise par cos. A; il reste $\text{cot. } \overline{C + \partial C} \text{ sin. AC tang. A} = (\text{tang. A cot. C} + \text{cos. AC}) \text{ sin. } \overline{AC + \partial AC} - \text{sin. AC cos. } \overline{AC + \partial AC}$; équation qui donne immédiatement la valeur de $\text{cot. } \overline{C + \partial C}$, et par conséquent aussi celle de ∂C.

Si de cette équation on voulait déduire la valeur de AC, ou celle de $(AC + \partial AC)$, on aurait recours à la méthode (948). Il suffit d'en prévenir une fois pour tous les cas semblables.

1426. Je vais donner ici, réunies et par ordre, toutes les équations qu'on peut former à l'exemple de celle ci-dessus, qui sera la première : je les accompagne des numéros que portent les analogies correspondantes marquées d'un astérisque; et ces numéros sont suivis de ceux des formules de la table VII, desquelles chaque équation est déduite.

1219. 35ᵉ, $\text{tang. A cot.} (C + \partial C) = \left(\frac{\text{tang. A cot. C}}{\text{sin. AC}} + \text{cot. AC}\right) \times \ldots$
$\text{sin.} (AC + \partial AC) - \text{cos.} (AC + \partial AC)$.

1224. 15ᵉ, $\text{tang. AB cot.} (BC + \partial BC) = \left(\frac{\text{tang. AB cot. BC}}{\text{sin. B}} - \text{cot. B}\right)$
$\times \text{ sin.} (B + \partial B) + \text{cos.} (B + \partial B)$.

1228. 1ᵉ, $\text{sin.} (BC + \partial BC) \text{ sin} (C + \partial C) = \text{sin. BC sin. C}$.

1234. 7ᵉ, $\text{cos.} (BC + \partial BC) = \left(\frac{\text{cos. BC}}{\text{sin. AC}} - \text{cos. AB cot. AC}\right) \times \ldots$
$\text{sin.} (AC + \partial AC) + \text{cos. AB cos.} (AC + \partial AC)$.

1240. 29°, $\cos.(C+\partial C)=\left(\frac{\cos. C}{\sin. B}+\cos. A \cot. B\right)\sin.(B+\partial B)$
$-\cos. A \cos.(B+\partial B)$.

1247. 7°, $\left(\frac{\cos. BC}{\sin. AB \sin. AC}-\cot. AB \cot. AC\right)\sin.(AB+\partial AB)\sin.$
$(AC+\partial AC)+\cos.(AB+\partial AB)\cos.(AC+\partial AC)=\cos. BC$.

1248. 26°, $\cos. A \sin.(AB+\partial AB)\sin.(AC+\partial AC)+\cos.(AB+\partial AB)$
$\cos.(AC+\partial AC)=\cos. A \sin. AB \sin. AC+\cos. AB \cos. AC$.

1256. 25°, $\left(\frac{\cos. A}{\sin. B \sin. C}+\cot. B \cot. C\right)\sin.(B+\partial B)\sin.(C+\partial C)$
$-\cos.(B+\partial B)\cos.(C+\partial C)=\cos. A$.

1257. 8°, $\cos. BC \sin.(B+\partial B)\sin.(C+\partial C)-\cos.(B+\partial B)$
$\cos.(C+\partial C)=\cos. BC \sin. B \sin. C-\cos. B \cos. C$.

1262. 1°, $\sin. C \sin.(AB+\partial AB)=\sin. AB \sin.(C+\partial C)$.

1267. 2°, $\sin. B \sin.(AC+\partial AC)=\sin. AC \sin.(B+\partial B)$.

1276. 13°, $\cot. BC \sin.(AB+\partial AB)-\cos.(B+\partial B)\cos.(AB+\partial AB)$
$-\left(\frac{\sin. AB \cot. BC}{\sin. B}-\cos. AB \cot. B\right)\sin.(B+\partial B)=0$.

1277. 31°, $\cot. A \sin.(B+\partial B)+\cos.(B+\partial B)\cos.(AB+\partial AB)$
$-\left(\frac{\sin. B \cot. A}{\sin. AB}+\cos. B \cot. AB\right)\sin.(AB+\partial AB)=0$.

1282. 14°, $\cot. BC \sin.(AC+\partial AC)-\cos.(AC+\partial AC)\cos.(C+\partial C)$
$-\left(\frac{\sin. AC \cot. BC}{\sin. C}-\cos. AC \cot. C\right)\sin.(C+\partial C)=0$.

1283. 32°, $\cot. A \sin.(C+\partial C)+\cos.(C+\partial C)\cos.(AC+\partial AC)$
$-\left(\frac{\sin. C \cot. A}{\sin. AC}+\cos. C \cot. AC\right)\sin.(AC+\partial AC)=0$.

1288. 25°, $\sin. C \sin.(B+\partial B)=\sin. B \sin.(C+\partial C)$.

1294. 28°, $\text{tang}. AB \sin.(BC+\partial BC)\cos.(B+\partial B)=\text{tang}. AB$
$\sin. BC \cos. B+\cos BC-\cos.(BC+\partial BC)$.

1298. 30°, $\text{tang}. AC \sin.(BC+\partial BC)\cos.(C+\partial C)=\text{tang}. AC$
$\sin. BC \cos. C+\cos. BC-\cos.(BC+\partial BC)$.

1308. 34°, $\sin.(A+\partial A)\cot.(B+\partial B)=\sin. A \cot. B+\cos. AB$
$\cos. A-\cos. AB \cos.(A+\partial A)$.

1314. 35°, $\sin.(A + \delta A)\cot.(C + \delta C) = \sin.A\cot.C + \cos.AC\cos.A - \cos.AC\cos.(A + \delta A)$.

1323. 4°, $\sin.AB\sin.(AC + \delta AC) = \sin.AC\sin.(AB + \delta AB)$.

1329. 10°, $\text{tang}.C\sin.(A + \delta A)\cos.(AC + \delta AC) = \text{tang}.C\sin.A\cos.AC + \cos.(A + \delta A) - \cos.A$.

1333. 12°, $\text{tang}.B\sin.(A + \delta A)\cos.(AB + \delta AB) = \text{tang}.B\sin.A\cos.AB + \cos.(A + \delta A) - \cos.A$.

1342. 15°, $\sin.(BC + \delta BC)\cot.(AC + \delta AC) = \sin.BC\cot.AC + \cos.C\cos.(BC + \delta BC) - \cos.C\cos.BC$.

1347. 18°, $\sin.(BC + \delta BC)\cot.(AB + \delta AB) = \sin.BC\cot.AB + \cos.B\cos.(BC + \delta BC) - \cos.B\cos.BC$.

1427. Les règles des signes, que j'ai données (620) pour les analogies différentielles des triangles rectilignes, doivent s'observer aussi dans celles des triangles sphériques. Mais il n'y a jamais lieu d'employer R″, (631), dans les analogies infinitésimales de la Trigonométrie sphérique, attendu que les deux variations qui forment le premier rapport sont toujours de même nature (655), et que par conséquent l'une et l'autre se prennent également en secondes.

1428. Il y a, dans ma table, plus de 70 analogies qui renferment le cosinus de quelque côté ou de la variation de quelque côté, et qui cependant peuvent se transférer aux triangles rectilignes par le moyen des règles que j'ai données (1021). C'est surtout en cela que ces règles me paraissent utiles, puisqu'en supposant leur application, une seule table renferme une collection abondante et complète dans son genre des analogies différentielles des triangles soit sphériques, soit rectilignes. Ces derniers ne fournissent que quatre analogies finies (673, 11° à 14°) qui soient plus simples que celles qu'on déduit des analogies correspondantes des triangles sphériques (1310, 1316, 1303).

1429. Il est clair, 1°. que les analogies relatives au cas où l'un des côtés est de 90°, ne peuvent par leur nature se transférer aux triangles rectilignes, puisqu'il est nécessaire pour cela que l'analogie soit applicable à un triangle infiniment petit (1021); 2°. que dans le cas où un angle est constant, les analogies qui contiennent

dans le premier rapport les variations des deux autres angles, ne peuvent être d'aucune utilité pour les triangles rectilignes, dans lesquels ces deux variations sont nécessairement égales entre elles; 3°. que dans le cas où deux angles sout constans, les analogies qui contiennent la variation du troisième, sont encore opposées à la nature des triangles rectilignes. A l'exception de ces trois classes d'analogies, on pourra traduire utilement pour l'usage des triangles reotilignes les autres analogies de ma table.

1430. Pour donner un exemple de traduction de ce genre, si dans la première analogie (1219) on fait $\sin.\frac{1}{2}\mathfrak{d}AC = \frac{1}{2}\mathfrak{d}AC$, $\sin. AC = AC$, et de plus, $\cos.\frac{1}{2}\mathfrak{d}AC = 1$, et $\cos.(AC + \frac{1}{2}\mathfrak{d}AC) = 1$, parce que ces cosinus sont multipliés par diverses lignes trigonométriques, la proportion devient $\mathfrak{d}AC : -\sin.\mathfrak{d}C :: AC : \sin.C \times \sin.(C + \mathfrak{d}C)\cot.A + \sin.(C + \mathfrak{d}C)\cos.C$. C'est en effet ce qu'on trouve par la Trigonométrie rectiligne, en substituant la valeur (III. 21°) de BC dans l'analogie (673, 1°).

1431. Observons encore que le premier terme du conséquent du second rapport de l'analogie finie (1342) doit se négliger, suivant l'esprit des règles (1021), dans l'application de cette analogie aux triangles rectilignes; puisque le produit $\sin.(AC + \mathfrak{d}AC)\sin.AC \sin.(BC + \frac{1}{2}\mathfrak{d}BC)$ représente un infiniment-petit du troisième ordre. Cette observation a lieu de même pour la première analogie (1347).

1432. J'ai donné des analogies pour le cas où quelqu'une des parties constantes est de 90°; mais il ne faut pas en conclure que ces analogies sont les seules dont on puisse se servir en pareil cas. Par exemple les analogies (1301, 1302), données pour le cas où $AC = 90°$, n'excluent pas l'usage des précédentes (1293 à 1300), dont quelques-unes sont même simplifiées dans ce cas, parce qu'on a alors $\sin. AC = 1$, $\cos. AC = 0$, et $\cot. AC = 0$, (73). Mais nous avons cru devoir donner aussi les analogies (1301, 1302), parce qu'elles ne se déduisent pas immédiatement des précédentes. Il en est de même des autres analogies pareilles, à l'exception des analogies (1221, 1232, 1242) : si je n'ai pas omis celles-c°, c'est à cause de leur rapport avec les analogies (1222, 1231, 1243).

1433. On observera que lorsque le second rapport d'une ana-

logie contient la tangente de l'arc de 90°, il faut éliminer cette tangente, en multipliant le rapport par la cotangente du même arc : autrement l'analogie ne pourrait être simplifiée et ne serait d'aucun usage, puisqu'elle contiendrait une expression de valeur infinie.

1434. La Caille et d'autres Auteurs ont donné quelques analogies infinitésimales pour le cas où quelqu'une des parties variables est de 90°. Pour moi, je me suis borné à la considération des cas où quelqu'une des parties constantes est de 90°, afin que ma table fournît les analogies différentielles finies, même pour les triangles constamment ou rectangles ou rectilatères, (1043). Quoique souvent elles soient moins commodes pour le calcul numérique que ne le sont les proportions (1044 à 1060), il m'a semblé qu'elles devaient être rapportées, ne fût-ce, comme nous l'avons dit (1421, 2°.), que pour servir d'avertissement au Calculateur qui emploiera les infinitésimales correspondantes.

1435. Mais si j'eusse voulu considérer aussi chacune des parties variables comme étant de 90°, et donner les analogies relatives à chacune de ces suppositions, ma table serait devenue beaucoup plus longue, et n'eût pas été beaucoup plus utile. Je me contenterai donc d'indiquer par un exemple comment on peut parvenir en pareils cas à des expressions fort simples. Je suppose qu'on ait à employer la première analogie (1234), et que $BC = 90°$: on aura $\cos. BC = 0$, et $\sin. (BC + \frac{1}{2} \partial BC) = \cos. \frac{1}{2} \partial BC$; ensorte que l'analogie deviendra $\sin. \frac{1}{2} \partial AC : \sin. \frac{1}{2} \partial BC :: \cos. \frac{1}{2} \partial BC$ $\sin. AC : \cos. \frac{1}{2} \partial AC \cos. AB$. Convertissant cette analogie en équation, et réduisant à l'aide de la formule (I. 6°), on trouve $\sin. \partial AC : \sin. \partial BC :: \sin. AC : \cos. AB$, analogie déjà fort simple. Mais quand $BC = 90°$, $\cos. C = \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$, (VII. 11°); donc on a $\sin. \partial AC : \sin. \partial BC :: 1 : \cos. C$, analogie plus simple encore, et qu'on peut employer au lieu de la première (1233), lorsque $BC = 90°$.

1436. Lorsque le triangle variable n'aura *qu'une partie constante*, ou même *qu'il n'en aura point*, les analogies (1213 à 1355) serviront également, avec les conditions et en suivant les règles exposées (680 à 688) pour les triangles rectilignes.

Exemples du calcul des Analogies différentielles des Triangles sphériques.

1437. Supposons que dans l'exemple (1152), il puisse y avoir une erreur de 1° sur le côté BD, ou, ce qui revient au même, que les moyens employés pour mesurer le chemin du bâtiment puissent laisser une incertitude d'un degré. On demande quelle serait en ce cas l'erreur dans la longitude calculée ou dans l'angle au pôle. Il y a alors dans le triangle ABD deux côtés constans, AB, AD, et on cherche la variation de A dépendante de celle du côté opposé BD; circonstances qui sont celles des analogies (1303), dans lesquelles il faut seulement changer C en D. Fig. 57.

On observera d'abord que si l'on ne sait pas en quel sens l'erreur δBD a été commise, on ne peut pas faire usage de l'analogie différentielle finie, dans laquelle il faut employer (BD $\pm\frac{1}{2}\delta$BD). Je fais donc comme il suit le calcul de l'infinitésimale.

$$
\begin{aligned}
\text{log. } (\delta\text{BD} = 3600'') &= 3{,}556303\\
\text{log. sin. } (\text{BD} = 37^\circ\ 25') &= 9{,}783623\\
(1152),\ \text{compl. log. } (\text{sin. AB sin. AD}) &= 0{,}204796\\
\text{compl. log. sin. } (\text{A} = 27^\circ\ 8') &= 0{,}340975\\
\hline
\text{log. } \delta\text{A} &= 3{,}885697
\end{aligned}
$$

Donc un degré d'erreur sur le côté BD produit une erreur de 2° 8' environ sur l'angle A, dans le même sens (620).

1438. Si l'on n'avait pas les analogies infinitésimales, il faudrait, pour arriver à ce résultat, calculer deux fois l'exemple (1152); une première fois en faisant BD = 36° 25', et une seconde en faisant BD = 38° 25'; ensuite on prendrait la demi-différence des deux valeurs de A que fourniraient ces deux calculs. Les analogies infinitésimales sont donc précieuses lorsqu'on ignore si la variation donnée est positive ou négative. Mais au contraire, si on le sait, comme il arrive dans la plupart des cas auxquels on les a appliquées jusqu'à présent, ce même exemple fait reconnaître leur imperfection, et par conséquent l'utilité des analogies finies que j'ai proposées.

Fig. 57. 1439. En effet supposons que l'erreur δBD soit en plus. En employant dans le calcul (1437), sin. (BD + $\frac{1}{2}\delta$BD) = sin. 37° 55′ au lieu de sin. BD, et sin. (A + $\frac{1}{2}\delta$A) = sin. 28° 12′ au lieu de sin. A, comme le prescrit l'analogie finie, on trouve δA = 2° 5′ 2″. L'usage de l'analogie infinitésimale en pareil cas produirait donc environ 3′ d'erreur dans la valeur de δA.

Si on voulait cette valeur avec toute la précision possible, on emploierait dans le calcul précédent sin. 28° 10′ $\frac{1}{2}$ au lieu de sin. 28° 12′, et on trouverait δA = 2° 5′ 8″.

Quant à l'emploi des arcs au lieu des sinus dans le premier rapport de l'analogie, l'épreuve démontrerait que la différence qui en résulte dans le calcul est insensible, comme je l'ai avancé (1423).

1440. Avec les mêmes données dans le triangle ABD, je suppose actuellement que les valeurs de AB et BD soient considérées comme exactes, et qu'il y ait une incertitude d'un degré sur le côté AD, c'est-à-dire sur la latitude du lieu où se trouve le vaisseau. On demande quelle erreur il en résultera pour la longitude, c'est-à-dire pour la valeur de A. Alors les deux côtés AB, BD sont constans, et l'on cherche la variation de l'angle opposé à BD, dépendante de celle du troisième côté. Changeant B en A, A en B et D en C, pour que le triangle BAD de la figure puisse se comparer au triangle ABC de la table, j'observe que c'est le cas des analogies (1293 à 1296). Mais comme nos données sont B = 27° 8′, AB = 71° 30′, AC = 37° 25′, BC = 41° 9′, et δBC = 1°, il est facile de voir qu'il faut avoir recours aux analogies (1294). Je prends l'infinitésimale, et je fais le calcul comme il suit :

log. (−δBC = 3600″) =	3,556303	....	− 3,556303
compl. log. sin. B =	0,340975	log. cot. B =	0,290340
log. cot. AB =	9,524520	log. − cot. BC =	0,058541
	− 3,421798		+ 3,905184

Ces deux logarithmes répondent à − 44′ 1″,2 et à + 2° 13′58″,7 ; et par conséquent on a δB = + 1° 29′ 57″ $\frac{1}{2}$. Dans ce cas les variations δBC et δB se font dans le même sens, parce que nous avons laissé subsister dans le premier rapport le signe négatif

de ∂BC, comme on doit le faire (620), quand la variation ∂BC est en plus : et c'est ainsi qu'il résulte une valeur positive de ∂B.

1441. J'ai donné le signe négatif au logarithme 3,421798, non qu'il soit en effet un logarithme négatif (340), mais parce qu'il correspond à une quantité négative. C'est ce que je ferai souvent dans la suite.

1442. Cherchons maintenant quelle est l'erreur de la formule infinitésimale dont nous venons de nous servir. Pour cela je suppose que l'on sache que la variation de BC est en moins. Je ferai usage du second rapport de l'analogie finie (1294), et en faisant le calcul, je supposerai la valeur de ∂B absolument inconnue, pour donner un exemple de la méthode enseignée (675).

log. (∂BC = 3600″) =	3,556303	....	3,556303
log. cot. AB =	9,524520	log. — cos. B =	9,949364
log. sin. (BC — ½ ∂BC) =	9,813872	... log. cos.	9,880072
compl. log. sin. (BC — ∂BC) =	0,190581	....	0,190581
log. constant	3,085276	log. const. —	3,576320
compl. log. sin. B =	0,340975	....	0,340975
	+ 3,426251		— 3,917295

Ces logarithmes donnent, pour valeur approchée, ∂B = 44′ 28″ — 2° 17′ 46″ = — 1° 33′ 18″. Ce résultat étant négatif, la variation de B est dans le même sens que celle de BC; aux logarithmes constans ci-dessus on doit donc ajouter compl. log. sin. (B — ½ ∂B = 26° 21′); ce qui donne, pour valeur plus approchée, ∂B = 45′ 42″ — 2° 21′ 33″ = — 1° 35′ 51″. Enfin employant, d'après cette approximation, sin. (B — ½ ∂B = 26° 20′), on a pour valeur exacte, ∂B = — 1° 35′ 55″.

Donc dans cet exemple l'analogie infinitésimale serait en erreur de 6′.

On verra (1472, 1477) des erreurs plus graves résultantes de l'emploi des analogies infinitésimales, qui cependant sont les seules qui aient été en usage jusqu'à présent.

1443. Si l'on voulait avoir directement, et par un seul calcul, la valeur de ∂B, quelle que fût d'ailleurs sa grandeur, on déve-

lopperait sin. $(B + \frac{1}{2}\delta B)$, comme nous l'avons dit (676), ou bien on mettrait $\frac{1}{2}$ cos. B — $\frac{1}{2}$ cos. $(B + \delta B)$ au lieu de sin. $(B + \frac{1}{2}\delta B)$ sin. $\frac{1}{2}\delta B$, (II. 17°). Alors appelant $-p$ le produit du premier et du quatrième terme de l'analogie finie, on aurait cos. $(B + \delta B) =$ cos. $B + 2p$. Si dans le calcul précédent on met — sin. $(\frac{1}{2}\delta BC = 30')$ au lieu de δBC, on trouve $p = + 0{,}0061882$. Mais en faisant usage des sinus naturels, cos. $B = 0{,}8899476$: donc cos. $(B + \delta B) = 0{,}8899476 + 0{,}0123764 = 0{,}9023240 =$ cos. 25° 32′ 5″. Or $B = 27° \, 8'$; donc $\delta B = -1° \, 35' \, 55''$.

1444. Si l'on cherchait de même directement la valeur finie de δBC, l'opération serait plus compliquée : on arriverait à une équation dans laquelle seraient contenus sin. δBC et cos. δBC, et l'on résoudrait cette équation par la méthode plus expéditive que j'ai donnée (948). Mais cette recherche de δBC est un des cas dans lesquels il est mieux d'avoir recours à la méthode (1425).

CHAPITRE XXII.

Résumé sur l'application de la Trigonométrie à la résolution des problèmes.

1445. ÉTANT donné un problème quelconque, pourvu qu'il puisse se résoudre par la seule considération des triangles, on en cherchera la solution dans cette Trigonométrie de la manière suivante. 1°. Si les données et la chose cherchée appartiennent à un seul triangle, la solution se trouvera dans l'un des Chapitres X, XI, XVII, XVIII, XX. 2°. Si les données et la chose cherchée se trouvent distribuées en deux triangles, on en cherchera la solution dans les chapitres XII ou XXI, ou en opérant d'après les méthodes (747, 749, 802), ou en ayant recours aux formules (1044 à 1060), selon les cas. 3°. Si les données et la chose cherchée sont tirées de plus de deux triangles, on considérera deux triangles à-la-fois,

on en cherchera les solutions d'après ce que nous venons de dire, et on les liera l'une à l'autre, selon que le cas le permettra, pour arriver à la solution finale demandée.

1446. Au premier aspect ces avertissemens pourront sembler au moins inutiles. Mais on verra dans le chapitre suivant avec quelle facilité, quelle simplicité nous avons résolu la plus grande partie des problèmes de l'Astronomie; soit parce qu'en considérant leurs conditions nous avons suivi la marche facile que nous venons d'indiquer, soit parce que nous avons fait usage d'expressions commodes des différences finies des lignes trigonométriques, expressions qui jusqu'à présent manquaient aux Traités de Trigonométrie : et cet essai sur les problèmes de l'Astronomie nous donne lieu de croire que dans les autres Sciences ou Arts soumis au Calcul, il y a peu de problèmes dont ce Traité ne donne promptement la solution, lorsqu'ils peuvent être résolus par la seule considération des triangles.

CHAPITRE XXIII.

Applications de la Trigonométrie à l'Astronomie.

1447. Ce Chapitre suppose le Lecteur initié dans l'Astronomie dont les élémens ne peuvent entrer dans ce Traité : ceux qui ne les connaîtront pas feront abstraction des théories et des dénominations, s'ils veulent parcourir ce qui suit, et se borneront à étudier les opérations analytiques, qui sont d'un usage général dans les Mathématiques. Je suivrai autant qu'il me sera possible l'ordre des problèmes contenus dans la troisième édition de l'Astronomie de De la Lande, et je renverrai souvent à cet Ouvrage, le meilleur sans contredit, le plus complet et le plus accrédité sur la science sublime de l'Astronomie, dont il augmente encore l'in-

térêt. J'omettrai les problèmes de moindre importance, ainsi que ceux dont j'ai donné les solutions dans l'*Encyclopédie méthodique*, et dans les *Mémoires de la Société Italienne des Sciences.*

1448. *Connaissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, et l'obliquité de l'écliptique, trouver la longitude et la latitude de cet astre.*

Fig. 82. Soit P le pôle boréal de l'équateur LQ, E le pôle boréal de l'écliptique LT, L le premier point du bélier, S l'astre que je suppose dans la latitude boréale et dans le premier quart de l'équateur et de l'écliptique; position à laquelle il est à propos de rapporter la solution générale des problèmes, parce qu'en faisant sur les signes des lignes trigonométriques les changemens convenables, la solution satisfait de même à toute autre position. On a donc $PL = 90° = EL$, (969), et $LPE = 90° = LEP$, (980). Or LM ou LPM, (975), est l'ascension droite donnée; donc $SPE = 90° + asc.\ dr.$ La déclinaison donnée est SM, et par conséquent $PS = 90° - décl.$ L'obliquité de l'écliptique est $TLQ = PE$, (981). On connaît donc trois parties du triangle PSE, savoir PS, PE et SPE. On cherche 1°. la longitude LN ou LEN, qu'on peut connaître par le moyen de l'angle $PES = 90° - long.$; 2°. la latitude SN, qu'on trouvera par le moyen de $ES = 90° - lat.$ Par conséquent le problème n'exige que la résolution du seul triangle PES.

1449. Étant donnés deux côtés PS, PE, et l'angle compris SPE; pour trouver l'angle PES et le côté ES, la voie la plus courte est de se servir des formules (1086, 1087), qui donnent, en faisant $C = P$, $B = E$, $A = S$, $CD = x$, $BD = y$, 1°. $\text{tang.}\, x = \cos.\, P\ \text{tang.}\, PS$; 2°. $y = PE - x$; 3°. $\text{tang.}\, E = \text{tang.}\, P \times \frac{\sin.\, x}{\sin.\, y}$; 4°. $\cot.\, ES = \cos.\, E \cot.\, y$.

En substituant les dénominations ou valeurs de SPE, PS, etc. (1448), et considérant que $\cos.\, SPE = \cos.(90° + asc.\ dr.) = -\sin.\, asc.\ dr.$, on a d'abord $\text{tang.}\, x = -\sin.\, asc.\ dr. \times \cot.\, décl.$ Or comme (75) on a $-\text{tang.}\, x = \text{tang.} -x$, et $-\sin.\, x = \sin. -x$, j'observe qu'en changeant le signe de x, les signes seront positifs dans chacune des équations, et j'ai

1°. tang. x = sin. *asc. dr.* cot. *décl.*

2°. y = *obliq.* + x.

3°. tang. *long.* = tang. *asc. dr.* $\times \frac{\sin. y}{\sin. x}$.

4°. tang. lat. = sin. *long.* cot. y.

1450. Si on voulait d'abord la latitude, et ensuite la longitude, on aurait recours aux formules (1097, 1098); et faisant $B = P$, $C = E$, $A = S$, $BD = x$, $CD = y$, on trouverait les deux mêmes premières équations, et, au lieu des deux dernières, les suivantes :

3°. sin. *lat.* = sin. *décl.* $\times \frac{\cos. y}{\cos. x}$;

4°. sin. *long.* = tang. *lat.* tang. y.

1451. Dans les six formules précédentes, et dans toutes celles de ce Chapitre, on observera que pour la *déclinaison australe*, sin. *décl.* est *négatif*, puisque sin. *décl.* = cos. PS, et qu'alors PS est $> 90°$. La même règle a lieu pour tang. *décl.* et cot. *décl.* Mais cos. *décl.* ou sin. PS est toujours positif, puisqu'on ne peut jamais avoir $PS > 180°$.

Ces observations s'appliquent de même aux lignes trigonométriques de la *latitude*.

Avec ces règles et les règles générales (75), on aura toujours la longitude dans le quart de l'écliptique, auquel l'astre correspondra; en observant seulement que l'ascension droite et la longitude sont toujours ou toutes deux dans les signes ascendans du Zodiaque, ou toutes deux dans les signes descendans.

1452. *Connaissant la longitude et la latitude d'un astre, avec l'obliquité de l'écliptique, trouver l'ascension droite et la déclinaison de cet astre.*

En substituant, dans les formules ci-dessus, l'ascension droite à la longitude et réciproquement, et de même la déclinaison à la latitude et réciproquement, et en faisant négative l'obliquité dans la 2°, ce problème est résolu. On y parvient par les mêmes voies, en changeant le signe de y au lieu de celui de x.

Si on voulait l'obliquité positive, on écrirait partout $90° - x$ au lieu de x, et $90° - y$ au lieu de y. On aurait alors

1°. cot. x = sin. *long.* cot. *lat.*;

2°. y = *obliq.* + x;

3°. tang. *asc. dr.* = tang. *long.* × $\frac{\cos. y}{\cos. x}$;

4°. tang. *décl.* = sin. *asc. dr.* tang. y;

ou

3°. sin. *décl.* = sin. *lat.* × $\frac{\sin. y}{\sin. x}$;

4°. sin. *asc. dr.* = tang. *décl.* cot. y.

Dans un Mémoire (*Società Italiana*, Tom. IV) contenant une formule pour déterminer exactement les digressions des planètes inférieures, j'ai exposé la méthode que je crois la plus expéditive pour déduire le lieu géocentrique d'une planète, tant des tables que de l'observation.

1453. *Connaissant les différences d'ascension droite et de déclinaison entre deux astres*, et la distance réciproque de ces astres étant un arc sensiblement rectiligne, *trouver les différences de longitude et de latitude.*

Les méthodes que j'ai vu employer jusqu'à présent pour la solution de ce problème important, dont l'usage est continuel, sont toutes sujettes à une erreur de quelques secondes, plus ou moins, selon les cas.

Fig. 82. Soient L, S les centres de deux astres, et leur distance LS un petit arc sensiblement rectiligne (tel que serait par exemple un arc de 1° 20′, dont la différence à la corde n'est (278) que de 0″, 1); soit LQ l'un des parallèles à l'équateur, et P son pôle, LT l'un des parallèles à l'écliptique, et E son pôle : la différence donnée d'ascension droite est LPS, SM celle de déclinaison ; les différences cherchées de longitude et de latitude sont LES et SN.

1454. En multipliant LPS par sin. PL, on a l'arc de parallèle LM, (985); de même, si l'on avait la valeur de LN, en la divisant par sin. EL, on aurait celle de LES : et alors, pour avoir la solution cherchée, il suffirait de résoudre les petits triangles SML, SNL qui contiennent les quantités LM, LN, SM, SN. Aussi la méthode la plus usitée consiste-t-elle en effet à résoudre ces triangles en les considérant comme rectilignes rectangles, et en supposant connu *l'angle de position* PSE = NSH, et de plus que NSH = 90°

— NHS = MLN. De cette dernière supposition et de celle des angles droits naissent les erreurs que j'ai démontrées (1201 à 1211).

1455. Si l'on suppose M = 90° = N, et qu'on observe que l'hypoténuse du triangle LMS est commune au triangle LNS; alors les solutions du problème se trouvent préparées par les formules (647 à 652). Qu'on fasse dans ces formules C = S, B = L, D = N, A = M, on aura, pour tous les cas, LN = SM × sin. MSN ± LM × cos. MSN, et SN = SM × cos. MSN ∓ LM × sin. MSN; ou, en échangeant les termes du second membre de la première équation, pour qu'ils soient en plus grande partie positifs,

$$\partial\,long. = \frac{1}{\cos. lat.}(\partial\,asc. dr. \cos. décl. \cos. ang. posit. \pm \partial\,décl. \sin. ang. posit.);$$

$$\partial\,lat. = \partial\,décl. \cos. ang. posit. \mp \partial\,asc. dr. \cos. décl. \sin. ang. posit.$$

1456. En examinant les différens cas, on trouve que les signes inférieurs ont lieu en deux circonstances, pourvu néanmoins qu'elles n'existent pas en même temps, c'est-à-dire, 1°. dans les *signes descendans*, ou, ce qui revient au même, quand les astres correspondent au second ou au troisième quart de l'écliptique; 2°. lorsque l'astre le plus avancé en ascension droite est aussi le plus éloigné du pôle boréal de l'équateur. Dans les autres cas, ou lorsque ces deux circonstances existent en même temps, ce sont les signes supérieurs qui ont lieu.

De plus, lorsque par la première formule, ∂ *long.* se trouvera négative, dans ce cas l'astre le plus avancé en ascension droite sera le moins avancé en longitude; et lorsque par la seconde formule, ∂ *lat.* se trouvera négative, l'astre le plus voisin du pôle boréal de l'équateur sera le plus éloigné du pôle boréal de l'écliptique.

1457. Pour vérifier les formules précédentes, soit L le centre de la lune, S le centre du soleil, et par conséquent ES = 90°; soit LS = 32', MS = 16' = ∂ *décl.* ☉ ☾, PE = 23° 28', PS = 67°, et par conséquent PM = 67° 16' = PL.

Dans le triangle rectilatère PES, connaissant PE, PS, on trouve (1043) pour la valeur de *l'angle de position* PSE du soleil, 4° 47' 18",7; pour celle de l'angle SPE, 167° 53' 57",3, ce qui

Fig. 82. donne *asc. dr.* ☉ = 77° 53′ 57″, 3; et pour la valeur de l'angle PES, 11° 7′ 33″, 5, ce qui donne *long.* ☉ = 78° 52′ 26″, 5. En résolvant le triangle PLS dans lequel les trois côtés sont donnés, on trouve PSL = 119° 54′ 8″, 6, et SPL = 30′ 4″, 6 = ☊ *asc. dr.* ☉ ☾. Enfin dans le triangle rectilatère LES, connaissant LS, et ESL = PSL − PSE = 115° 6′ 49″, 8, on trouve SEL = 28′ 58″, 5 = ☊ *long.* ☉ ☾, et EL = 90° 13′ 34″, 9, ce qui donne ☊ *lat.* ☉ ☾ ou *lat. austr.* ☾ = 13′ 34″, 9. Ces élémens, tous déterminés rigoureusement, serviront de comparaison.

1458. En employant *décl.* ☾, et non *décl.* ☉, dans les formules (1455), ainsi que l'indique la figure, et faisant, comme on le peut sans erreur, cos. *lat.* ☾ = 1; on a ☊ *long.* ☉ ☾ = 30′ 4″, 6 cos. 22° 44′ cos. 4° 47′ + 16′ sin. 4° 47′ 20″ = 27′ 38″, 6 + 1′ 20″, 1 = 28′ 58″, 7; résultat dont l'erreur pourrait à la rigueur se négliger. Les logarithmes employés dans le calcul de la première formule servent à calculer la seconde, et on trouve ☊ *lat.* ☉ ☾ = 13′ 37″, 7; c'est-à-dire 2″, 8 de plus que la valeur exacte.

1459. Cette erreur provient de la cause exposée (1211). En effet toute erreur disparaît si on a recours aux corrections que j'ai indiquées au même lieu. La table (1205) fait connaître que l'erreur sur l'angle droit N est absolument insensible, NE différant peu de 90°, et que par conséquent on doit employer dans les calculs (1458) l'angle de position NSH *augmenté* de la quantité de l'erreur de l'angle droit M.

Cette erreur, à la distance MP, ou 67° 16′, du pôle, est selon la table (1205), 0′, 209 × ML = 0′, 209 × 30 cos. 22° 44′ = 5′, 78 = 5′ 47″. On doit aussi, conformément à la formule (1207), employer ML *diminué* de la quantité 0″, 01745 × SM × 5, 78: mais comme il est plus commode d'appliquer cette correction à l'angle au pôle MPL, on divisera cette même quantité par cos. 22° 44′, ou, au lieu de 5′, 78, on emploiera, en la calculant, 0′, 209 × MPL = 0, 209 × 30; ce qui donnera 0″, 01745 × 16 × 6, 27 = 1″, 75.

Mettons à présent, dans le calcul (1458), ☊ *asc dr.* = 30′ 2″, 85, et *ang. posit.* = 4° 53′ 6″, et nous trouverons ☊ *long.* ☉ ☾ = 28′ 58″, 5; et *lat. austr.* ☾ = 13′ 34″, 9; ce qui est absolument conforme aux résultats du calcul rigoureux (1457).

1460. Si les points S, L indiquent l'un le centre d'un astre, et l'autre une *tache* sur le disque de ce même astre, il est évident que les mêmes formules (1455), calculées avec les mêmes corrections (1459) dans le cas où les distances de l'astre aux deux pôles différeraient sensiblement entre elles, donneront exactement la solution du problème.

1461. Pour trouver les différences de longitude et de latitude entre le soleil et la lune, Mayer a donné les deux formules suivantes que je tire de Trembley (*Essai de Trigon. sphérique*, chap. IX) : $\delta\,long. = \delta\,asc.\,dr.\cos.\,obl. + \delta\,décl.\sin.\,obl. \times \cos.\,asc.\,dr.\odot$, et $\delta\,lat. = \frac{\delta\,décl.\cos.\,obl.}{\cos.\,décl.\odot} - \delta\,asc.\,dr.\sin.\,obl. \times \cos.\,long.\odot$. En calculant ces formules avec les élémens (1457), on a $\delta\,long. = 28'\,55'',5$, et $\delta\,lat. = 13'\,38''$. L'erreur est de 3" pour chacune de ces valeurs; ces formules n'ont donc pas l'exactitude que desirent aujourd'hui les Astronomes.

1462. *Connaissant les différences de hauteur et d'azimuth entre deux astres, trouver les différences d'ascension droite et de déclinaison.*

Si dans la solution (1453) on prend P pour le zénith, E pour le pôle de l'équateur, les formules (1455) donneront (1463),

$$\delta\,asc.dr. = \frac{1}{\cos.\,décl.}(\delta\,azim.\cos.haut.\cos.ang.de\,var. \pm \delta\,haut.\sin.ang.de\,var.)$$

$$\delta\,décl. = \delta\,haut.\cos.\,ang.\,de\,var. \mp \delta\,azim.\cos.\,haut.\sin.\,ang.\,de\,var.$$

Les signes inférieurs ont lieu lorsque l'astre le plus bas a le moindre azimuth oriental, ou le plus grand azimuth occidental. L'azimuth est le supplément de l'angle SPE.

1463. Pour distinguer entre eux les deux angles qui se trouvent désignés l'un et l'autre, dans différens Auteurs, sous la dénomination d'*angle parallactique*, j'appellerai toujours de ce nom l'angle du vertical avec le cercle de latitude; et je nomme *angle de variation* l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, par contraste avec l'*angle de position* qui lui est contigu; l'un changeant à chaque moment, tandis que l'autre est sensiblement constant pour toutes les étoiles.

1464. Les formules (1455) s'appliquent encore facilement à la

résolution du problème suivant et de son inverse : *Connaissant les différences de hauteur et d'azimuth, trouver les différences de longitude et de latitude.* Je me dispenserai de faire ces applications, parce que les règles des signes deviennent plus compliquées ; que la formation de l'angle parallactique exige encore d'autres règles, et que De la Lande (*Astr.* 2130; et 1874 et suiv.) a résolu ces problèmes par une autre méthode, et avec les explications les plus détaillées. Je préviens seulement que soit dans ces problèmes, soit dans le précédent (1462), mes corrections (1211) seront d'autant plus nécessaires, que les astres seront plus élevés sur l'horizon. Elles deviennent pourtant inutiles dans la méthode de De la Lande pour le calcul des éclipses, parce qu'on y résout successivement les deux problèmes, l'un par rapport au lieu vrai des astres, l'autre par rapport au lieu apparent, et que les erreurs des deux opérations se compensent.

1465. *Trouver une méthode expéditive pour calculer une table des azimuths, des distances au zénith, et des angles de variation* (1463), *pour une latitude terrestre donnée, en prenant pour argumens la déclinaison et l'angle horaire.*

Une pareille table est très-utile pour pointer de jour la lunette d'un quart de cercle sur un astre qu'on n'apperçoit point à l'œil nu, et de nuit sur un astre peu visible ; pour calculer l'effet de la réfraction sur l'ascension droite et sur la déclinaison ; et pour d'autres circonstances qui se présentent continuellement. Partout où il se trouve un Observatoire en activité, on devrait avoir cette table calculée en minutes, sur le modèle de celle qu'on a insérée pour Paris dans la *Connaissance des Temps*, de 1782. M. Prevost, à qui cette table est due en partie, m'a dit avoir calculé avec exactitude les azimuths et les distances au zénith, par le moyen des formules (VIII. 7ᵉ, 8ᵉ). Par la méthode que je vais indiquer, il aurait encore obtenu, sans plus de travail, les angles de variation qui depuis ont été calculés par M. Lévêque ; et c'est en effet par cette méthode que M. Chompré a étendu cette même table, tant pour les angles de variation que pour les azimuths et les distances au zénith, (*Connaiss. des Temps*, an 15, ou 1807.)

Fig. 83. Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, S un astre situé dans une partie quelconque du Ciel visible. Connaissant les côtés PZ,

PS, et l'angle compris P, on trouve à-la-fois, par l'élégante solution de Neper (IX. 2°), *l'azimuth* et *l'angle de variation :* la déclinaison restant la même, il suffit de changer seulement log. cot. $\frac{1}{2}$ *ang. horaire* pour trouver successivement l'azimuth et l'angle de variation correspondans à chacun des angles horaires de la table. On fera de même pour chaque déclinaison différente. Ensuite, ayant sin. S : sin. PZ :: sin. P : sin. ZS, comme, dans cette analogie, PZ est toujours constant, il suffira, pour un même angle horaire, de chercher deux logarithmes pour connaître la *distance au zénith* correspondante à chaque déclinaison. On fera de même pour chaque angle horaire différent. Donc en général, par cette méthode, pour déterminer trois quantités, on n'a que quatre logarithmes à chercher.

1466. *Connaissant la hauteur du pôle, ayant observé dans un même vertical deux étoiles, et connaissant leurs déclinaisons et leurs ascensions droites, et par conséquent les momens de leur passage au méridien, trouver l'heure à laquelle l'observation a été faite.*

Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, T, S les deux étoiles. Fig. 85. Les choses connues sont PZ, *distance du pôle au zénith ;* PT, *distance du pôle à l'étoile la plus élevée ;* PS, *distance du pôle à l'étoile la moins élevée ;* et TPS, *différence entre les ascensions droites des deux étoiles*, prise du côté où elle est moindre que de 180°. On cherche TPZ, *angle horaire de l'étoile la plus élevée.*

Si du pôle P on abaisse sur le vertical la perpendiculaire PE, les deux triangles rectangles TEP, SEP, qui ont un côté commun PE, donneront (1056), cos. TPE : cos. SPE :: tang. PS : tang. PT. Donc (II. 14°, 11°), cot. $\frac{1}{2}$ (SPE + TPE) : tang. $\frac{1}{2}$ (SPE — TPE) :: sin. (PS + PT) : sin. (PS — PT) ; et par conséquent

$$\text{cot.}(\text{TPE} + \tfrac{1}{2}\,\text{TPS}) = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{TPS} \times \frac{\text{sin.}\,(\text{PS} + \text{PT})}{\text{sin.}\,(\text{PS} - \text{PT})},$$

équation qui fait connaître l'angle TPE. Mais dans les triangles rectangles PET, PEZ, on a de même cos. ZPE : cos. TPE :: tang. PT : tang. PZ. Donc

$$\cos. ZPE = \cos. TPE \tan g. PT \cot. PZ.$$

Et en ajoutant ZPE à TPE, on a l'angle cherché TPZ.

En général celle des deux étoiles qui est plus voisine du pôle doit avoir l'angle horaire plus petit. Mais le moyen le plus expéditif pour savoir si deux étoiles peuvent s'observer dans un même vertical, c'est de le vérifier sur un globe muni d'un cercle vertical.

Fig. 85. 1467. *Déterminer de combien de temps la réfraction accélère le lever ou retarde le coucher des astres.*

Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, OR l'horizon, T un astre qui élevé, par la réfraction, de la quantité TL, (déterminée de $31' \frac{1}{2}$ environ par l'Abbé Oriani et par moi, dans le parallèle de 45° en Italie, *Società Italiana*, *Tom. V*, *pag.* 273), paraisse se lever au point L. Sans cette élévation apparente, on ne verrait l'astre se lever que quand il arriverait au point S, en supposant PS = PT. Son lever est donc accéléré, et, par la même raison, son coucher retardé, de la quantité de temps mesurée par le petit angle TPS.

1468. J'observe que les triangles PZS, PTZ ont un côté commun PZ; que PS = PT, et que connaissant TL = ZT − ZS = ∂ZS, il s'agit de trouver TPS = ∂ZPS que je désigne par ∂P.

J'ai recours aux analogies différentielles correspondantes à ce cas, et faisant A = P, B = Z, C = S, je trouve (1303), $\sin. \frac{1}{2} \partial ZS : \sin. \frac{1}{2} \partial P :: \sin. PZ \sin. PS \sin. (P + \frac{1}{2} \partial P) : \sin. (ZS + \frac{1}{2} \partial ZS)$. Mais, parce que ZS = 90°, $\sin. (ZS + \frac{1}{2} \partial ZS) = \cos.. \frac{1}{2} \partial ZS$. Donc (I. 6°).

(A)... $\sin. \partial ZS : 2 \sin. \frac{1}{2} \partial P :: \sin. PZ \sin. PS \sin. (P + \frac{1}{2} \partial P) : 1$;

ou (1423), en désignant dans le second membre le temps cherché par t

(B)... *Temps cherché* $= \dfrac{\textit{réfraction horizontale}}{15 \cos. \textit{lat.} \cos. \textit{decl.} \sin. (\textit{ang. hor.} + \frac{15}{2} t)}$.

1469. Comme la valeur de t se connaît toujours à-peu-près, il est rare qu'on ait à calculer cette formule plus d'une fois par la méthode (675). Si on veut faire usage de l'autre méthode (676), on observera que $2 \sin \frac{1}{2} \partial P \sin. (P + \frac{1}{2} \partial P) = \cos. P - \cos. (P + \partial P)$, (II. 17°); et l'analogie (A) donnera ....
$\cos. (P + \partial P) = \cos. P \left(1 - \dfrac{\sin. \partial ZS}{\sin. PZ \sin. PS \cos. P}\right)$. Par P j'entends

l'angle ZPS, c'est-à-dire l'angle horaire de l'astre considéré dans le plan de l'horizon. Cet angle se détermine aisément, puisque le triangle rectilatère PZS donne (VII. 7°), cos. P = — cot. PZ cot. PS. En substituant cette valeur dans le dernier terme du binôme ci-dessus, on a

$$(C)\ldots \quad \cos.(P + \delta P) = \cos. P\left(1 + \frac{\sin. \delta ZS}{\cos. PZ \cos. PS}\right); \text{ ou}$$

$$(D)\ldots \quad \cos.(ang. hor. + 15\,t) = \cos. ang. hor. \left(1 + \frac{\sin. refr. horiz.}{\sin. lat. \sin. decl.}\right).$$

1470. L'équation cos. P = — cot. PZ cot. PS, ou

$$(E)\ldots \cos. \textit{ang. hor.} = - \text{tang. } \textit{lat.} \text{ tang. } \textit{décl.}$$

fait voir qu'à déclinaison égale, l'angle horaire correspondant à la déclinaison boréale est obtus, et supplément de l'angle horaire correspondant à la déclinaison australe. Mais lorsque P est obtus, $\sin.(P + \frac{1}{2}\delta P)$ est $<$ sin. P, et lorsque P est aigu, $\sin.(P + \frac{1}{2}\delta P)$ est $>$ sin. P. L'analogie (A) fait donc connaître qu'à déclinaison égale, l'effet de la réfraction ne peut être le même pour la déclinaison boréale et pour l'australe, et que par conséquent certaines tables données avant la première édition de ce Traité, induisaient en erreur sur ce point. Et cette erreur est asssez grave dans quelques cas, ainsi qu'on va le voir.

1471. Soit PZ = 30° : en faisant PS = 61°, on a, par la formule (E), P = 163° 45′ 31″ ; et, en faisant PS = 119°, P = 16° 14′ 29″. Avec ces élémens, et en supposant δZS = 33′ 30″, réfraction adoptée (*Connaissance des Temps*, 1782, pag. 285), la formule (C) donne, dans le cas de la déclinaison boréale, P + δP = 169° 13′ 36″, et par conséquent l'effet de la réfraction ou δP = 5° 28′ 5″ ; et dans le cas de la déclinaison australe, P + δP = 20° 18′ 48″, et par conséquent δP = 4° 4′ 19″. La première valeur de δP réduite en temps, est 21′ 52″ pour la déclinaison boréale ; la seconde, 16′ 17″ pour la déclinaison australe. La différence est de 5′ 35″ de temps. On aurait donc une erreur de près de 6′ de temps, si l'on employait dans le cas de la déclinaison boréale la quantité de 16′ 9″ assignée dans la table de la *Connaissance des Temps*, 1782, p. 302, pour le cas de la déclinaison de 29° et de la latitude de 60°.

Fig. 85. 1472. Si dans l'exemple qui précède, on eût calculé la valeur de ♌P au moyen de l'analogie que plusieurs Astronomes ont employée, ♌P : ♌ZS :: 1 : $\sqrt{(\sin.^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, laquelle se résout facilement par la méthode (1412), on eût trouvé ♌P = 4° 33′ 54″, et par conséquent l'erreur de l'analogie infinitésimale serait de 54′ pour la déclinaison boréale, et de 30′ pour l'australe: ce qui prouve l'utilité de mes analogies différentielles finies, dont j'ai déduit la formule (C) que je crois plus expéditive que la résolution du triangle par les trois côtés; d'autant plus qu'avec le seul changement d'un signe, elle s'emploie et pour la déclinaison boréale et pour l'australe. Mais si l'on connaît à-peu-près la valeur de ♌P ou de 15 *t*, ce qui arrive lorsqu'on calcule une table, je crois que les solutions (A), (B) paraîtront préférables à toute autre méthode employée jusqu'à présent.

1473. Si à la réfraction horizontale on substitue le diamètre du soleil, les formules (B), (D) feront connaître *le temps que le disque du soleil emploie à se lever ou à se coucher.*

1474. Et si à la réfraction horizontale on substitue la dépression du cercle crépusculaire, dépression qu'on a fixée à 18°, on aura par la formule (D) *la durée du crépuscule.*

Pour savoir où et quand le crépuscule dure toute la nuit, il suffit d'observer que le plus grand abaissement du soleil sous l'horizon a lieu lorsque l'arc PT forme un prolongement de l'arc ZP, et que par conséquent les ténèbres ne peuvent être absolues quand on a $(PT + PZ) < 108°$.

La plus courte durée du crépuscule se détermine par cette équation,

$$\sin. \tfrac{15}{2}\, t = \frac{\sin. 9°}{\cos.\ lat.};$$

et le jour du crépuscule le plus court, par la suivante:

$$\sin.\ décl. \odot = \sin.\ lat.\ \text{tang}. 9°.$$

Ma démonstration de ces deux formules est insérée dans l'Encyclopédie méthodique, à l'article *Crépuscule*, Partie des *Mathématiques.*

1475. *Trouver le changement d'amplitude produit par la réfraction sur un astre qui se lève ou qui se couche.*

Conservons les dénominations (1467); l'arc SL de l'horizon, ou le petit angle LZS, que nous nommerons comme à l'ordinaire dZ, est celui dont on cherche la valeur.

La première analogie (1294) se réduit dans ce cas, par la méthode (676), à une expression très-simple; mais dans ce même cas on obtient plus promptement cette expression par la méthode (1425). Désignons par Z l'angle PZS, et observons que PT = PS, et que $TZ = 90° + dZS$: nous aurons (1426), $\cos.(Z + dZ) = \frac{\cos Z}{\cos. dZS} + \text{tang.}\, dZS \cot. PZ$. Mais le triangle rectilatère PZS donne, (VII. 9°), $\cos. Z = \frac{\cos. PS}{\sin. PZ}$. Donc, en appelant *amplitude vraie* le complément de l'angle PZS, et *amplitude apparente* le complément de PZT, nous aurons

$$\sin.\, ampl.\, vr. = \frac{\sin.\, decl.}{\cos.\, lat.}$$

$$\sin.\, ampl.\, app. = \frac{\sin.\, ampl.\, vr.}{\cos.\, r\acute{e}fr.\, horiz.}\left(1 + \frac{\sin.\, r\acute{e}fr.\, horiz.\ \text{tang.}\, lat.}{\sin.\, ampl.\, vr.}\right).$$

Or la différence de l'amplitude vraie à l'amplitude apparente est ce que l'on cherche. Qu'on observe au reste que si la déclinaison est australe, sin. *ampl. vr.* est négatif, et doit s'employer comme tel dans la seconde équation. Alors PZS est > 90°, et l'amplitude s'étend du premier vertical vers le midi.

Un exemple nous sera utile à plus d'une fin.

1476. Soit PZ = 41° 12′ 20″, PS = 51° 25′ 20″, et dZS = 33′ = *réfr. horiz.* Au moyen des formules précédentes, on trouvera *ampl. vr.* = 71° 11′ 21″, et *ampl. app.* = 73° 15′ 17″. Et par conséquent l'effet de la réfraction sur l'amplitude est, dans ce cas, de 2° 4′.

1477. Si, avec les mêmes élémens, on emploie, au lieu de mes formules rigoureuses, l'analogie (1410), $dZ : dZS :: \cos. PZ : \sqrt{(\sin.^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, on trouvera $dZ = 1° 57'$. Une erreur de 7′ sur cette quantité fait voir avec quelle précaution il faut faire usage des analogies infinitésimales.

1478. Si dans l'exemple (1476) on fait $dZS = 32'$, mes formules donnent $dZ = 2° 0'$. Une minute de variation dans la ré-

Fig. 85. fraction horizontale produit donc ici un changement de 4′ sur l'amplitude apparente, et par conséquent de 8′ si on prend la somme des changemens tant pour l'amplitude ortive que pour l'amplitude occase. Il faut donc attribuer à une erreur de calcul ce qu'on a avancé, qu'une minute de variation dans la réfraction horizontale, à la latitude donnée (1476), produit un changement de 29′ sur l'amplitude ortive et occase de la Lyre, (*Bailly*, Tom. III. pag. 95).

1479. *Trouver le moment de la station apparente d'une planète.*

Les solutions que les Astronomes donnent de ce problème, et qui supposent circulaires concentriques et dans un même plan les orbites de la planète et de la Terre, sont sujettes à des erreurs très-graves. Je me borne à en avertir le Lecteur. Je renvoie au Tome III des Mémoires de la Société Italienne, pour la solution que j'ai donnée, la seule rigoureuse et complète que je connaisse.

1480. *La théorie du mouvement elliptique des planètes* donne les six équations ci-après, dont la démonstration n'appartient pas à la seule Trigonométrie, puisqu'elle dépend des observations, de la loi des aires proportionnelles aux temps, et des propriétés de l'ellipse. Soient

a le demi-grand axe de l'orbite d'une planète,
b le demi-petit axe, u l'anomalie vraie,
e l'excentricité, x l'anomalie excentrique,
r le rayon vecteur de la planète, z l'anomalie moyenne.

On aura (*Voyez* les démonstrations de De la Lande)

1° ÉQUATION... $z = x + \frac{e}{a} \times \sin. x$, (*Astr.* 1241);

2° $r = a + e \cos. x$, (*Astr.* 3405);

3° $r = \frac{bb}{a - e \cos. u}$, (*Astr.* 3412);

4° $r = b \times \frac{\sin. x}{\sin. u}$, (*Astr.* 1246);

5° $\tang. \frac{1}{2} u = \tang. \frac{1}{2} x \sqrt{\frac{a-e}{a+e}}$, (*Astr.* 1240);

Enfin l'équation suivante donne le rapport entre les quantités

constantes a, b, e:

6° $aa = bb + ee$, (*Astr.* 3402).

1481. Pour simplifier les opérations, on fait ordinairement $a = 1$; alors il faut employer dans les calculs numériques, des valeurs de b, e, r proportionnelles à la valeur de $a = 1$. Par exemple, les Tables de Mercure, de De la Lande, donnent, (pag. 110), $a = 38710$; $e = 7955,4$. Si on fait $a = 1$, la valeur de e sera $\frac{7955,4}{38710}$.

1482. Des équations (1480) se déduisent les quatre suivantes, qui sont fort utiles, et que nous démontrerons (1484).

$$7°\quad \partial x = \frac{\partial z}{1 + \frac{e}{a} \times \cos. x};$$

$$8°\quad \partial r = - \partial z \times \frac{ae}{bR^2} \times \sin. u;$$

$$9°\quad \partial u = \partial x \times \frac{\sin. u}{\sin. x};$$

$$10°\quad \partial u = \partial z \times \frac{ab}{rr}.$$

1483. Ces quatre équations ne sont exactes que lorsque les différentielles sont infiniment petites. Dans les autres cas je leur substitue les suivantes, comme beaucoup plus approchées, (1422).

$$11°\quad \partial x = \frac{\partial z}{1 + \frac{e}{a} \times \cos. (x + \frac{1}{2} \partial x)};$$

$$12°\quad \partial r = - \partial z \times \frac{ae}{bR^2} \times \sin. (u + \tfrac{1}{2} \partial u);$$

$$13°\quad \partial u = \partial x \times \frac{\sin. (u + \frac{1}{2} \partial u)}{\sin. (x + \frac{1}{2} \partial x)};$$

$$14°\quad \partial u = \partial z \times \frac{ab}{(r + \frac{1}{2} \partial r)^2}.$$

1484. Démonstration des équations (1482).

En différentiant l'équation 1°, on en déduit la 7°.

En substituant la valeur ainsi trouvée de ∂x, dans la différentiation de la 2°, on a $\partial r = - \frac{e \sin. x \partial z}{1 + \frac{e}{a} \cos. x} = (2°) - \frac{ae \sin. x \partial z}{r}$

$= \frac{-ae \sin. u \, \delta z}{b}$, (4°); expression qu'il faut diviser par R″, (631), les quantités δr et δz n'étant pas de même nature, (1427).

Je différentie la 5°, et substituant tang. $\frac{1}{2} u$ cot. $\frac{1}{2} x$, au lieu de $\sqrt{\frac{a-e}{a+e}}$, j'obtiens $\frac{\frac{1}{2} \delta u}{\cos.^2 \frac{1}{2} u} = \frac{\frac{1}{2} \delta x}{\cos.^2 \frac{1}{2} x} \times$ tang. $\frac{1}{2} u$ cot. $\frac{1}{2} x$; d'où je tire $\delta u = \delta x \times \frac{\sin. \frac{1}{2} u \cos. \frac{1}{2} u}{\sin. \frac{1}{2} x \cos. \frac{1}{2} x} = \delta x \times \frac{\sin. u}{\sin. x}$, (I. 6°).

Mais cette équation devient, au moyen de la 4°, $\delta u = \delta x \times \frac{b}{r}$. J'introduis la valeur de δx tirée de la 7°, et il en résulte $\delta u = \frac{b}{r} \times \frac{\delta z}{1 + \frac{e}{a} \cos. x} = \frac{ab \, \delta z}{r(a + e \cos. x)} = \delta z \times \frac{ab}{rr}$, (2°).

Les formules fondamentales (1° à 10°), que j'ai réunies pour la commodité des Astronomes, en y ajoutant de nouveaux secours (1483), vont me servir utilement pour la résolution de divers problèmes, dans lesquels je suppose toujours connues les quantités a, b, e.

1485. *Problème de Kepler. Étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie.*

Solution I. Toute la difficulté consiste à trouver l'anomalie excentrique, puisque, cet élément connu, l'équation 5° donne aussitôt la solution du problème. Nous nous bornerons donc à chercher x par le moyen de l'équation 1°; et comme il n'y a point de méthode rigoureuse pour la résoudre, nous emploierons ici la méthode générale d'approximation que nous avons proposée (940), parce qu'aucune autre ne nous paraît plus expéditive.

Si l'on donne à x une valeur arbitraire, l'équation 1° produira une erreur sur la valeur de z. Avec cette erreur δz, on déterminera ensuite, au moyen de l'équation 11°, la correction δx que doit subir la valeur supposée de x, pour devenir exacte. Un exemple démontrera la justesse et la briéveté de cette opération.

1486. Soit $z = 90°$, et cherchons x dans l'orbite de Mercure. Pour donner à x dans l'équation 1° une valeur supposée, très-approchée de la valeur exacte, j'observe d'abord que lorsque x est $< 180°$, on a toujours $z > x$, et au contraire $z < x$ quand x est $> 180°$, puisqu'alors sin. x est négatif (75). Dans le cas

proposé, je dois donc supposer $x < z$. Je commence le calcul de l'équation 1° par la réduction en degrés, de la valeur de $\frac{e}{a}$. En prenant les élémens dans les tables de De la Lande, je trouve

$$\begin{aligned}
\text{log. } e &= 3,9006620 \\
\text{compl. log. } a &= 5,4121768 \\
\text{log. } \tfrac{e}{a} &= 9,3128388 \\
(631),\ \text{log. R}^\circ &= 1,7581226 \\
\text{log. constant} &\quad 1,0709614
\end{aligned}$$

Et par conséquent $\frac{e}{a} \times R^\circ = 12^\circ$ environ. Pour achever le calcul de l'équation 1°, il s'agit de choisir un arc x tel que son sinus multiplié par 12° donne un produit égal à $z - x$, ou à $90^\circ - x$ dans le cas présent. En ouvrant les tables des sinus naturels, je reconnais facilement que sin. 79° serait trop grand, et sin. 78° trop petit. Je fais donc $x = 78^\circ\ 30'$, et réduisant en secondes la valeur de $\frac{e}{a} \times R^\circ$ en multipliant cette valeur par 3600, je termine le calcul comme il suit :

$$\begin{aligned}
\text{long. constant} &\quad 1,0709614 \\
\text{log. } 3600 &= 3,5563025 \\
\text{log. sin. } 78^\circ\ 30' &= 9,9911927 \\
\text{Somme} &\quad 4,6184566 \\
\text{Donc } \tfrac{e}{a} \times R' \times \text{sin. } 78^\circ\ 30' &= 41539'',06 \\
\text{Mais } z - x = 11^\circ\ 30' &= 41400'',00 \\
\text{Donc l'erreur } \delta z &= \quad 139'',06
\end{aligned}$$

Je suppose par approximation $\delta x = \delta z$, ce qui donne $\frac{1}{2}\, \delta x =$ 1' 10" environ. J'observe que mon calcul donnant pour z une valeur trop grande, la correction δx doit être négative, et je fais le calcul de l'équation 11°.

$$\log. \frac{e}{a} \text{ pris ci-dessus} = 9,31284$$
$$\log. \cos. (x - \tfrac{1}{2} \delta x = 78° 28' 50'') = 9,30038$$
$$\text{Somme} \quad 8,61322$$

$$\text{Donc } \frac{e}{a} \times \cos. (x - \tfrac{1}{2} \delta x) = 0,04104$$

$$\text{compl. log. } 1,04104 = 9,98253$$
$$\log. (\delta z = 139'', 06) = 2,14320$$

$$\log. \delta x = 2,12573$$

ce qui donne $\delta x = -133'', 58 = -2' 13'', 58$; et par conséquent $x = 78° 27' 46'', 42$. Cette valeur est juste à moins d'un $\frac{1}{100}$ de seconde, comme on pourra le vérifier en l'employant pour calculer l'équation 1°.

1487. Pour démontrer d'autant plus l'utilité générale de ma méthode, soit $z = 180° 12' 27'', 83$, et soit demandé de trouver x dans l'orbite de la comète de 1759, en faisant usage des élémens donnés par De la Lande (*Ast.* 3187).

$$\log. (e = 17,49226) = 1,2428460$$
$$\text{compl. log. } (a = 18,07576) = 8,7429035$$

$$\log. \frac{e}{a} = 9,9857495$$
$$\log. R° = 1,7581226$$

$$\log. \text{constant} \quad 1,7438721$$

Donc $\frac{e}{a} \times R° = 55°$ environ. Il faut trouver le sinus d'un arc x, de sorte que le produit de ce sinus par 55° soit égal à $z - x$. En négligeant pour cette recherche les 180° dans l'une et dans l'autre anomalie, ce produit pris avec le signe positif sera $x - 13'$. Après quelques épreuves sur les tables des sinus, je trouve que sin. 5° 10' = 0,09 peut satisfaire au cas proposé, puisque 55° × 0,09 = 4°,95 = 4° 57' = 5° 10' − 13'. Je fais donc $x = 185° 10'$.

$$\begin{array}{lr} \text{log. constant} & 1,7438721 \\ \text{log. } 3600 = & 3,5563025 \\ \text{log. sin. } 185^\circ\ 10' = - & 8,9544991 \\ \hline (1441), \text{ Somme } - & 4,2546737 \end{array}$$

Et par conséquent $\frac{e}{a} \times R'' \times \sin.\ 185^\circ\ 10' = -\ 17975'',20$

Mais $z - x = 180^\circ\ 12'\ 27'',83 - 185^\circ\ 10' = -\ 17852'',17$

Donc l'erreur $\delta z = \quad 123'',03$

Ce calcul donne la valeur de z trop petite; celle de δx sera donc additive. Pour les comètes, on ne peut supposer $\delta x = \delta z$. Ainsi, dans le calcul de l'équation 11°, il faut employer, pour arriver à une première approximation, $\cos. x$ au lieu de $\cos. (x + \frac{1}{2}\delta x)$.

$$\begin{array}{lr} \text{log. } \frac{e}{a} \text{ pris ci-dessus} = & 9,98575 \\ \text{log. cos. } (x = 185^\circ\ 10') = - & 9,99823 \\ \hline \text{Somme } - & 9,98398 \\ \text{Donc } \frac{e}{a} \times \cos. x = - & 0,9638 \\ \hline \text{compl. log. } \left(1 + \frac{e}{a} \cos. x = 0,0362\right) = & 1,44129 \\ \text{log. } (\delta z = 123'',03) = & 2,09001 \\ \hline \text{log. } \delta x = & 3,53130 \end{array}$$

On a donc, pour première approximation, $\delta x = 56'\ 39''$. Cette correction étant considérable, on s'en servira pour recommencer le calcul, si l'on veut obtenir un résultat très-exact. On aura alors

$$\frac{e}{a} \times R'' \times \sin.\ 186^\circ\ 6'\ 40'' = -\ 21249'',485$$

$$z - x = 180^\circ\ 12'\ 27'',83 - 186^\circ\ 6'\ 40'' = -\ 21252'',170$$

Donc l'erreur $\delta z = \quad 2'',687$

Donc $\frac{e}{a} \cos. (x = 186^\circ\ 6'\ 40'') = -\ 0,96222$, en faisant usage des logarithmes à six décimales; et $\delta x = \frac{2'',687}{0,03778} = 1'\ 11'',122$. Le

calcul ayant donné z trop grand, cette correction δx doit ici se soustraire. Pour l'avoir avec encore plus de précision, qu'on emploie actuellement cos. $(x - \frac{1}{2}\delta x = 186° \, 6' \, 4'')$ au lieu de cos. x dans le dernier calcul, comme le prescrit l'équation 11°, et l'on trouvera $\delta x = -1' \, 11'', 16$, correction absolument exacte, puisque si l'on calcule l'équation 1° en faisant $x = 186° \, 5' \, 28'', 84$, on trouve précisément $z = 180° \, 12' \, 27'', 83$.

Comme les comètes ne sont visibles que dans le voisinage du périhélie, et que par cette raison c'est ordinairement de leur périhélie que se comptent leurs anomalies, il faudra réduire ces anomalies comme si elles étaient comptées de l'aphélie, lorsqu'on voudra faire usage des équations (1480 à 1483) qui sont construites dans cette hypothèse. Pour cet effet on ajoutera 180° aux anomalies données, après le passage au périhélie, et avant ce passage on prendra leur supplément à 180°.

1488. Solution II. En poussant jusqu'à la neuvième puissance de l'excentricité les opérations de De la Lande (*Astr.* 3482), dans lesquelles $a = 1$, on trouve

$$z =$$

$$u + 2e \text{ sin. } u + \left(\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{1}{6}e^4 + \tfrac{3}{64}e^6 + \tfrac{3}{128}e^8\right) \text{sin. } 2u$$
$$+ \left(\tfrac{1}{3}e^3 + \tfrac{1}{8}e^5 + \tfrac{1}{16}e^7 + \tfrac{7}{192}e^9\right) \text{sin. } 3u + \left(\tfrac{5}{32}e^4 + \tfrac{3}{32}e^6 + \tfrac{15}{256}e^8\right) \text{sin. } 4u$$
$$+ \left(\tfrac{3}{40}e^5 + \tfrac{1}{16}e^7 + \tfrac{3}{64}e^9\right) \text{sin. } 5u + \left(\tfrac{7}{192}e^6 + \tfrac{5}{128}e^8\right) \text{sin. } 6u$$
$$+ \left(\tfrac{1}{56}e^7 + \tfrac{3}{128}e^9\right) \text{sin. } 7u + \tfrac{9}{1024}e^8 \text{ sin. } 8u + \tfrac{5}{1152}e^9 \text{ sin. } 9u.$$

1489. Cette série, convertie par la méthode que j'ai proposée (951 à 957), me donne la suivante qui résout le problème :

$$u =$$

$$z - \left(2e - \tfrac{1}{4}e^3 + \tfrac{5}{96}e^5 + \tfrac{107}{4608}e^7 + \tfrac{6817}{368640}e^9\right) \text{sin. } z + \ldots\ldots$$
$$\left(\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{24}e^4 + \tfrac{17}{192}e^6 + \tfrac{43}{5760}e^8\right) \text{sin. } 2z - \left(\tfrac{13}{12}e^3 - \tfrac{43}{64}e^5 + \tfrac{95}{512}e^7 - \tfrac{973}{61440}e^9\right) \text{sin. } 3z$$
$$+ \left(\tfrac{103}{96}e^4 - \tfrac{451}{480}e^6 + \tfrac{4123}{11520}e^8\right) \text{sin. } 4z - \left(\tfrac{1097}{960}e^5 - \tfrac{5957}{4608}e^7 + \tfrac{164921}{258048}e^9\right) \text{sin. } 5z$$
$$+ \left(\tfrac{1223}{960}e^6 - \tfrac{7913}{4480}e^8\right) \text{sin. } 6z - \left(\tfrac{47273}{32256}e^7 - \tfrac{1173271}{737280}e^9\right) \text{sin. } 7z \ldots$$
$$+ \tfrac{556403}{322560}e^8 \text{ sin. } 8z - \tfrac{10661993}{5160960}e^9 \text{ sin. } 9z.$$

1490. Les deux précédentes équations donnent la valeur de $z \backsim u$ en parties de $R = 1$, telles que sont les arcs de la table (AA). Si on

veut la valeur de $z \backsim u$ en secondes, il faut multiplier par R″ les coefficiens de sin u, sin. $2u$, etc. et de sin. z, sin. $2z$, etc.

M. Jeaurat (*Mémoires présentés à l'Acad.* Tom. IV. pag. 605) a donné une série poussée jusqu'à e^4, laquelle sert à trouver de même le rayon vecteur par l'anomalie moyenne.

1491. Solution III. Je mets dans l'équation 1° la valeur (267) de sin. x ; puis je convertis (258) la série contenue dans le second membre, et faisant la distance aphélie $a + e = m$, j'obtiens

$$x = \frac{1}{m} z + \frac{e}{6m^4} z^3 + \frac{9e^2 - e}{120\, m^7} z^5 + \frac{225 e^3 - 54 e^2 + e}{5040\, m^{10}} z^7 + \ldots\ldots \frac{11025 e^4 - 4131 e^3 + 243 e^2 - e}{362880\, m^{13}} z^9 + \text{etc.}$$

1492. Ensuite je substitue dans l'équation 5° la valeur (281) de tang. $\frac{1}{2}x$, puis celle des puissances de x, tirée de l'équation ci-dessus, et j'ai tang. $\frac{1}{2}u$ exprimée en puissances impaires de z. De cette valeur de tang. $\frac{1}{2}u$, je forme les puissances impaires, et je les introduis, au lieu de celles de tang. A, dans la série (252), laquelle ainsi réduite, me donne la valeur de $\frac{1}{2}u$; enfin, faisant la distance périhélie $(a - e) = n$, je parviens à la solution suivante du problème.

$$u = \left(z + \frac{e}{3m^3} z^3 + \frac{12 e^2 - e}{60\, m^6} z^5 + \frac{360 e^3 - 69 e^2 + e}{2520\, m^9} z^7 + \ldots \frac{20160 e^4 - 6273 e^3 + 306 e^2 - e}{181440\, m^{12}} z^9 + \text{etc.}\right) \sqrt{\frac{n}{m^3}}.$$

1493. Cette série convertie donne encore, si l'on veut, la correspondante à la série (1488), comme il suit :

$$z = \left(u - \frac{e}{3n} u^3 + \frac{8e^2 + e}{60\, n^2} u^5 - \frac{136 e^3 + 43 e^2 + e}{2520\, n^3} u^7 + \ldots\ldots \frac{3968 e^4 + 2145 e^3 + 186 e^2 + e}{181440\, n^4} u^9 - \text{etc.}\right) \sqrt{\frac{m^3}{n}}.$$

1494. Les nouvelles séries que je donne dans cette solution ont leurs avantages. Elles sont surtout supérieures aux anciennes séries (1488, 1489), en deux points. 1°. Dans les coefficiens de celles-ci, les puissances ultérieures de e sont négligées; aucune quantité n'est omise dans les miens. 2°. Jusque vers 45° d'anomalie moyenne, les anciennes séries sont moins convergentes que les nouvelles.

Je crois cependant à propos d'ajouter encore la série suivante, à

laquelle on parvient, en substituant dans la 2ᵉ la valeur (285) de cos. x, puis celle des puissances de x tirée de la série (1491).

$$r = m - \frac{e}{2m^2}z^2 - \frac{3e^2 - e}{24m^5}z^4 - \frac{45e^3 - 24e^2 + e}{720m^8}z^6 - \ldots\ldots$$
$$\frac{1575e^4 - 1107e^3 + 117e^2 - e}{40320m^{11}}z^8 - \text{etc.}$$

1495. *Trouver une méthode expéditive pour calculer les tables de l'équation du centre, et du rayon vecteur d'une planète.*

On peut employer les formules (12ᵉ, 14ᵉ) pour faire ces calculs avec beaucoup de promptitude, et d'ailleurs avec autant d'exactitude qu'on peut le desirer. Nous en donnerons un exemple, en cherchant l'équation du centre et le rayon vecteur de Mercure pour 1° d'anomalie moyenne.

Partons de $z = 0$; alors $r = a + e$, et $\delta z = 1°$. En calculant l'équation 14ᵉ avec les élémens (1481), et employant dans le premier calcul r au lieu de $(r + \frac{1}{2}\delta r)$, parce que δr n'est pas encore connu, on a

$$\begin{aligned} \log.\ (\delta z = 3600'') &= 3,5563025 \\ \log. a &= 4,5878252 \\ (6ᵉ),\ \log. b &= 4,5784525 \\ \hline \log.\ \text{constant} &\ \ 2,7225782 \\ \text{compl.}\ \log. rr &= 0,6620100 \\ \hline \log.\ \delta u &= 3,584588 \end{aligned}$$

Et par conséquent $\delta u = 40'\ 24''$, à très-peu-près.

Nommant q l'équation du centre, on sait que $z - u = q$, ce qui donne $\delta z - \delta u = \delta q$. Donc, dans notre exemple, $\delta q = 60' - 40'\ 24'' = 19'\ 36''$. C'est la différence de l'équation du centre, de $z = 0$ à $z = 1°$. Mais (1492) lorsque $z = 0$, on a de même $u = 0$, et par conséquent $q = 0$. Donc lorsque $z = 1°$, $u = 40'\ 24''$, et $q = 19'\ 36''$; ce qui est précisément l'équation du centre de Mercure, à 1° d'anomalie moyenne, dans les Tables de De la Lande.

1496. Pour le calcul du rayon vecteur, il est à propos de convertir l'équation 12ᵉ, de manière qu'elle donne les différences des

logarithmes, parce que ce sont les logarithmes que les tables renferment. En prenant le premier terme de la série (375), beaucoup plus exact que le premier terme de la série (D), on a $\delta \log. r = \mathrm{M} \times \frac{\delta r}{r + \frac{1}{2}\delta r}$; et, en substituant la valeur (1483) de δr,

$$\delta \log. r = -\frac{\mathrm{M}ae\delta z}{b\mathrm{R}''} \times \frac{\sin.(u + \frac{1}{2}\delta u)}{r - \frac{1}{2}\delta r},$$

équation qui se calcule comme il suit :

(392), log. M =	9, 6377843
log. a =	4, 5878232
log. e =	3, 9006620
log. δz =	3, 5563025
compl. log. b =	5, 4215475
(631), compl. log. R″ =	4, 6855749
log. constant	1, 789694
log. sin. $(u + \frac{1}{2}\delta u = 0^\circ\ 20'\ 12'')$ =	7, 769075
compl. log. $(r = a + e)$ =	5, 331005
log. $(-\delta \log. r)$ =	4, 889774
Ce logarithme donne $\delta \log. r$ =	− 0, 0000078
Mais log. r =	4, 6689950
Somme	4, 668987

Dans les tables de De la Lande, ce log. du rayon vecteur de Mercure, à 1° d'anomalie moyenne, se termine par un 5, à cause de quelque légère différence, à ce qu'il paraît, dans les élémens (1481) qu'il a employés.

1497. La valeur trouvée de $\delta \log. r$ sert à corriger les deux calculs précédens où on aurait dû employer log. $(r - \frac{1}{2}\delta r)$ au lieu de log. r. Cette correction se réduit à ajouter 4 au dernier chiffre de log. $(-\delta \log. r)$, ce qui n'altère point dans ce cas la valeur de $\delta \log. r$, et à ajouter 8 au dernier chiffre de log. δu, ce qui donne plus exactement $\delta u = 40'\ 24'', 35$.

1498. En faisant $z = 1^\circ$, on trouvera de même les valeurs de u et de q correspondantes à $z = 2^\circ$; et on procédera de la même

manière, de degré en degré. Pour se convaincre de la promptitude de ces opérations, il suffit d'observer 1°. que la marche des valeurs successives de ∂ log. r avertit le Calculateur de la valeur très-approchée de la quantité log. ($r - \frac{1}{2}\partial r$) qu'il doit employer dans chaque calcul; ce qui lui épargne le travail des corrections: 2°. qu'au moyen des logarithmes constans, les deux calculs de l'équation du centre et du rayon vecteur n'exigent d'autre recherche que celle de trois logarithmes pour chaque degré d'anomalie moyenne.

1499. On pourrait craindre, en se servant de formules dont l'exactitude est à la vérité très-approchée, mais non pas rigoureuse, que l'accumulation des erreurs ne devînt telle qu'elle dût mériter attention. Mais il sera facile de se rassurer en faisant de temps en temps les calculs par le moyen des équations (1°, 2°, 5°), et cherchant x par la méthode (1485). Je suppose, par exemple, que ces calculs plus rigoureux se fassent de 30° en 30° d'anomalie moyenne. Ensuite pour faire avec plus de sureté les calculs intermédiaires au moyen de mes formules différentielles, 1°. on tiendra compte des centièmes de seconde, dans la formation des valeurs successives de u et de q; 2°. on formera les logarithmes successifs du rayon vecteur au moins avec une décimale de plus que ce qu'on veut en donner aux logarithmes de la table; 3°. on partira de 0° d'anomalie moyenne pour monter jusqu'à 15°, et de 30° pour descendre jusqu'à 15°: on s'y prendra de même pour les autres intervalles.

1500. Observons que les équations 12°, 14°, et au lieu de celles-là, les 8° et 10° sont singulièrement propres à fournir avec une grande précision les parties proportionnelles dans les tables déjà faites; lorsque par la règle de trois qu'on emploie ordinairement on ne pourra obtenir toute l'exactitude desirée, à cause de la trop grande inégalité des variations de l'équation du centre, et du logarithme du rayon vecteur.

1501. *Trouver la plus grande équation du centre d'une planète.*

Au point de la plus grande valeur de q, on a $\partial q = 0$, (228); par conséquent l'équation (1495), $\partial q = \partial z - \partial u$, donne, dans ce cas, $\partial z = \partial u$. Donc alors $ab = rr$, (1482), ou

$r = \sqrt{ab} = \frac{bb}{a - e \cos. u}$, (1480). De cette dernière équation on tire

$$\cos. u = \frac{a - b\sqrt{\frac{b}{a}}}{e}.$$

1502. Cette formule est simple et peut-être neuve. Mais comme la différence entre les deux termes du numérateur se trouve ordinairement petite, ce qui peut nuire à l'exactitude des secondes dans la valeur de u, je transforme cette équation, et j'ai (I. 42e),

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{b\sqrt{\frac{b}{a}} - (a - e)}{a + e - b\sqrt{\frac{b}{a}}}}.$$

1503. Je considère alors que $(a - e)(a + e) = bb$, (1480) : prenant dans cette équation les valeurs de $a + e = \frac{bb}{a - e}$ et de $a - e = \frac{bb}{a + e}$, les substituant dans l'équation précédente, et divisant la fraction par $b\sqrt{\frac{b}{a}}$, j'obtiens l'expression suivante qui peut être plus commode pour l'usage des logarithmes :

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{ab}}{a + e}}{\frac{\sqrt{ab}}{a - e} - 1}}.$$

L'une ou l'autre de ces deux dernières formules fera connaître avec précision l'anomalie vraie correspondante à la plus grande équation du centre. La valeur trouvée de tang. $\frac{1}{2} u$ sera utile pour le calcul de l'équation 5e (1480), qui fera connaître l'anomalie excentrique, de laquelle on déduira ensuite l'anomalie moyenne en employant l'équation 1e ; et enfin l'équation $q = z - u$, (1495), donnera la plus grande valeur cherchée.

1504. *Trouver une méthode expéditive pour calculer la table générale du mouvement des comètes dans une orbite parabolique.*

Nommons t le temps écoulé depuis le passage au périhélie, de la comète de 109 jours : (c'est ainsi qu'on appelle la comète dont

le rayon vecteur dans le périhélie serait égal à la distance moyenne du Soleil à la Terre, parce que cette comète, en partant du périhélie, parcourrait 90° d'anomalie vraie en 109 jours). Nous considérons le temps t comme compté en jours et décimales de jours.

On a (De la Lande, *Astr.* 3115),

$$(F) \ldots\ldots\ldots \quad \text{tang.}^3 \tfrac{1}{2} u + 3 \,\text{tang.} \tfrac{1}{2} u = \frac{4t}{109{,}6154};$$

Et en différentiant, $\frac{3\partial u \,\text{tang.}^2 \frac{1}{2} u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u} + \frac{3\partial u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u} = \frac{4\partial t}{109{,}6154} = \frac{3\partial u}{2 \cos.^2 \frac{1}{2} u}$ $(1 + \text{tang}^2. \tfrac{1}{2} u) = \frac{3\partial u}{2 \cos.^4 \frac{1}{2} u}$, (I. 19°). Je mets, pour plus d'exactitude, (941), $\cos. \tfrac{1}{2} (u + \tfrac{1}{2}\partial u)$ au lieu de $\cos. \tfrac{1}{2} u$, et j'ai

$$(G) \ldots\ldots \quad \partial u = \frac{4 R'' \partial t}{164{,}4231} \times \cos.^4 \tfrac{1}{2} (u + \tfrac{1}{2} \partial u).$$

Le facteur R″ est nécessaire pour obtenir ∂u en secondes.

1505. Il est évident que la fraction $\frac{4R''\partial t}{164{,}4231}$ étant une quantité constante dans le calcul d'une table, ce calcul doit se faire très-rapidement en employant la formule que je viens de donner. Il sera aussi très-exact, (et même plus que par la solution directe de la formule (F) au moyen de ma table V), lorsqu'on tiendra compte des centièmes de secondes dans la formation des valeurs successives de u, comme je l'ai dit (1499), et lorsque pour obvier à l'accumulation des petites erreurs, on résoudra par intervalles l'équation (F), en employant la valeur de u trouvée par le moyen de l'équation (G), cherchant celle de t, et faisant le calcul avec les nombres naturels. L'erreur dans la valeur de t étant connue, il sera facile de corriger l'erreur de u, en employant la même formule (G).

La table générale du mouvement des comètes a été recalculée avec le plus grand soin et augmentée par Delambre (*Tables de De la Lande*, pag. 204). Cependant les formules (F), (G) peuvent encore avoir leur application, soit pour la vérification de cette table ou de toute autre de la même espèce, soit pour trouver les quantités intermédiaires ou les parties proportionnelles avec la plus grande précision.

1506. *Déterminer par trois observations la position du cours*

d'une comète, supposé uniforme et en ligne droite. (Newton, Arith. univ. Sect. 4, Chap. II. Probl. XXX).

Soit l'observateur en A; la comète, au moment de la première observation, en B; au moment de la seconde, en C; de la troisième, en D. On connaît le rapport BC : CD, ou BC : BD, puisqu'on suppose le mouvement proportionnel aux intervalles de temps entre les observations respectives. On connaît de plus, par les observations, les angles BAC, CAD. L'angle B est ce qu'on cherche. Fig. 86.

Or (III. 22°), $BC = \frac{AB}{\cos. B + \sin. B \cot. BAC}$, et $BD = \ldots\ldots$ $\frac{AB}{\cos. B + \sin. B \cot. BAD}$. On a donc BC : BD :: cos. B + sin. B cot. BAD : cos. B + sin. B cot. BAC; et, en divisant le second rapport par cos. B, BC : BD :: 1 + tang. B cot. BAD : 1 + tang. B cot. BAC. D'où l'on déduit

$$\text{tang. } B = \frac{BD - BC}{BC \cot. BAC - BD \cot. BAD} = \frac{1 - \frac{BC}{BD}}{\frac{BC}{BD} \cot. BAC - \cot. BAD}.$$

1507. *Trouver le mouvement horaire d'une planète en longitude.*

En nommant δz le mouvement horaire moyen en longitude, δu le mouvement horaire vrai sur l'orbite, ces mouvemens et ceux d'anomalie correspondans étant sensiblement égaux pour un temps d'une heure; la formule (1483, 14°) donne la solution de ce problème avec plus d'exactitude qu'on n'en peut desirer dans un passage de Mercure ou de Vénus sur le disque du Soleil : la 10° suffira, lorsque le problème n'exigera pas autant de précision.

1508. Si l'on veut avoir le mouvement horaire réduit au plan de l'écliptique, qu'on représente ce mouvement par AE, et le mouvement correspondant sur l'orbite par CD. Puisque A = 90° = E, les angles A et B sont constans, et changeant C en A et A en C dans l'analogie infinitésimale (1355), on aura $\delta AB : \delta BC ::$ cos. B : cos.²AC. Mais AC est la latitude héliocentrique de la planète, B l'inclinaison de l'orbite, $\delta BC = CD = \delta u$. Donc en faisant AE ou $\delta AB = \delta u'$, et mettant dans l'analogie la valeur (1482, 10°) de δu, on aura Fig. 61.

$$\delta u' = \delta z \times \frac{ab}{rr} \times \frac{\cos. inclin.}{\cos.^2 lat.}.$$

1509. *Trouver le mouvement horaire d'une planète en latitude.*

La distance à une planète, comptée de son nœud ascendant, selon l'ordre des signes, sur l'orbite, se nomme *argument de latitude*. Comme le mouvement du nœud est insensible dans un temps d'une heure, on a δ *arg. lat.* = δ *long.* plan. = δu, (1507). Cela posé, je prends l'équation (De la Lande, *Astr.* 1129), sin. *lat.* = sin. *incl.* sin. *arg. lat.* = sin. *incl.* sin. *dist.* ☊, et différentiant, j'ai δ *lat.* cos. *lat.* = δu cos. *dist.* ☊ sin. *incl.* = δu sin. *lat.* cot. *dist.* ☊. En substituant la valeur de δu, (1482, 10ᵉ), et désignant encore par δz le mouvement horaire moyen en longitude, j'obtiens la formule suivante ;

$$\delta\ lat. = \delta z \times \frac{ab}{rr} \times \text{tang. } lat. \text{ cot. } dist.\ ☊.$$

1510. *Trouver le mouvement des nœuds des orbites des planètes, sur l'écliptique, produit par les attractions réciproques.*

Fig. 87. Soit AB l'écliptique, et supposons que les signes procèdent de B en A; soit AC l'orbite d'une planète P, et BC l'orbite d'une autre planète p. Je considère d'abord l'effet de l'attraction de la planète p, en raison duquel le nœud C des deux orbites rétrograde sur l'orbite BC, de sorte que l'orbite troublée AC se trouve, par exemple, dans la situation ac. Il est visible que cette perturbation n'altère pas l'angle B : de plus l'altération qu'éprouve l'angle C de l'inclinaison mutuelle des deux orbites est si faible, d'après les observations, que relativement au mouvement des nœuds on peut la considérer comme une quantité à-peu-près nulle, et supposer sans scrupule que $C = c$. Donc le triangle ABC, en se changeant en aBc, conserve comme constans les angles B et C; on a par conséquent (1351) :

(H)...... δBC : δAB :: 1 : cos. B + sin. B cos. AB cot. A.

Or δBC est le mouvement rétrograde Cc de l'orbite troublée, sur celle de la planète troublante, et la quantité de ce mouvement est déterminée par la théorie de l'attraction; δAB est le mouvement cherché du nœud A de l'orbite troublée, sur l'écliptique; B ou CBA est l'inclinaison de l'orbite perturbatrice; A ou BAC est le supplément de l'inclinaison de l'orbite troublée; AB est la distance entre les nœuds des deux planètes sur l'écliptique. Les trois dernières quantités sont toujours connues; et par conséquent notre

formule (H) a l'avantage de résoudre immédiatement le problème, en donnant l'inconnue sans qu'on soit obligé à aucun calcul préliminaire pour déterminer la valeur de quelque autre partie du triangle ABC.

1511. Pour trouver maintenant le mouvement du nœud de la planète p, produit par l'attraction de la planète P, on appellera BC l'orbite de celle-ci, AC l'orbite de p, transportée en ac par la perturbation; et l'analogie (H) résoudra encore ce problème. On observera seulement qu'ici BAC est l'inclinaison de l'orbite troublée, et B le supplément de l'inclinaison de l'orbite perturbatrice. Fig. 88.

Si donc l'on nomme PP la planète troublante, pp la planète troublée, m le mouvement de l'orbite troublée sur celle de la planète troublante, et qu'on observe qu'au lieu de l'angle d'inclinaison de celle des deux planètes dont le nœud est plus avancé en longitude, on doit employer le supplément de ce même angle, l'analogie (H) donnera généralement

(K)...Mouv. du nœud $= m$(cos. *incl.PP* + sin. *incl.PP* cos. *dist. nœuds* cot. *incl. pp*).

1512. La fig. 87 suppose *rétrograde* le mouvement Aa du nœud A sur l'écliptique; la fig. 88 le suppose *direct*. Ce serait le contraire, si ca coupait CA entre les points A et C, comme cela arrive aussi. Il importe donc d'avoir une règle générale pour déterminer dans quel cas le mouvement cherché est *direct*, et dans quel autre il est *rétrograde*. Les signes que j'ai donnés aux différentielles dans la construction de mes analogies conduisent à cette règle. Puisque dBC et dAB ont le même signe dans l'analogie (H), il s'ensuit que ces variations se font dans un même sens lorsque le quatrième terme de l'analogie est positif, et en sens contraires lorsque ce terme est négatif. Or dans le système de l'attraction, le mouvement Cc est toujours *rétrograde;* ensorte que BC diminue, et que dBC est *négatif*. De plus, la diminution de AB indique le mouvement *rétrograde* dans le cas de la fig. 87, et le mouvement *direct* dans le cas de la fig. 88. Donc *le mouvement du nœud ascendant de la planète troublée est ou* direct *ou* rétrograde, *selon que le nœud ascendant de la planète troublante est* plus *avancé ou* moins *avancé en longitude que le nœud de la planète troublée.* Cette règle suppose positif le facteur binôme de m dans l'équation

(K) : lorsqu'il sera négatif, on mettra dans la même règle *moins* au lieu de *plus*, et *plus* au lieu de *moins*. De cette manière on n'aura pas besoin de consulter une figure pour se guider dans le calcul.

1513. Appliquons notre solution et nos règles à un exemple dans lequel, pour abréger, nous ferons abstraction de la valeur absolue de ☊BC et de ☊AB. La longitude du nœud de Saturne est actuellement $3^s\ 22^\circ$, celle du nœud de Mars $1^s\ 18^\circ$. Donc la distance des nœuds est de $2^s\ 4^\circ = 64^\circ$. L'inclinaison de l'orbite de Saturne est de $2^\circ\ 30'$, celle de l'orbite de Mars de $1^\circ\ 51'$. Si on cherche l'effet de l'attraction de Mars sur le nœud de Saturne, on a log. cos. *incl. PP* = log. cos. $1^\circ\ 51' = 9,9998$; et log. (sin. *incl. PP* cos. *dist. nœuds* cot. *incl. pp*) = log (sin. $1^\circ\ 51'$ cos. 64° cot. $177^\circ 30'$) $= -9,5107$, logarithme d'une quantité négative (1441). Comme ce logarithme est plus petit que le précédent, il s'ensuit que le facteur binôme de m est une quantité positive; et puisque le nœud de Mars, planète troublante, est *moins* avancé en longitude que le nœud de Saturne, le mouvement du nœud de Saturne, en vertu de l'attraction de Mars, sera *rétrograde*.

Si l'on cherche l'effet de l'attraction de Saturne sur le nœud de Mars, on a log. cos. *incl. PP* = log. cos $177^\circ\ 30' = -9,9996$; et log. (sin. *incl. PP* cos. *dist. nœuds* cot. *incl. pp*) = log. (sin. $177^\circ\ 30'$ cos. 64° cot. $1^\circ\ 51'$) $= 9,7723$. Le facteur de m est donc négatif, et par conséquent on doit changer *moins* en *plus* dans la règle, et les mots *plus* et *rétrograde* se correspondront. Mais le nœud de Saturne, ou de la planète troublante, est le *plus* avancé en longitude; donc aussi l'attraction de Saturne fait *rétrograder* le nœud de Mars.

1514. *Trouver le* maximum *du mouvement du nœud d'un satellite sur l'orbite de Jupiter, causé par l'attraction d'un autre satellite.*

Fig 87. Soit BA l'orbite de Jupiter, BC celle du satellite troublant, AC celle du satellite troublé. Il résulte des perturbations continuelles, que les nœuds A et C rétrogradant en a et en c, et successivement de plus en plus, se confondent enfin avec le nœud B; puis l'orbite

Fig. 88. troublée AC passe au-delà et s'avance de l'autre côté du nœud B,

jusqu'à ce que le nœud A arrive à la plus grande distance possible du nœud B. Alors l'orbite AC se rapproche de nouveau, les nœuds A et C reviennent se confondre avec le nœud B; puis le nœud A s'éloigne de B jusqu'à ce que la distance AB soit la plus grande Fig. 87. possible. Le nœud A du satellite troublé va et vient ainsi périodiquement de chaque côté du nœud B du satellite troublant. Or la plus grande valeur de AB est ce qu'il est question de déterminer.

1515. Lorsqu'un triangle a deux parties constantes, les questions *de maximis* et *de minimis* des parties variables se résolvent immédiatement par la Trigonométrie, (on en verra (1652, 1656) d'autres exemples), sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux opérations quelquefois pénibles du calcul différentiel qu'exige la règle (228).

En effet dans le triangle ABC on a sin. B : sin. C :: sin. AC : sin. AB. Mais les angles B et C sont constans (1510): il est donc évident, par les tables des sinus, que sin. AB sera le plus grand qu'il soit possible, quand on aura $AC = 90°$, et que si alors AB est $< 90°$, ce sera aussi le moment du *maximum* de AB. Mais lorsque $AC = 90°$, en premier lieu AB ne peut être de 90°, parce que (1012) B serait aussi de 90°; ce qui n'est pas, puisqu'il s'en faut qu'aucun des satellites de Jupiter ait son orbite perpendiculaire sur l'orbite de cette planète : en second lieu AB ne peut être plus grand que 90°; car (VII. 16°), comme $AC = 90$, $\cot. B = -\cos. AB \cot. A$, ou $\cos. AB = -\text{tang.} A \cot. B$, et les deux angles A et B du triangle ABC étant évidemment et nécessairement d'espèces différentes, il s'ensuit que cos. AB est toujours positif. Donc la distance qu'apporte entre les nœuds de deux satellites l'attraction de l'un des deux (abstraction faite de la réaction du satellite troublé) est la plus grande possible, lorsque l'intersection commune de leurs orbites est à 90° du nœud du satellite troublé.

La dernière équation, $\cos. AB = -\text{tang.} A \cot. B$, fera donc connaître aisément la plus grande valeur de AB.

1516. De la Lande a le premier reconnu que *les perturbations doivent altérer l'inclinaison des orbites planétaires sur l'écliptique;* découverte très-importanto, surtout par son application aux changemens d'inclinaison des orbites des satellites sur l'orbite de Jupiter. Comme je ne crois pas que pour déterminer ces chan-

gemens on puisse rien ajouter à la formule et à la règle données par ce célèbre Astronome (*Astr.* 1377 à 1381), je me contente de les indiquer au Lecteur.

1517. *Trouver le changement de l'ascension droite, de la longitude, de la latitude et de l'angle de position des astres, et celui de l'obliquité de l'écliptique, occasionnés par l'attraction des planètes sur la Terre.*

Fig. 87. Soit AC l'écliptique, l'ordre des signes de A en C, AB l'équateur, A le premier point du bélier, BC l'orbite d'une planète dont l'attraction sur la Terre déplace l'écliptique de AC en *ac*. Les angles B, C étant constans (1510), et la théorie de l'attraction donnant la quantité C*c* que nous avons appelée *m*, on demande d'abord la valeur de A*a*, variation de AB, ou de l'ascension droite des astres qui se compte du point A, et la valeur de (CAB — *ca*B), variation de l'angle A, ou de l'obliquité de l'écliptique. Or (1349, 1340), ∂BC : ∂AB :: sin. A : sin. C cos. AC, et ∂BC : ∂A :: 1 : sin. AC sin. C. Donc, nommant *PP* la planète troublante, ☊ la longitude de son nœud ascendant, on a

(K)... variat. *asc. dr.* $=$ *m* cos. ☊ $\times \frac{\text{sin. } incl. PP}{\text{sin. } obliq.}$.

(L)... variat. *obliq.* $=$ *m* sin. ☊ sin. *incl. PP.*

Dans le calcul de ces formules la valeur de *m* doit être employée négativement (1512); ensorte que l'ascension droite et l'obliquité *diminuent*, lorsque cos. ☊ et sin. ☊ sont respectivement positifs, (73).

En appliquant ces formules à chacune des planètes successivement, et prenant la somme des résultats de chaque formule, on a l'effet total des perturbations planétaires sur l'ascension droite des astres et sur l'obliquité de l'écliptique.

1518. Soit maintenant P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique,
Fig. 89. S le lieu d'un astre, L la situation nouvelle du pôle de l'écliptique troublée par la somme des attractions des planètes. On connaît par les formules précédentes le petit angle EPL qui est la diminution de l'ascension droite, commune à tous les astres, et (PE $\backsim$ PL) qui est la diminution de l'obliquité : on demande la variation qui a lieu, à raison de ces diminutions, sur l'angle E ou sur les longitudes

des astres, sur le côté ES ou sur leurs latitudes, et sur l'angle S de position.

1519. En se changeant en PLS, le triangle PES conserve comme constant le seul côté PS (d'où il suit, pour le remarquer en passant, que les déclinaisons des astres ne sont point altérées par les perturbations planétaires). J'emploierai donc la méthode que j'ai indiquée (687). Je suppose d'abord que l'angle EPS est de même constant; puis faisant $P = A$, $S = B$, $E = C$, les analogies infinitésimales (1218, 1233, 1213), me donnent

$$- \delta E : \delta PE :: \sin. E : \text{tang}. ES$$
$$\delta ES : \delta PE :: \cos. E : 1$$
$$\delta S : \delta PE :: \sin. E : \sin. ES.$$

Je suppose actuellement qu'indépendamment de PS, PE soit constant. J'aurai (1318, 1305, 1310), en changeant les signes dans le premier rapport,

$$- \delta E : \delta P :: \cos. PE - \sin. PE \cos. E \cot. ES : 1$$
$$\delta ES : \delta P :: \sin. PE \sin. E : 1$$
$$- \delta S : \delta P :: \sin. PE \cos. E : \sin. ES.$$

Prenant les sommes des deux valeurs partielles de δE, de δES et de δS données par ces six analogies, je trouve

$$\delta E = - \delta PE \sin. E \cot. ES - \delta P (\cos. PE - \sin. PE \cos. E \cot. ES),$$
$$\delta ES = \delta PE \cos. E + \delta P \sin. PE \sin. E,$$
$$\delta S = \frac{\delta PE \sin. E - \delta P \sin. PE \cos. E}{\sin. ES}.$$

1520. La variation de la longitude, correspondante à la quantité $\delta P \cos. PE$, est commune à tous les astres; ensorte qu'on peut la négliger ici et la laisser confondue avec la précession des équinoxes (1523); car l'objet des formules précédentes est de connaître et de distinguer des variations communes à tous les astres la variation propre et particulière que les perturbations occasionnent sur la position d'un astre donné. Cela posé, rappelons-nous que l'on a (1448), $E = 90° - long.$, $ES = 90° - lat.$, $P = 90° + asc. dr.$, $PE = obl.$; par conséquent $\delta E = - \delta\, long. = -$ var. *long.*, $\delta ES = - \delta\, lat. = -$ var. *lat.*, $\delta P = \delta\, asc. dr. =$ var. *asc. dr.*,

Fig. 89. et δPE = δ *obl.* = var. *obl.* Ces dénominations ou valeurs étant substituées dans les équations (1519), nous aurons, pour la solution du problème, les équations qui suivent :

$$\text{var.}\,long. = \text{tang.}\,lat.(\text{var.}\,obl.\,\text{cos.}\,long. - \text{var.}\,asc.\,dr.\,\text{sin.}\,obl.\,\text{sin.}\,long.)$$
$$\text{var.}\,lat. = -\text{var.}\,obl.\,\text{sin.}\,long. - \text{var.}\,asc.\,dr.\,\text{sin.}\,obl.\,\text{cos.}\,long.$$
$$\text{var.}\,ang.posit. = \frac{1}{\text{cos.}\,lat.}(\text{var.}\,obl.\,\text{cos.}\,long. - \text{var.}\,asc.dr.\,\text{sin.}\,obl.\,\text{sin.}\,long.)$$

1521. Dans ces formules, on doit introduire les valeurs de var. *obl.* et de var. *asc. dr.*, avec le signe et la quantité qui leur conviennent suivant les équations (K), (L).

Quand on a en nombres les coefficiens de sin. *long.* et de cos. *long.*, le second membre de chacune des équations (1520) se réduit à un seul terme par la méthode (948).

Si la latitude est australe, on fera positif le second membre de l'avant-dernière équation ; car alors + δES = + var. *lat.*

Si l'astre est dans le second ou dans le troisième quart de l'écliptique, on changera les signes du second membre de la dernière équation (1520); car l'angle de position passant par zéro à 90° de longitude de l'astre, devient ensuite négatif, (70). Cette règle est confirmée dans le cas présent par l'équation $\text{cot.}\,S = \frac{\text{cos.}\,lat.\,\text{cot.}\,obliq.}{\text{cos.}\,long.}$ — sin. *lat.* tang. *long.*, (VII. 15'). On peut s'en assurer en l'appliquant à des exemples.

1522. *Trouver la correction de l'ascension droite et de la déclinaison d'un point quelconque de l'écliptique, relativement à la variation de l'obliquité.*

Fig. 64. Soit BC un arc de l'écliptique, auquel corresponde l'arc AB de l'équateur quand l'obliquité est ABC, et l'arc BD de l'équateur si l'obliquité devient CBD. Le côté BC et l'angle droit opposé étant constans, on a (1284, 1267), δAB : — δB :: sin. 2AB : 2 cot. B, et δAC : δB :: tang. AC : tang. B. Donc.

$$\text{correct.}\,asc.\,dr. = -\tfrac{1}{2}\,\text{var.}\,obl.\,\text{tang.}\,obl.\,\text{sin.}\,2\,asc.\,dr.$$
$$\text{correct.}\,décl. = \text{var.}\,obl.\,\text{cot.}\,obl.\,\text{tang.}\,décl.$$

1523. *Trouver les changemens de l'ascension droite, de la déclinaison, et de l'angle de position des astres, causés par la*

précession des équinoxes, ou par les attractions qu'exercent le soleil et la lune sur le sphéroïde terrestre.

Soit S un astre, E le pôle de l'écliptique, P le pôle de l'équateur, Fig. 90.
lequel, à cause des attractions solaire et lunaire, change de position, passe en L, et continue de se déplacer successivement, en accomplissant sa révolution autour du pôle E dans l'intervalle de 25750 années environ. Il est visible que le côté ES, et par conséquent la latitude de l'astre, ne souffre point d'altération. Mais dans ce problème on regarde encore le côté PE comme constant, ou comme égal à LE, parce que l'altération qu'éprouve l'obliquité PE de l'écliptique dépend uniquement des inégalités périodiques de l'attraction lunaire, et se considère séparément dans le problème suivant. Ainsi dans le triangle PES qui se convertit en ELS et conserve comme constans les côtés EL, ES, étant donné PEL ou la précession en longitude, on demande la variation correspondante des angles P, S, et du côté PS. Faisant $E = A$, $S = B$, $P = C$, on a (1318, 1305, 1310),

$$\delta P : -\delta E :: \cos. PE - \sin. PE \cos P \cot. PS : 1,$$
$$-\delta PS : -\delta E :: \sin. PE \sin. P : 1,$$
$$\delta S : -\delta E :: \sin. PE \cos. P : \sin. PS.$$

Or comme nous l'avons vu (1448), $E = 90° - long.$, $P = 90° + asc. dr.$, $PS = 90° - décl.$; par conséquent $-\delta E = +\delta long. = +$ précess. *long.*, $\delta P = +$ préc. *asc. dr.*, $\cos. P = -\sin. asc. dr.$, et $-\delta PS = +$ précess. *décl.* De plus en employant la méthode (1422), on trouve que pour avoir les précessions avec une grande exactitude, il faut écrire dans le second rapport des analogies précédentes, $P + \frac{1}{2}\delta P$ au lieu de P, et $PS + \frac{1}{2}\delta PS$ au lieu de PS; ce qui importe surtout lorsqu'on cherche le mouvement de précession pour un intervalle de plusieurs années. Appelant donc *asc. dr. intermédiaire*, *décl. intermédiaire* l'ascension droite et la déclinaison de l'astre dans l'année qui tient le milieu entre la première et la dernière des années qu'embrasse le calcul, on a

$$\text{préc. } asc.\,dr. = \text{préc. } long. (\cos. obl. + \sin. obl. \sin. asc.\,dr.\,int. \,\text{tang. } décl.\,int.)$$
$$\text{préc. } décl. = \text{préc. } long. \sin. obl. \cos. asc.\,dr.\,interm.$$
$$\text{préc. } ang.\,posit. = -\,\text{préc. } long. \sin. obl. \times \frac{\sin. asc.\,dr.\,interm.}{\cos. décl.\,interm.}.$$

Fig. 90. Lorsque la déclinaison sera australe, on fera négatif le second membre de la seconde équation; car alors $-☊PS = -$ préc. *décl.*

Si l'astre est dans les signes descendans, on fera positif le second membre de la troisième équation; car alors $-☊E = -$ préc. *long.*

1524. Pour les étoiles circompolaires, il ne suffit pas, attendu les inégalités rapides dans la valeur de tang. *décl.*, d'employer la déclinaison intermédiaire pour avoir exactement la valeur de la précession en ascension droite, quand il s'agit d'un intervalle de plusieurs années. On pourrait remédier à cette difficulté, en partageant l'intervalle en intervalles plus courts, et multipliant les calculs. Mais au surplus je propose la formule suivante, qui est rigoureuse, et tirée de la première analogie, (1314).

$$\text{sin. préc. } asc.\,dr. = 2\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}\,\text{préc. } longitude \times \frac{\text{cos.}(asc.\,dr. + \text{préc. } asc.\,dr.)}{\text{cos.}(long. + \text{préc. } long.)}$$

$$\times \left(\text{cos. } obl.\ \text{cos.}\,\overline{long. + \tfrac{1}{2}\text{préc. } long.}\ \text{cos. } asc.\,dr. + \text{sin.}\,\overline{long. + \tfrac{1}{2}\text{préc. } long.}\ \text{sin. } asc.\,dr.\right)$$

Au lieu de $\frac{\text{cos.}\,(asc.\,dr. + \text{préc. } asc.\,dr.)}{\text{cos.}\,(long. + \text{préc. } long.)}$, on peut mettre, si on le veut, $\frac{\text{cos. } lat.}{\text{cos.}\,(décl. + \text{préc. } décl.)}$, (VII. 6e).

Mon illustre ami Delambre préfère (*Connaiss. des Temps pour* 1792, pag. 206), la formule (1313), plus chargée d'élémens que la formule (1314), mais qui ne contient pas dans le second membre la quantité cherchée.

Quant à la précession en déclinaison, si on voulait une formule rigoureuse, on emploierait la formule (1303).

1525. *Trouver les changemens de l'ascension droite et de la déclinaison d'un astre, produits par la nutation de l'axe de la Terre.*

Dans le problème précédent nous avons supposé constante l'obliquité de l'écliptique; ce qui n'est pas rigoureusement vrai, puisque les observations ont appris au célèbre Bradley, que les changemens considérables de l'inclinaison de l'orbite de la lune relativement à l'équateur, causés par la rapidité du mouvement de son nœud sur l'écliptique, rendent les effets de son attraction périodiquement inégaux, ainsi que l'exigeait la théorie de Newton.

Voici en quoi consiste l'inégalité : le pôle P, au lieu de rester toujours à égale distance du pôle E, décrit, à-peu-près en 18 ans et demi, une ellipse dont le grand axe est de 18", et le petit axe de 13",4 : la direction du grand axe est vers le pôle de l'écliptique, et par conséquent la plus grande variation que subit l'obliquité à raison de ce mouvement du pôle P, mouvement qu'on nomme *nutation*, s'étend à 9" en plus et à 9" en moins. Les variations intermédiaires sont proportionnelles au cosinus de la longitude du nœud de la lune. Et en général la formule suivante

$$\text{nut. } obl. = 9'' \cos. \Omega$$

donne la correction de l'obliquité moyenne ou uniformément décroissante (1517), pour avoir l'obliquité apparente dans un temps donné.

1526. Je suppose que la nutation transporte le pôle de L en P, et qu'on ait PES > LES et PE > EL, ainsi qu'il arrive dans le premier quart de la longitude du nœud. Le triangle ELS, en se changeant en PES, ne conserve comme constant que le côté ES : la formule précédente donne la variation du côté PE; on a celle de l'angle E par celle qui suit, (De la Lande, *Astr.* 2897, 2910),

$$\text{nut. } long. = -\frac{6'',7}{\sin. obl.} \times \sin. \Omega = -16'',8 \sin. \Omega.$$

1527. Or ayant deux variations, je trouve les autres facilement par la méthode (687). Je suppose d'abord constant, outre le côté ES, l'angle E, et j'ai (1218, 1233), en faisant A = E, B = S, C = L,

$$-\delta L : \delta EL :: \sin. L : \text{tang. } SL;$$
$$\delta SL : \delta EL :: \cos. L : 1.$$

Faisant ensuite constant, outre le côté ES, le côté EL, je trouve (1318, 1305),

$$\delta L : -\delta E :: \cos. EL - \sin. EL \cos. L \cot. SL : 1,$$
$$\delta SL : \delta E :: \sin. EL \sin. L : 1;$$

puis, en prenant les sommes des deux valeurs de δL et de δSL,

$$\delta L = -\delta EL \sin. L \cot. SL - \delta E(\cos. EL - \sin. EL \cos. L \cot. SL);$$
$$\delta SL = \delta EL \cos. L + \delta E \sin. EL \sin. L.$$

Fig. 90. Or $L = 90^\circ + asc.\ dr.$, $SL = 90^\circ - décl.$, $E = 90^\circ - long.$; par conséquent $\delta L = \delta\ asc.\ dr. = \text{nut. } asc.\ dr.$, $\delta SL = - \delta\ décl. = - \text{nut. } décl.$, $\delta EL = \text{nut. } obl. = 9'' \cos. \Omega$, et $\delta E = - \delta\ long. = - \text{nut. } long. = \frac{6'',7}{\sin. obl.} \times \sin. \Omega$. Substituant ces valeurs dans les deux équations précédentes, observant que $\delta E \cos. EL = 6'',7 \cot. 23^\circ 28' \sin. \Omega = 15'',4 \sin. \Omega$, et nous rappelant que $\cos. L = - \sin. asc.\ dr.$, nous aurons par la première des deux équations, nut. $asc.\ dr. = - \text{tang. } décl.\ (9'' \cos. \Omega \cos. asc.\ dr. + 6'',7 \sin. \Omega \sin. asc.\ dr.) - 15'',4 \sin. \Omega$. Mais (II. 18°, 17°), $9'' \cos. \Omega \cos. asc.\ dr. + 6'',7 \sin. \Omega \sin. asc.\ dr. = 4'',5 \cos. (\Omega + asc.\ dr.) + 4'',5 \cos. (\Omega \backsim asc.\ dr.) - 3'',35 \cos. (\Omega + asc.\ dr.) + 3'',35 \cos. (\Omega \backsim asc.\ dr.)$. Donc

$$\text{nut. } asc.\ dr. = - 15'',4 \sin. \Omega - \text{tang. } déclinaison \times (7'',85 \cos. \overline{asc.\ dr. \backsim \Omega} + 1'',15 \cos. \overline{asc.\ dr. + \Omega}).$$

1528. En traitant de même la seconde équation, elle donnera

$$\text{nut. } décl. = 7'',85 \sin. (asc.\ dr. - \Omega) + 1'',15 \sin. (asc.\ dr. + \Omega).$$

Lorsque la déclinaison sera australe, on fera négatif le second membre de cette formule; car alors $+ \delta SL = + \text{nut. } décl.$

Les tables très-commodes de Lambert, (*Ephem. Mediolan. an.* 1800, pag. 40), pour la nutation en ascension droite et en déclinaison, paraissent avoir été construites d'après les deux formules que nous venons de donner.

Ces mêmes formules et celle de la nutation en longitude servent à convertir en position apparente la position moyenne de l'astre.

1529. *Trouver l'effet de l'aberration de la lumière sur l'ascension droite et la déclinaison des étoiles fixes.*

Soit ✱ la longitude d'une étoile, ☉ la longitude du soleil. De la Lande (*Astr.* 2846, 2853) démontre avec autant de facilité que de clarté les deux équations suivantes :

$$\text{aber. } long. = - \frac{20'' \cos. (✱ - ☉)}{\cos. lat.},$$

$$\text{aber. } lat. = 20'' \sin. (✱ - ☉) \sin. lat.$$

La dernière de ces formules exige que dans tous les cas sin. *lat.* soit pris avec le signe positif.

1530. Connaissant par ces équations les changemens de la longitude et de la latitude d'une étoile, produits par l'aberration, nous trouverons facilement par la méthode (687) les changemens de l'ascension droite et de la déclinaison.

Soit P le pôle du monde, E celui de l'écliptique, S un astre vu en T par l'effet de l'aberration de la lumière. Les formules précédentes donnent la variation de l'angle E et celle du côté ES; on cherche la variation de l'angle P et celle du côté PS. Le triangle PES, en se changeant en PTE, conserve comme constant le seul côté PE. Donc si on suppose encore que le côté ES soit constant, on aura (1310, 1305), en faisant $A = E$, $B = P$, $C = S$, Fig. 9

$$\partial P : -\partial E :: \sin. ES \cos. S : \sin. PS.$$

$$\partial PS : \partial E :: \sin. ES \sin. S : 1.$$

En supposant constant, outre le côté PE, l'angle E, on a, (1213, 1233)

$$\partial P : \partial ES :: \sin. S : \sin. PS,$$

$$\partial PS : \partial ES :: \cos. S : 1.$$

Puis, en prenant les sommes des deux valeurs partielles de ∂P et de ∂PS,

$$\partial P = -\frac{\partial E \sin. ES \cos. S - \partial ES \sin. S}{\sin. PS},$$

$$\partial PS = \partial E \sin. ES \sin. S + \partial ES \cos. S.$$

1531. Mais $\partial P = \partial\, asc.\, dr. =$ aber. *asc. dr.*; $\partial PS = -$ aber. *décl.*, $\partial E = -$ aber. *long.* $= \frac{20'' \cos. (\ast - \odot)}{\cos.\, lat.}$, et $\partial ES = -$ aber. *lat.* $= - 20'' \sin. (\ast - \odot) \sin.\, lat.$ Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et appelant p l'angle de position, d la déclinaison et l la latitude de l'astre, on a, pour la solution du problème,

$$(M) \ldots \text{aber.}\, asc.\, dr. = \frac{-20'' \cos. (\ast - \odot) \cos. p - 20'' \sin. (\ast - \odot) \sin. p \sin. l}{\cos. d}$$

$$(N) \ldots \text{aber.}\, décl. = -20'' \cos. (\ast - \odot) \sin. p + 20'' \sin. (\ast - \odot) \cos. p \sin. l.$$

1532. Lorsque la déclinaison sera australe, on changera les signes des deux termes du second membre de l'équation (N); car alors $\partial PS = +$ aber. *décl.* Du reste on observera dans le calcul des deux formules (M), (N) les règles (73, 1451) des signes. Mais

Fig. 91. de plus on fera attention que sin. p est négatif (75) dans le second et dans le troisième quart de l'ascension droite, (1521).

1533. Les formules (M) (N) qui servent à convertir en position apparente la position moyenne d'une étoile, ne sont ni les plus commodes pour le calcul, ni les plus usitées. En effet, il est mieux, quand on recherche les corrections, de pouvoir les obtenir avec les seules données auxquelles elles doivent s'appliquer. Pour y parvenir, il est nécessaire d'introduire dans lesdites formules l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile, et d'en chasser la longitude, la latitude et l'angle de position, trois élémens qui d'ailleurs ne se trouvent pas toujours dans les catalogues d'étoiles, où les deux premiers au contraire se trouvent toujours. Je vais atteindre ce but par une marche très-courte, qui dispense de passer laborieusement par les formules exprimant les plus grandes aberrations et les longitudes du Soleil au temps de ces plus grandes aberrations.

1534. Dans la formule (M) je prends le binôme multiplicateur de $-\frac{20''}{\text{cos. decl.}}$, et j'ai cos. (✱ — ⊙) cos. p + sin. (✱ — ⊙) sin. p sin. l, ou (II. 4°, 2°), cos. ⊙ (cos. ✱ cos. p + sin. ✱ sin. p sin. l) + sin. ⊙ (sin. ✱ cos. p — cos. ✱ sin. p sin. l). Or (VII. 29°), cos. AB sin. B $= \frac{\text{cos. C} + \text{cos. A cos. B}}{\text{sin. A}}$. Je substitue la valeur (VII. 10°) de cos. B, puis celle (I. 18°) de cos.^{2}A ; j'exécute ensuite la division par sin. A, et je trouve cos. AB sin. B = sin. A cos. C + cos. A sin. C cos. AC, ou (1530) avec les lettres E, P, S, cos. PE sin. P = sin. E cos. S + cos. E sin. S cos. ES, ou bien, avec les dénominations (1448), cos. *obliq.* × cos. *asc. dr.* = cos. ✱ cos. p + sin. ✱ sin. p sin. l; ce qui est précisément le facteur ci-dessus de cos. ⊙. Celui de sin. ⊙ équivaut à sin. *asc. dr.*, comme on le voit en introduisant dans la formule (VII. 10°), d'abord les lettres E, P, S, ensuite les mêmes dénominations que ci-dessus. La formule (M) devient donc aber. *asc. dr.* $= -\frac{1}{\text{cos. decl.}}$ × (20″ cos. *obliq.* cos. *asc. dr.* cos. ⊙ + 20″ sin. *asc. dr.* sin. ⊙). Mais 20″ cos. *obliq.* = 18″,346. Donc, en procédant, comme j'ai fait (1527) pour arriver à la formule de la nutation, et appelant A l'ascension droite de l'étoile,

j'aurai

$$\text{aber. } asc.\ dr. = -\frac{19'',17 \cos.(A \backsim \odot) - 0'',83 \cos.(A + \odot)}{\cos.\ decl.}.$$

1535. Opérons de la même manière sur la formule (N). Le facteur de $-20''$ est (II. 4e, 2e), cos. ⊙ (cos. ☉ sin. p — sin. ☉ cos. p sin. l) + sin. ⊙ (sin. ☉ sin. p + cos. ☉ cos. p sin. l).

Or le facteur de cos. ⊙ est sin. E sin. S — cos. E cos. S cos. ES; ce qui équivaut (1139) à sin. PS sin. PE + cos. PS cos. PE cos. P, ou bien à cos. *décl.* sin. *obliq.* — sin. *décl.* cos. *obliq.* sin. *asc. dr.*

Quant au facteur de sin. ⊙ ; ayant (VII. 25e), cos. BC sin. B $= \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. C}$, j'introduis la valeur (VII. 10e) de cos. B, puis celle (I. 18e) de $\cos.^2 C$; j'exécute ensuite la division par sin. C. Le résultat est cos. BC sin. B = cos. A sin. C + sin. A cos. C cos. AC. Ce dernier membre est équivalent au facteur dont il s'agit, au lieu duquel on peut par conséquent écrire le premier membre, c'est-à-dire cos. PS sin. P, ou sin. *décl.* cos. *asc. dr.* La formule (N) devient donc aber. *décl.* = — 20″ sin. *obliq.* cos. ⊙ cos. *décl* + sin. *décl.* (20″ cos. *obliq.* sin. A cos. ⊙ — 20″ cos. A sin. ⊙) = — 7″, 96 cos. ⊙ cos. *décl.* + sin. *décl.* (18″, 346 sin. A cos. ⊙ — 20″ cos. A sin. ⊙). Cette valeur, au moyen des formules (II. 18e, 15e, 16e), se réduit à ce qui suit, en appelant D la déclinaison de l'étoile;

$$\text{aber. } décl. = \sin. D(19'',17 \sin.\overline{A - \odot} - 0'',83 \sin.\overline{A + \odot}) - 3'',98 \times (\cos.\overline{\odot + D} + \cos.\overline{\odot \backsim D}).$$

1536. Lorsque la déclinaison est australe, il faut rendre positif le facteur 3″, 98 par le motif indiqué (1532), motif qui n'influe pas sur le facteur binôme de sin. D, pourvu qu'on fasse sin. D toujours positif.

C'est sur cette formule et sur la précédente que sont construites les Tables de Delambre (*Conn. des temps pour* 1788, *pag.* 225). S'il s'agissait, non de construire des tables, mais seulement de calculer l'aberration pour un temps donné, alors, au lieu du dernier terme — 3″, 98, etc. de la formule ci-dessus, il serait plus commode d'employer — 7″, 96 cos. ⊙ cos. D.

L'habile Astronome que nous venons de citer, a aussi donné,

dans le tom. VIII des Éphémérides de Paris, de nouvelles Tables très-exactes de l'*aberration des planètes en longitude*.

1537. Nous avons déterminé les effets de la nutation et de l'aberration sur l'ascension droite et sur la déclinaison : la même marche nous conduirait à la détermination des changemens de l'angle de position, produits par les mêmes causes. Nous avons omis cette recherche, parce qu'il nous a paru qu'on n'avait jamais besoin d'employer l'angle de position apparent, c'est-à-dire corrigé des petites variations périodiques dépendantes de la nutation et de l'aberration.

1538. *Déterminer les dimensions de la Terre en la supposant de figure elliptique.*

Fig. 92. Soit NS $= 2b$ l'axe terrestre, AD $= 2a$ le diamètre de l'équateur, ANDS le méridien elliptique d'un lieu quelconque B. La tangente BT est l'horizon sensible de ce lieu, BC le rayon qui se rapporte à ce même lieu, ou la distance du centre; VBR perpendiculaire à BT, est la ligne verticale; CBL $= \nu$ l'angle de la verticale avec le rayon BC, BQ = CE le rayon du parallèle, BCA l'angle au centre, BLA = L la latitude; et décrivant le demi-cercle AFD, nommons x l'angle FCE, comme dans la théorie des planètes (1480).

1539. Dans les sections coniques on démontre que CE : LE :: $a^2 : b^2$. Mais les triangles rectangles BEC, BEL, qui ont le côté commun BE, donnent (1053, 1021), CE : LE :: tang. BLE : tang. BCE. Donc

$$\text{tang. } \textit{angle au centre} = \frac{b^2}{a^2} \times \text{tang. L.}$$

1540. Nous avons aussi, par les sections coniques, BE : FE :: $b : a$. Mais en vertu du côté commun CE, nous avons (1052, 1021), BE : FE :: tang. BCE : tang. FCE. Donc $b : a$ :: tang. *angle au centre* : tang. x. Introduisons dans le troisième terme la valeur (1539), nous aurons

$$\text{tang. } x = \frac{b}{a} \times \text{tang. L.}$$

1541. La connaissance de l'angle x met en état de résoudre promptement les équations suivantes, dont la démonstration s'offre

d'elle-même :

$$Rayon\ du\ parallèle = a \cos. x = \text{CE}.$$

$$Rayon\ de\ la\ Terre = \frac{a \cos. x}{\cos.\ angle\ au\ centre} = \text{BC}.$$

$$\text{Tangente} = \frac{a \cos. x}{\sin. \text{L}} = \text{BT}.$$

1542. Puisque (983) les arcs d'un degré, dans un grand cercle et dans un parallèle, sont proportionnels aux rayons respectifs, c'est-à-dire (630), puisque $\frac{1}{\text{R}^2}$: 1 :: le degré de longitude en B : BQ, il en résulte

$$degré\ de\ longitude = \frac{a \cos. x}{\text{R}^2}.$$

1543. Les degrés de latitude sont encore différens entre eux dans la Terre elliptique. Car dans l'ellipse la courbure varie d'un lieu à un autre, à cause des différences des rayons osculateurs, c'est-à-dire des rayons des cercles qui se confondent en divers points avec la courbe. Je représente ces rayons par la variable z, et j'ai par les sections coniques $z = (\text{BL})^3 \times \frac{a^2}{b^4}$. Il s'agit de faire entrer la latitude dans l'expression de BL. Je prends la proportion BL : LE :: 1 : cos. L ; et parce que (1539), $\text{LE} = \text{CE} \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 \cos. x}{a}$, (1541), j'ai $\text{BL} = \frac{b^2 \cos. x}{a \cos. \text{L}}$. Mais $\cos. x = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 x)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^4}{a^4} \text{tang.}^2 \text{L}\right)}}$, (1540). Donc $\text{BL} = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 \cos.^2 \text{L} + b^2 \sin.^2 \text{L})}}$, (26). Par conséquent $z = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos.^2 \text{L} + b^2 \sin.^2 \text{L})^{\frac{3}{2}}}$. Nommons G la longueur du degré dont le point-milieu est à la latitude L; nous avons dès-lors, (630), 1 : $\frac{1}{\text{R}^2}$ :: z : G. Donc l'expression générale des degrés de latitude est

$$\text{G} = \frac{a^2 b^2}{\text{R}^2 (a^2 \cos.^2 \text{L} + b^2 \sin.^2 \text{L})^{\frac{3}{2}}}.$$

1544. Si l'on appelle g la longueur du degré pour une autre latitude l, on aura donc

$$\text{G} : g :: (a^2 \cos.^2 l + b^2 \sin.^2 l)^{\frac{3}{2}} : (a^2 \cos.^2 \text{L} + b^2 \sin.^2 \text{L})^{\frac{3}{2}}.$$

1545. D'où il suit qu'ayant mesuré deux degrés, on peut, de cette proportion et de l'équation précédente, déduire la grandeur des axes. Mais il faut observer (670) que chaque erreur sur le degré devient 57 fois plus considérable dans les demi-axes. Je vais détailler l'opération, attendu que le seul exemple que j'en aie vu jusqu'à présent (Lorgna, *Principes de Géographie*, §. XLIII) est extrêmement embrouillé.

J'élève à la puisance $\frac{2}{3}$ chacun des termes de la proportion; et faisant $g^{\frac{2}{3}} = \mathrm{K}$, $\mathrm{G}^{\frac{2}{3}} = h$, j'ai ....

$$h(a^2 \cos.^2 \mathrm{L} + b^2 \sin.^2 \mathrm{L}) = \mathrm{K}(a^2 \cos.^2 l + b^2 \sin.^2 l);$$

d'où $a^2(h \cos.^2 \mathrm{L} - \mathrm{K} \cos.^2 l) = b^2(\mathrm{K} \sin.^2 l - h \sin.^2 \mathrm{L})$.

Je fais, pour abréger,

$$\mathrm{K} \sin.^2 l - h \sin.^2 \mathrm{L} = p,$$

et j'ai (I. 18e), $a^2(h - \mathrm{K} + p) = b^2 p$; par conséquent $a^2 b^2 (h - \mathrm{K} + p) = b^4 p$. De cette équation, je tire la valeur de $a^2 b^2$, que je substitue dans la dernière équation (1543); et en introduisant dans le dénominateur de celle-ci la valeur de a^2 tirée de l'équation $a^2(h - \mathrm{K} + p) = b^2 p$, qu'on vient de lire ci-dessus, j'obtiens $\mathrm{G} = \dfrac{b^4 p}{\mathrm{R}^2(h - \mathrm{K} + p)\left(\dfrac{b^2 p \cos.^2 \mathrm{L}}{h - \mathrm{K} + p} + b^2 \sin.^2 \mathrm{L}\right)^{\frac{3}{2}}}$;

ou $$\mathrm{G} = \frac{bp\sqrt{(h - \mathrm{K} + p)}}{\mathrm{R}^2(p \cos.^2 \mathrm{L} + \overline{h - \mathrm{K} + p} \sin.^2 \mathrm{L})^{\frac{3}{2}}}.$$

1546. De cette équation, en y substituant $1 - \sin.^2 \mathrm{L}$ au lieu de $\cos.^2 \mathrm{L}$, je déduis

$$b = \frac{\mathrm{GR}^2(p + \overline{h - \mathrm{K}} \sin.^2 \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}}{p\sqrt{(h - \mathrm{K} + p)}}.$$

1547. Si je substitue le quarré du second membre dans l'équation $a^2(h - \mathrm{K} + p) = b^2 p$, je parviendrai à l'équation

$$a = \frac{\mathrm{GR}^2(p + \overline{h - \mathrm{K}} \sin.^2 \mathrm{L})^{\frac{3}{2}}}{(h - \mathrm{K} + p)\sqrt{p}}.$$

1548. On a donc, pour le rapport entre les deux axes, $a : b :: \sqrt{p} : \sqrt{(h - \mathrm{K} + p)}$.

1549. Le rapport entre leurs quarrés étant par conséquent $a^2 : b^2$,

$:: p : h - \mathrm{K} + p$, il s'ensuit que $a^2 : a^2 - b^2 :: p : \mathrm{K} - h$. Nous aurons donc l'excentricité du Globe terrestre (1480) par cette équation,

$$e = a\sqrt{\frac{\mathrm{K} - h}{p}}.$$

1550. Maintenant nommons c l'aplatissement de la Terre, ou la différence des demi-axes; on aura $b = a - c$, $b^2 = a^2 - 2ac + c^2$, et $\frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = ac - \frac{1}{2}c^2 = c(a - \frac{1}{2}c)$. Donc

$$c(a - \tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{2}a^2 \times \frac{\mathrm{K} - h}{p}.$$

1551. La petitesse de la quantité c, et le peu d'accord entre les mesures des degrés, nous permettent de regarder le facteur $(a - \frac{1}{2}c)$ comme égal à a. Faisons $a = 1$, et nous aurons pour valeur très-approchée,

$$c = \frac{\mathrm{K} - h}{2p} = \frac{g^{\frac{2}{3}} - \mathrm{G}^{\frac{2}{3}}}{2g^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sin.}^2 l - 2\mathrm{G}^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sin.}^2 \mathrm{L}}.$$

1552. Si g est un degré divisé dans son milieu par l'équateur, ensorte qu'on ait $l = 0$, alors sin. $l = 0$, et par conséquent, en divisant le numérateur et le dénominateur par $-\mathrm{G}^{\frac{2}{3}}$,

$$c = \frac{1 - \left(\frac{g}{\mathrm{G}}\right)^{\frac{2}{3}}}{2\,\mathrm{sin.}^2\mathrm{L}}.$$

1553. Au lieu de cette équation, on a adopté la suivante qui est plus commode, mais un peu moins exacte, comme nous le verrons bientôt :

$$c = \frac{\mathrm{G} - g}{3g\,\mathrm{sin.}^2\mathrm{L}};$$

d'où l'on a conclu que les accroissemens des degrés, représentés par $\mathrm{G} - g$, sont à très-peu-près proportionnels aux quarrés des sinus des latitudes.

1554. Lorsqu'après avoir comparé deux à deux plusieurs degrés mesurés, on a déterminé la valeur de c au moyen des formules qui précèdent, ou, si l'on veut, de la formule plus exacte (1550), il en coûte peu pour former avec exactitude une table des degrés

de latitude exprimés, par exemple, en toises. Soit, pour abréger ; $c(1-\frac{1}{2}c)=m$; l'équation (1552) donne, en écrivant m au lieu de c, $G=g(1-2m\,\text{sin.}^2L)^{-\frac{3}{2}}=g(1+3m\,\text{sin.}^2L+\frac{15}{2}m^2\,\text{sin.}^4L+\text{etc.})$. Les termes ultérieurs de cette série peuvent se négliger sans qu'il en résulte une erreur d'un demi-pied, et l'on aura

$$G-g=3\,mg\,\text{sin}^2L+\tfrac{15}{2}m^2g\,\text{sin.}^4L.$$

1555. Si dans le second membre on néglige le second terme, et qu'on écrive c au lieu de m, on retrouve l'équation (1553), dont la plus grande erreur, qui a lieu lorsque $L=90°$, n'arrive pas à 4 toises. En effet soit $g=56756$ toises, valeur que j'ai déduite des dix mesures de divers degrés les plus accréditées (*Notizie Astronomiche*, 80 à 86); et soit $c=\frac{1}{300}$, valeur la plus communément adoptée. En calculant l'équation (1554), on a d'abord $m=c(1-\frac{1}{2}c)=\frac{599}{180000}$; d'où il suit que la quantité constante $3mg=566{,}61$, et que l'autre quantité constante $\frac{15}{2}m^2g=4{,}71$. Donc le degré de latitude sous le pôle est plus long de $571\frac{1}{3}$ toises que le degré sons l'équateur. Or la formule (1553) donne dans ce cas $G-g=3cg=567\frac{1}{2}$ toises.

1556. Supposons toujours $g=56756$; si l'on emploie aussi le troisième terme $\frac{35}{2}m^3g\,\text{sin.}^6L$ de la série (1554), on aura $G=57327{,}35$; et dans le cas où on a $\text{sin.}\,l=0$ et $\text{sin.}\,L=1$, il est facile de calculer la longueur des axes. Les formules (1547, 1546) se réduisent alors aux expressions très-simples $a=GR°\sqrt[3]{\frac{g}{G}}$, $b=gR°\sqrt[3]{\frac{G}{g}}$. En effectuant le calcul, on trouve $\log.\,a=6{,}5150345$; $\log.\,b=6{,}5135845$; donc $a=3273667$, $b=3262755$, leur différence $c=10912$ toises $=\frac{a}{300}$, telle précisément que nous l'avons employée.

1557. Une chose qu'il importe de connaître est l'*angle* v *de la verticale* (1538). Or $CBL=BLE-BCE=$ *latitude — l'angle au centre*. Qu'on ait donc calculé l'angle au centre par la formule (1539); et la différence entre cet angle et la latitude donnera immédiatement l'angle de la verticale. Mais pour l'obtenir plus

Fig. 92.

directement, j'observe que la même formule me donne, en faisant $a = 1$, $1 : b^2 :: \text{tang. L} : \text{tang.}(L - \nu)$, et que par conséquent $1 : 1 - b^2 :: \text{tang. L} : \text{tang. L} - \text{tang.}(L - \nu) :: \text{tang. L} : \frac{\sin. \nu}{\cos. L \cos. (L - \nu)}$, (II. 25°). Mais $1 - b^2 = e^2$. Donc $\sin \nu = e^2 \sin. L \cos. (L - \nu)$, ou *angle de la verticale* $= R'' \times$ *excentr.*² sin. *lat.* cos. (*lat.* — *angle de la verticale*). C'est avec cette formule, plus exacte que la formule ordinaire $\nu = cR'' \sin. 2L$, que j'ai calculé les angles de la verticale de la table (CC) mise à la fin de cet Ouvrage.

1558. La valeur du rayon BC de la Terre peut s'obtenir avec un plus grand nombre de décimales exactes, que ce qu'en peuvent donner, par le seul moyen de la seconde formule (1541), les tables ordinaires de logarithmes. Si l'on fait $a = 1$, cette formule donne $BC = \frac{\cos. x}{\cos. (L - \nu)} = \sqrt{\frac{1 + \text{tang.}^2 (L - \nu)}{1 + \text{tang.}^2 x}}$, (I. 19°); ou, en substituant les valeurs (1539, 1540) de tang. $(L - \nu)$ et de tang. x, $BC = \sqrt{\frac{1 + b^4 \text{tang.}^2 L}{1 + b^2 \text{tang.}^2 L}}$, (équation qui fait reconnaître l'inexactitude de l'équation (1) de Du Séjour, (*Mém. de l'Acad. des Sc.* 1780, pag. 138). Mais $b^2 = 1 - e^2$, et $b^4 = 1 - 2e^2 + e^4$. Substituons ces valeurs, multiplions la fraction par $\cos.^2 L$, et nous trouverons

$$BC = \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin.^2 L - e^2 \sin.^2 L (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin.^2 L}} = \sqrt{\left(1 - \frac{e^2 b^2 \sin.^2 L}{1 - e^2 \sin.^2 L}\right)}.$$

En réduisant ce binôme en série, négligeant les puissances de l'excentricité au-delà de la quatrième, et faisant les divisions, nous aurons

$$BC = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 b^2 \sin.^2 L - \tfrac{5}{8} e^4 \sin.^4 L.$$

1559. Le calcul des deux derniers termes donnera promptement la différence du rayon de l'équateur à celui d'une latitude quelconque. Si on veut cette différence en toises, il suffit de la multiplier par le rayon de l'équateur exprimé en toises. On la trouvera de 5433 $\frac{1}{3}$ toises, quand $L = 45°$. D'où il suit que le rayon moyen de la Terre est, en toises, 3268233 $\frac{1}{2}$. Si l'on veut avoir la différence des logarithmes, on multipliera la somme des deux termes

Fig. 92. ci-dessus par $\frac{M}{BC + \frac{1}{2} \partial BC}$, comme le prescrit le premier terme de la série (375) ; c'est cette marche que j'ai adoptée, comme la plus prompte et la plus sûre, pour calculer les logarithmes de la table (CC).

1560. En négligeant, comme très-petit, le dernier terme du second membre de l'équation (1558), on voit que les diminutions des rayons de la Terre sont à-peu-près proportionnelles aux quarrés des sinus des latitudes, et par conséquent aux accroissemens en longueur des degrés de latitude (1553).

1561. Puisque nous avons une méthode de calculer le rayon de la Terre et le degré de latitude au moyen du sinus de cette latitude (1554, 1558), il est à propos d'introduire aussi ce sinus dans l'expression (1542) du degré de longitude, que je nomme γ. Or (I. 19e), $\frac{a \cos. x}{R^\circ} = \frac{a}{R^\circ \sqrt{(1 + \text{tang}^2 x)}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{a}{R^\circ \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \text{tang.}^2 L\right)}}$, (1540). De plus, en faisant $a = 1$, $\sqrt{(1 + b^2 \text{tang}^2 L)} = \sqrt{(1 + \text{tang.}^2 L - e^2 \text{tang.}^2 L)} = \ldots\ldots$ $\sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 L} - e^2 \text{tang.}^2 L\right)} = \frac{\sqrt{(1 - e^2 \sin.^2 L)}}{\cos. L}$. Donc $\gamma = \frac{\cos. L}{R^\circ}$ $(1 - e^2 \sin.^2 L)^{-\frac{1}{2}}$. Donc aussi

$$\gamma = \frac{\cos. L}{R^\circ} (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin.^2 L + \tfrac{3}{8} e^4 \sin.^4 L + \text{etc.}).$$

Pour avoir le degré en toises, mètres ou autres mesures, il faut multiplier le second membre par le plus grand demi-axe exprimé en la même mesure.

1562. Au moyen de cette formule et de celle que l'on a vue (1554), j'ai calculé, avec les données (1556), la Table (DD) qu'on trouvera à la fin de ce volume.

1563. La détermination des dimensions de la Terre elliptique nous conduit à l'exposition de la solution du problème suivant : *Étant données la perpendiculaire à la méridienne, et la distance à la perpendiculaire* (800), *en conclure les différences de longitude et de latitude.*

Fig. 93. Soit PCE une quart d'ellipse, CP le petit demi-axe, CE le

grand demi-axe, PTA le quart de cercle inscrit du rayon CP, DL une ordonnée à l'ellipse, à laquelle ordonnée correspond l'ordonnée au cercle TL; soit CL l'abscisse ou la coordonnée commune aux deux courbes; enfin soient $PD = k$, $PT = z$, $DL = y$, $TL = \varphi$, $CL = x$, $CE = a$, $CP = 1$; et observons que de la variation $\delta x = HO = GF$ naisseut $TO = -\delta z$, $TH = -\delta\varphi$, $DF = -\delta k$, $DG = -\delta y$.

1564. Nous avons (531), $(\delta k)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 = (\delta z)^2 - (\delta\varphi)^2 + (\delta y)^2$. Mais on démontre dans les sections coniques que DL : TL :: CE : CP. Donc $y = a\varphi$, et $\delta y = a\delta\varphi$. Par conséquent $(\delta k)^2 = (\delta z)^2 + (\delta\varphi)^2 (a^2 - 1) = (\delta z)^2 + e^2 (\delta\varphi)^2$, (1480); ou $\delta k = \delta z \sqrt{\left(1 + \frac{e^2 (\delta\varphi)^2}{(\delta z)^2}\right)}$. On a aussi TO : TH :: 1 : cos. T; et T = PT, par la Géométrie. Donc $\delta z : \delta\varphi :: 1 : \cos. z$. Et parconséquent

$$\delta k = \delta z \sqrt{(1 + e^2 \cos.^2 z)}.$$

1565. Je remarque, en passant, qu'en élevant le dernier binôme à la puissance $\frac{1}{2}$, puis substituant aux puissances de cos. z leurs valeurs (510), et intégrant, on obtient l'expression d'un arc elliptique, comme PD, au moyen des sinus des multiples de l'arc circulaire correspondant PT. Ce qui du reste est inutile pour ce qui nous occupe en ce moment.

1566. Soit maintenant MN la perpendiculaire au méridien PE, Fig. 94.
laquelle se termine en N à un autre méridien PQ; ensorte que NS est, en ce point, l'ordonnée à ce dernier méridien. Soit de plus NO un prolongement infiniment petit de la perpendiculaire, et PU un méridien infiniment près du méridien PQ; et soit décrit du rayon SN le petit arc ND, d'où résulte PD = PN. Faisons ensuite $PN = k$, $NS = y$, $MR = h$, $MN = p$, $MPN = u$; nous aurons $DO = \delta k$, $NO = \delta p$, $NPD = \delta u$. Imaginons une droite DS, égale par construction à NS, et nous aurons le petit angle NSD = NPD, ce dernier angle étant égal à l'angle en P compris entre les tangentes des arcs elliptiques PN, PD, qui en ce point sont perpendiculaires au demi-axe CP, et par conséquent respectivement parallèles aux ordonnées NS, DS. Or

Fig. 94 le petit arc ND peut être pris pour le sinus; On a donc (530),

$$ND = y\partial u.$$

1567. Rappelons à présent que Clairaut et Du Séjour ont démontré (*Mém. de l'Académie des Sciences*, Paris, 1733, 1778), que la perpendiculaire à la méridienne est la ligne la plus courte qu'on puisse mener entre ses extrémités sur la surface du sphéroïde terrestre; et ensuite, que *les sinus des angles formés par la perpendiculaire avec les divers méridiens sont en raison inverse des ordonnées aux points de concours.*

1568. On a donc sin. PMN : sin. PNM :: NS : MR. Et comme PMN = 90°, il en résulte sin. N $= \frac{h}{y}$. Mais $\frac{ND}{NO} =$ sin. O $=$ sin. (N $+ \partial$N) $=$ sin. N, (193). Donc $\frac{h}{y} = \frac{y\partial u}{\partial p}$, ou

$$h\partial p = y^2\partial u.$$

1569. On a encore NO : DO :: 1 : cos O. Par conséquent

$$\partial k = \cos. N\partial p.$$

Fig. 93. 1570. Maintenant du point m déterminé par l'ordonnée MR sur la surface de la sphère inscrite, supposons élevé l'arc mn, de sorte qu'il forme angle droit avec l'arc de 90° PA, et qu'il concoure en n avec la projection du parallèle qui passe par N. J'appelle projection d'un parallèle la circonférence décrite sur la surface de la sphère par la révolution du rayon du parallèle (de NS dans le cas dont nous nous occupons), autour de l'axe CP. Le point n n'est pas la projection du point N, puisque nous trouverons par la suite (1578), mPn > MPN; mais du passage par n de la projection du parallèle qui passe par N, nous devons conclure qu'en menant par n le quart de cercle PB, Pn sera égal à la projection de PN, c'est-à-dire à l'arc formé sur la surface sphérique par les ordonnées NS conduites de chacun des points de l'arc PN; sens dans lequel Pm est la projection de PM. Nous avons supposé PN $= k$, nous ferons P$n = z$, et par la propriété des sections coniques (1564), nous aurons NS $= a$ sin. Pn, ou

$$y = a \text{ sin. } z.$$

1571. Dans le triangle sphérique Pmn rectangle en m, on a

(VI. 13°), $\cos. Pn = \cos. Pm \cos. mn$. Faisons $mn = \pi$, $Pm = \beta$, nous aurons

$$\cos. z = \cos. \beta \cos. \pi.$$

1572. Le point M, où tombe la perpendiculaire, est donné, et par conséquent le point m; β est donc constant; donc, en différentiant, on aura $\sin. z \partial z = \cos. \beta \sin. \pi \partial \pi$; ou, (1361), $\partial z = \text{tang}. \pi \cot. z \partial \pi = \cos. n \partial \pi$, (VI. 5°). Mais $n = N$, puisque (1568); $\sin. N = \frac{MR}{NS} =$ (1570) $\frac{a \sin. \beta}{a \sin. z} = \sin. n$, (VI. 6°). Donc $\partial z = \cos. N \partial \pi = \frac{\partial k \partial \pi}{\partial p}$, (1569); et par conséquent $\frac{\partial p}{\partial \pi} = \frac{\partial k}{\partial z} = \sqrt{(1 + e^2 \cos^2 z)}$, (1564). Donc aussi (1571), $\partial p = \partial \pi \sqrt{(1 + e^2 \cos.^2 \beta \cos.^2 \pi)}$. Et comme π est toujours une petite quantité de l'ordre de e, dont la quatrième puissance, telle que peut être considéré $e^2 \pi^2$, (285), est insensible dans la recherche dont il s'agit, je fais $\cos. \pi = 1$, et j'ai

$$\partial p = \partial \pi \sqrt{(1 + e^2 \cos.^2 \beta)}.$$

1573. D'où, en intégrant,

$$p = \pi \sqrt{(1 + e^2 \cos.^2 \beta)}.$$

1574. Or nous avons, par les sections coniques,

$$\text{tang}. \beta = a \cot. \textit{latit.} \text{ en M}.$$

1575. Donc, connaissant la latitude du point M, on obtient par cette équation la valeur de β. Avec cette valeur et la perpendiculaire donnée p, on trouve ensuite π par la formule précédente. Puis, ayant β et π, on détermine z par l'équation (1571). Enfin ayant, par une expression semblable à l'équation (1574),

$$\text{tang}. \textit{latit.} \text{ en N} = a \cot. z,$$

on arrive, par cette dernière équation, à la latitude cherchée.

1576. Pour trouver la longitude, ou l'angle $MPN = u$, je fais $mPn = \nu$; et j'ai d'abord (VI. 14°),

$$\cot. \nu = \cot. \pi \sin. \beta.$$

1577. En différentiant, il résulte $\frac{\partial \nu}{\sin.^2 \nu} = \frac{\sin. \beta \partial \pi}{\sin.^2 \pi}$. Mais (VI, 1°),

$\sin.^2\pi = \sin.^2 z \sin.^2 v$. Donc

$$\sin.^2 z\, \partial v = \sin.\, \beta\, \partial \pi.$$

1578. Je substitue la valeur (1572) de $\partial \pi$, et je trouve $\sin.^2 z \sqrt{(1 + e^2 \cos.^2 z)}\, \partial v = \sin.\, \beta\, \partial p$. Et parce que (1570), $y = a \sin. z$, et que par la même raison, $h = a \sin. \beta$, l'équation (1568) devient $\sin. \beta\, \partial p = a \sin.^2 z\, \partial u$. De cette équation et de la première du présent article, je déduis $\partial u = \frac{\sqrt{(1 + e^2 \cos^2 z)}\, \partial v}{a} = \partial v \sqrt{\frac{1 + e^2 - e^2 \sin.^2 z}{a^2}} = \partial v \sqrt{\left(1 - \frac{e^2 \sin.^2 z}{a^2}\right)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\partial v \left(1 - \frac{e^2 \sin.^2 z}{2a^2} - \text{etc.}\right)$, négligeant toujours la 4e puissance de e. J'introduis la valeur (1577) de $\sin.^2 z\, \partial v$, et j'obtiens $\partial u = \partial v - \frac{e^2 \sin. \beta\, \partial \pi}{2a^2}$. D'où résulte, en intégrant,

$$u = v - \frac{e^2 \pi \sin. \beta}{2a^2}.$$

Le fond de la solution que je viens de terminer est de Du Séjour, (*loc. cit.*); mais j'ai suivi une route bien plus abrégée. L'artifice consiste à réduire à une surface sphérique les points de la surface du sphéroïde, pour y appliquer les formules trigonométriques.

1579. En se servant de cette méthode, il est nécessaire d'évaluer π en secondes par l'équation (1575). Nous ferons voir comment on y parvient, dans l'exemple suivant qui servira de guide pour le calcul entier.

Fig. 93. Soit le point N l'Observatoire de Marseille, le point D celui de Paris. Soient encore

$$NM = p = 126210 \text{ toises},$$
$$DM = \quad 314131.$$

Et la latitude en D = 48° 50′ 14″.

Avec ces données, il s'agit de trouver la latitude et la longitude du point N. C'est l'exemple que nous avons résolu (1200), dans l'hypothèse de la Terre sphérique.

1580. Ce qu'on doit faire d'abord, c'est de déterminer la latitude du point M. La table (DD) y conduit promptement. Je prends le tiers, 19027, correspondant à 20′, du degré à la latitude de la 49e,

qui est dans la table le point le plus proche de la latitude donnée D; et je dis 314131 — 19027 = 295104 = la distance à la perpendiculaire, du point de latitude 48° 30′ 14″. La raison de procéder ainsi, c'est que les 57080 toises données par la table s'étendent de 48° 30′ à 49° 30′, chaque calcul étant fait pour le point-milieu, (1543). D'après le même principe, je retranche ensuite, de la distance 295104, la valeur d'autant de degrés consécutifs de latitude que cette distance en contient, c'est-à-dire des 48°, 47°, 46°, 45°, 44°; et il reste 9854 toises pour la distance à la perpendiculaire, du point de latitude 43° 30′ 14″. Le degré, ou 3600″, à la latitude de 43°, est de 57021 toises; d'où il suit, par la règle de *trois*, qu'à ce point, 9854 toises répondent à 10′ 22″. Donc la distance entière, 314131, à la perpendiculaire vaut 5° 30′ 22″; et par conséquent 48° 50′ 14″ — 5° 30′ 22″ = 43° 19′ 52″ = la latitude en M.

Nous aurons donc, (1574), log. cot. 43° 19′ 52″ = 0,0253143
et, supposant $b = 1$, et log. a = log. 300 — log. 299 = 0,0014501

log. tang. β = log. tang. 46° 45′ 51″,8 = 0,0267644

1581. Voyons maintenant à exprimer p en secondes. Nommant s le nombre de toises d'un degré de la sphère inscrite, je fais d'abord la proportion, le rayon 1 de la table (AA) est à l'arc d'un degré de la même table, comme le rayon b, en toises, de la sphère inscrite est à l'arc d'un degré, en toises, de la même sphère; et j'ai (630), $s = \frac{b}{R^{\circ}}$. Or

(1556), log. b = 6, 5135845
(631), compl. log. R° = 8, 2418774

d'où log. s = 4, 7554619;

ce qui doit guider pour tout autre exemple. Puis je dis $s : p :: 3600'' : p''$. Et par conséquent

compl. log. s = 5, 2445381
log. p = log. 126210 = 5, 1010938
log. 3600 = 3, 5563025

log. p'' = 3, 9019344

1582. **Maintenant il faut déduire π'' de la formule (1573).**

Nous avons (1480), $e^2 = a^2 - 1 = \frac{300^2}{299^2} - 1 = \frac{599}{299^2}$. Donc

log. 599 = 2,7774268

moitié ou log. $\sqrt{599}$ = 1,3887134

compl. log. 299 = 7,5243288

log. e, qui s'emploie pour tout autre exemple, = 8,9130422

(1580), log. cos. β = 9,8356906

(438), log. tang. A = 8,7487328

log. cos. A = 9,9993184

log. p'' = 3,9019344

log. π'' = log. 2° 12′ 46″, 2 = 3,9012528

1583. **Enfin, (1576, 1571);**

log. tang. β (1580) = 0,0267644

log. cos. β (1582) = 9,8356906.................. 9,8356906

log. sin. β = 9,8624550

log. cot. π = 1,4129579..... log. cos. π = 9,9996760

log. cot. ν = 1,2754129..... log. cos. z = 9,8353666

D'où ν = 3° 2′ 9″, 4; et log. cot. z = 9,9726254

log. a, (1580), = 0,0014501

log. tang. *latitude* en N = 9,9740755

Il en résulte, pour la latitude de l'Observatoire de Marseille, 43° 17′ 27″; la méthode (1200) la donne de 43° 17′ 23″ ½; mais les observations astronomiques la portent à 43° 17′ 43″, (*Conn. des Temps*, 1789 *et suiv.*).

1584. Actuellement, (1578), $\frac{e^2}{a^2} = \frac{599}{299^2} : \frac{300^2}{299^2} = \frac{599}{300^2}$; ou $\frac{e^2}{2a^2} = \frac{599}{180000}$, et par conséquent

$$\begin{array}{rl} \log. 599, (1582), = & 2,77743 \\ \text{compl. log. } 180000 = & 4,74473 \\ \log. \pi'', (1582), = & 3,90125 \\ \log. \sin. \beta, (1583), = & 9,86245 \\ \hline \log. 19'',3 = & 1,28586 \end{array}$$

D'où $u = v - \frac{e^2 \pi \sin. \beta}{2 a^2} = 3^\circ\ 2'\ 9'',4 - 19'',3 = 3^\circ\ 1'\ 50'' =$ la différence de longitude entre Paris et Marseille. Mais les observations astronomiques donnent 3° 3′ 30″, (*Conn. des Temps*, 1789 *et suiv.*); ou 3° 3′ 15″, (*Società Italiana*, Tom. V, pag. 83).

1585. En ce point, les calculs dans l'hypothèse de la Terre sphérique s'approchent véritablement davantage des observations, puisqu'ils donnent 3° 2′ 25″, (1200). Je n'ai pas cru pour cela devoir omettre cet exemple. Et comme il ne me paraît pas qu'on puisse taxer d'erreur la solution, on doit attribuer les incertitudes soit aux élémens que nous avons adoptés (1555), soit plus spécialement encore aux données indiquées (1579). Du reste, Cassini a donné (*Description géométrique de la France*, 1783, pag. 173) la longitude de douze villes de la France, déterminée, presque sans différence, par lui, au moyen de la méthode de Du Séjour (1578), et par Du Séjour, sept ans avant qu'il eût publié cette méthode, au moyen de deux éclipses de Soleil.

1586. *Notions préliminaires pour le calcul des parallaxes et des éclipses.*

Soit la fig. 95 une partie de la fig. 92, dans laquelle partie subsistent les dénominations (1538.) Soit BZ le prolongement du rayon CB; ☾ un astre dont la position est donnée par les Tables astronomiques, comme s'il était vu du centre C de la Terre, c'est-à-dire suivant la direction C☾. Mais l'Observateur voit l'astre du point B suivant la ligne droite B☾. L'angle B☾C est donc la différence de la position observée à la position calculée, différence qu'on nomme *parallaxe*. Pour comparer le calcul avec l'observation, il faut corriger l'un ou l'autre, de la valeur de la parallaxe. Si du rayon CB on décrit la circonférence MBH, on peut supposer que ce cercle appartient à la surface de la Terre Fig. 95.

Fig. 95. considérée comme sphérique, sans que cette supposition altère en aucune manière la distance vraie NC☾ de l'astre au pôle. Mais, dans cette hypothèse, Z devient le zénith, CBZ la ligne verticale, et BCA la latitude du point B de la Terre. Qu'on emploie cette latitude dans les calculs, c'est-à-dire, qu'*on retranche de la latitude l'angle de la verticale*, et qu'on emploie pour latitude l'angle au centre (1557); ZC☾ sera alors la distance vraie au zénith Z, à la connaissance de laquelle on parviendra par le moyen des élémens donnés par les tables. Si donc, par le moyen ordinaire de la parallaxe de hauteur, *ayant* d'abord *déduit* (1587) du *rayon particulier* CB la parallaxe horizontale, on réduit l'angle ZC☾ à l'angle ZB☾; ce dernier fera connaître le point cherché, c'est-à-dire le point du ciel auquel correspond la position apparente de l'astre sur la ligne B☾. Ces règles si faciles n'ayant pas été démontrées avant la première édition de ce Traité, on ne les observait pas; souvent on enseignait et plus souvent on suivait, au lieu de ces règles, une route tortueuse pour arriver au but. C'est pour rendre leur usage commode que j'ai calculé avec soin la table (CC). Nous allons voir combien, de cette manière, deviennent expéditifs les calculs des parallaxes et des éclipses.

Il n'est pas inutile d'observer ici que dans le Tom. VI des Mémoires de la Société Italienne, j'ai fait voir que les occultations d'étoiles, quand elles sont de courte durée, peuvent servir très-avantageusement pour déterminer le rayon particulier de tous les lieux d'où elles sont observées, et qu'il n'y a pas de moyen plus sûr et à-la-fois plus facile de bien connaître la vraie figure de la Terre.

1587. *Trouver les parallaxes de longitude, de latitude, d'ascension droite et de déclinaison.*

Toutes ces parallaxes dépendent de la parallaxe de hauteur, qui elle-même dépend de la parallaxe horizontale. Or (*Astron.* de De la Lande, 1624),

$$\text{sin. } par.\ horiz. = \frac{\text{rayon } particulier \text{ de la Terre.}}{\text{dist. de l'astre au centre de la Terre}}.$$

1588. De plus, (*Ibid.* 1628),

$$\text{sin. } par\ haut. = \text{sin. } par.\ horiz. \times \text{cos. } hauteur\ appar.$$

1589. Et, avec une approximation suffisante dans tous les cas,

par. hauteur = *par. horiz.* × cos. *hauteur appar.*

1590. Les deux dernières formules ont cette imperfection, qu'elles renferment dans le second membre la quantité cherchée, puisque *hauteur apparente* = *hauteur vraie* — *par. hauteur*, et que la hauteur vraie est la chose connue. Il n'en résulte que l'inconvénient de faire deux fois (675) un calcul très-court : cependant je vais indiquer des moyens de faire disparaître ce défaut.

1591. Nommons D la distance vraie de l'astre au zénith, ou le complément de la hauteur donnée par les Tables, p la parallaxe horizontale, π celle de hauteur. Par la méthode (676), on tire de la formule (1588),

$$\text{tang.}\,\pi = \frac{\sin.p\ \sin.D}{1 - \sin.p\ \cos.D}.$$

1592. Or cette équation peut se calculer par les logarithmes en deux manières; d'abord en faisant (435),

$$\cos.A = \sqrt{\sin.p\ \cos.D}\text{; puis}$$

$$\text{tang.}\,\pi = \frac{\sin.p\ \sin.D}{\sin.^2A}.$$

Si on le préfère, on substituera dans cette dernière équation la valeur de sin. p tirée de la précédente, et on aura

$$\text{tang.}\,\pi = \text{tang. D}\ \cot.^2A.$$

1593. L'autre manière consiste à retourner la formule (1591), comme nous l'avons enseigné (444), de sorte qu'elle devienne $\text{tang.}\,(\frac{1}{2}D + \pi) = \frac{1+\sin.p}{1-\sin.p} \times \text{tang.}\,\frac{1}{2}D$, équation qui se réduit (II. 9°) à celle-ci :

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}D + \pi) = \text{tang.}^2\,(45° + \tfrac{1}{2}p)\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}D.$$

1594. Mais, pour revenir à notre but, (1587), soit Z le zénith Fig. 84. de la Terre sphérique (1586), P le pôle de l'écliptique, T une planète vue du centre de la Terre, et qui, vue de la surface du Globe, paraît plus bas, en S : TS est la *parallaxe de hauteur ;* PZ est la distance du zénith au pôle de l'écliptique; c'est ce qu'on appelle la *hauteur du nonagésime*, c'est-à-dire du point de l'écliptique qui marque la longitude du zénith de l'observateur : ZPT

Fig. 84. est la *distance vraie de l'astre au nonagésime*, ou la différence de longitude entre l'astre et le nonagésime ; ZPS est la *distance apparente de l'astre au nonagésime*, et TPS la *parallaxe de longitude*, de laquelle nous cherchons d'abord la valeur.

1595. Le côté PZ et l'angle adjacent Z sont communs aux triangles ZPT, ZPS, et par conséquent, en faisant (1215), $A = Z$, $B = P$, $C = T$, on a $\sin. \partial ZT : \sin. \partial ZPT :: \sin. PT$ $\sin. (ZT + \partial ZT) : \sin. PZ \sin. (ZPT + \partial ZPT)$. Donc (1423), $\partial ZT : \partial ZPT$, ou $TS : TPS :: \sin. PT \sin. ZS : \sin. PZ \sin. ZPS$. Mais $\sin. ZS = \cos.$ *haut. appar.* $= \frac{\textit{paral. hauteur}}{\textit{paral. horiz.}}$, (1589) ; et PT est le complément de la *latitude vraie* de l'astre. Donc

$$\textit{par. long.} = \textit{par. horiz.} \times \frac{\sin. \textit{haut. nonag.} \times \sin. \textit{dist. appar. nonag.}}{\cos. \textit{lat. vraie.}}.$$

1596. *Pour avoir la longitude apparente de l'astre*, on ajoute la parallaxe à la longitude vraie, si l'astre est à l'orient du nonagésime ; on la soustrait, s'il est à l'occident.

1597. Comme le second membre renferme la parallaxe cherchée, puisque *dist. appar. nonag.* $=$ *dist. vr. nonag.* $+$ *par. long.*, il faudra faire le calcul par la méthode (675), ce dont nous donnerons un exemple (1614) ; ou par la méthode (676), d'où se déduit la formule qui suit.

1598. Si, au lieu des parallaxes, on emploie leurs sinus, la formule (1595) sera rigoureuse. On en tire $\frac{\sin. TPS \sin. PT}{\sin. \textit{par. horiz.} \sin. PZ} =$ $\sin. (TPZ + TPS) = \sin. TPZ \cos. TPS + \cos. TPZ \sin. TPS$; et, en divisant par cos. TPS la première et la dernière de ces trois valeurs égales,

$$\text{tang. } TPS = \frac{\sin. \textit{par. horiz.} \sin. PZ \sin. TPZ}{\sin. PT - \sin. \textit{par. horiz.} \sin. PZ \cos. TPZ}.$$

1599. En imitant les transformations (1592), je résous ainsi cette équation :

$$\cos. A = \sqrt{\frac{\sin. \textit{par. horiz.} \sin. PZ \cos. TPZ}{\sin. PT}};$$

$$\text{tang. } TPS = \text{tang. } TPZ \cot.^2 A.$$

1600. La *parallaxe de latitude* est ∂PT, ou $PT - PS$. Pour la déduire de la parallaxe horizontale, on emploiera l'analogie

(1235), laquelle, en changeant les lettres, comme je l'ai fait (1595), devient sin. ☊ZT : sin. ☊PT :: sin. (ZT + ☊ZT) : cos. PZ sin. (PT + ☊PT) — $\frac{\text{sin. PZ cos. (ZPT} + \frac{1}{2}\text{☊ZPT) cos. (PT + ☊PT)}}{\text{cos.} \frac{1}{2} \text{☊ZPT}}$. Mais j'observe que $\frac{\text{sin. ☊ZT}}{\text{sin. (ZT + ☊ZT)}} = \frac{\text{sin. } \textit{par. hauteur}}{\text{cos. } \textit{hauteur appar.}} = \text{sin. } \textit{par. horiz.}$, (1588); de plus, que cos. $\frac{1}{2}$ ☊ZPT = cos. $\frac{1}{2}$ *par. long.*, quantité que sans scrupule on peut faire égale à l'unité dans tous les cas; enfin qu'on peut de même mettre les arcs au lieu de sin. ☊PT et de sin. *par. horiz.* Cela posé, j'ai

$$\textit{parall. latit.} = \textit{par. horiz.} \Big(\text{cos. } \textit{haut. nonag.} \text{ cos. } \textit{lat. appar.} - \text{sin. } \textit{haut. nonag.} \text{ sin. } \textit{lat. appar.} \text{ cos.} (\textit{dist. vr. nonag.} + \tfrac{1}{2} \textit{par. long.})\Big).$$

1601. *Pour avoir la latitude apparente de l'astre*, la parallaxe de latitude s'ajoute toujours, avec le signe qu'elle porte, à la distance vraie de l'astre au pôle visible de l'écliptique.

Cette formule contient à la vérité dans le second membre la quantité cherchée; néanmoins le calcul en est facile, comme on le verra dans l'exemple (1614).

1602. Si P est le pôle de l'équateur, on écrira dans les formules (1595, 1600), *par. asc. dr.* au lieu de *par. long.*, *compl. hauteur du pôle* au lieu de *haut. nonag.*, *angle horaire* au lieu de *distance au nonag.*, *déclin.* au lieu de *lat.*; et on aura

$$\textit{par. asc. dr.} = \textit{par. horiz.} \times \frac{\text{cos. } \textit{haut. du pôle} \times \text{sin. } \textit{ang. horaire appar.}}{\text{cos. } \textit{decl. vraie}};$$

$$\textit{par. décl.} = \textit{par. horiz.} \Big(\text{sin. } \textit{haut. du pôle} \text{ cos. } \textit{décl. appar.} - \text{cos. } \textit{haut. du pôle} \times \text{sin. } \textit{décl. appar.} \text{ cos.} (\textit{ang. hor. vr.} + \tfrac{1}{2} \textit{par. asc. dr.})\Big).$$

1603. Le Calculateur ne doit jamais oublier que pour tenir compte de l'ellipticité de la Terre, il faut, dans toutes les formules (1588 et suiv.), employer la parallaxe horizontale qui convient au lieu pour lequel se fait le calcul; et, dans les deux dernières, la hauteur du pôle diminuée de l'angle de la verticale (1586).

1604. *Trouver la distance apparente des centres de deux astres.* Il y a trois cas principaux et très-importans dans lesquels on cherche la distance appparente des centres de deux astres; ou, ce qui revient au même, dans lesquels on conclut de la distance ap-

parente la distance vraie, c'est-à-dire celle qui serait observée du centre de la Terre : 1°. dans les éclipses et dans les occultations ; 2°. dans les passages sur le disque du soleil ; 3°. sur mer, pour en déduire la longitude du vaisseau.

Je ne connais rien de mieux que la méthode de De la Lande pour le second cas ; et celle de Borda pour le troisième, quand on n'a point les grandes tables anglaises, ou celles qui servent à la méthode de Dunthorn. Pour le premier cas, la voie la plus expéditive est certainement celle du nonagésime (si on veut l'appeler ainsi), mais en usant de la méthode suivante, qui a obtenu le prix proposé par l'Académie de Copenhague (*Méthode pour calculer les longitudes géographiques*, etc. Vérone, chez Ramanzini, 1789).

1605. Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, Z le zénith de la Terre supposée sphérique (1586), L le lieu vrai de celui des deux astres qui souffre la plus grande parallaxe. Dans le triangle PEZ, on connaît toujours trois parties ; savoir PE ou *l'obliquité apparente de l'écliptique*, PZ ou le *complément de la hauteur du pôle* diminuée de l'angle de la verticale (1586), et ZPE qui est l'angle horaire du pôle de l'écliptique, ou la différence entre l'ascension droite du zénith et celle du pôle de l'écliptique. L'ascension droite de ce pôle est toujours de 270° ; celle du zénith, qu'on nomme *l'ascension droite du milieu du Ciel*, est égale à la somme de l'ascension droite du soleil et du temps vrai (au moment pour lequel on fait le calcul) réduit en degrés ou en parties de l'équateur, soustraction faite de 360°, lorsque cette somme est $> 360°$. On cherchera EZ, ou la *hauteur du nonagésime ;* et PEZ, qui est la différence entre la longitude du zénith ou du nonagésime et celle du pôle de l'équateur, laquelle est toujours de 90°. Fig. 96

1606. Dans le triangle PEZ, connaissant deux côtés PE, PZ, et l'angle intercepté ZPE $= 90° +$ *asc. dr. milieu du Ciel*, on cherchera d'abord la valeur du côté EZ, et de l'angle PEZ $= 90°$ $-$ *long. nonag.*, au moyen des formules (1097, 1098), qui donnent, en faisant $A = Z$, $B = P$, $C = E$, 1°. tang. $x =$ cos. P tang. PZ $= -$ sin. *asc. dr. milieu du Ciel* cot. *haut du pôle* ; 2°. $y =$ PE $- x$ $=$ *obliquité* $- x$; 3°. cos. EZ $=$ cos. *haut. nonag.* $=$ cos. PZ $\times$

$\frac{\cos. y}{\cos. x}$ = sin. *haut. du pôle* × $\frac{\cos. y}{\cos. x}$; 4°. cos. PEZ = sin. *long. nonag.* = cot. EZ tang. y = cot. *haut. nonag.* tang. y. Le calcul de ces équations devient plus commode, si on change le signe de x, comme je l'ai fait (1449). La longitude du nonagésime, donnée par la 4°, doit se prendre dans les signes ascendans, ou dans les descendans, suivant que l'ascension droite du milieu du Ciel se trouve dans ceux-là ou dans ceux-ci. En retranchant cette longitude de celle de l'astre L, on connaît l'angle ZEL, ou (1594) *la distance vraie de l'astre au nonagésime.*

J'avertis que quand l'ascension droite du milieu du Ciel se trouve à-peu-près entre 80° et 100°, ou entre 250° et 290°, la différence entre EZ et y peut être si faible, que les petites erreurs sur ces quantités se multiplieraient excessivement dans l'équation 4°, ce qui altérerait d'autant PEZ. En pareil cas, il faut renoncer à cette équation, et employer la 3°, (1086), laquelle, en faisant A = Z, B = E, C = P, donne tang. E = tang. P × $\frac{\sin. x}{\sin. y}$, ou, en changeant le signe de x, cot. *long. nonag.* = cot. *asc. dr. milieu du Ciel* × $\frac{\sin. x}{\sin. y}$.

1607. Les valeurs de EZ et de ZEL étant déterminées, on a tout ce qu'il faut pour calculer les parallaxes de longitude et de latitude de l'astre L, au moyen des formules (1595, 1600), dans lesquelles on emploiera pour parallaxe horizontale la différence des parallaxes horizontales des deux astres; ce qui est, non pas rigoureux, mais adopté communément, et d'une exactitude suffisante dans tous les cas.

Ayant ainsi appliqué l'effet des deux parallaxes au seul astre L, et connaissant, dans cette hypothèse, la longitude et la latitude apparentes de cet astre; si l'on suppose à présent que l'autre astre soit S, et que le triangle zEV soit le même que le triangle ZEL Fig. 97. de la fig. 96, de sorte que VL soit la parallaxe de hauteur; on connaîtra, dans le triangle ELS, le côté LE distance apparente de l'astre L au pôle de l'écliptique, le côté ES distance vraie de l'astre S à ce pôle, et l'angle LES qui est la différence entre la longitude vraie de l'astre S et la longitude apparente de l'astre L.

Fig. 97. Avec ces données, il reste à chercher le côté LS qui est la distance apparente des centres des deux astres, et dont la détermination est le but du problème. Ce côté, à cause de sa petitesse, ne peut s'obtenir avec précision par la dernière équation (VIII. 8e). Mais prolongez EL, de sorte qu'on ait Em = ES, et conduisez l'arc de parallèle Sm; vous pourrez, sans erreur d'un centième de seconde (1198) résoudre le petit triangle LmS comme rectiligne et rectangle en m, connaissant dans ce triangle Lm = ES — EL, et Sm = LES sin. ES, (985). Et comme, au lieu d'alonger EL, on pourrait couper ES, en r, de sorte qu'on eût Er = EL, puis mener l'arc de parallèle Lr, et résoudre le triangle LrS; il sera mieux, en embrassant les deux cas, de prendre Sm = LES sin. $\frac{1}{2}$ (ES + EL).

1608. Pour faciliter les opérations précédentes, je les réduirai (1612) en une espèce de tableau. Je place à la fin de ce Traité la table (CC) que j'ai annoncée (1557, 1559, 1586), et de laquelle on a besoin pour ces mêmes opérations. Elle est construite d'après l'hypothèse $a : b :: 1 : \frac{299}{300}$, (1555).

1609. Voici quel est l'usage de cette table. Pour avoir la parallaxe horizontale d'un astre pour un lieu de la Terre, on prendra dans la table le logarithme du rayon terrestre correspondant à la latitude de ce lieu, et on l'ajoutera au logarithme de la parallaxe horizontale de l'astre sous l'équateur.

1610. Si au lieu de cette parallaxe on avait la parallaxe pour un lieu hors de l'équateur, comme il arrive lorsqu'on fait usage des *Tables de la Lune* de De la Lande, qui donnent la parallaxe pour Paris; alors on aurait la parallaxe horizontale pour l'équateur, en retranchant du logarithme de la parallaxe donnée le logarithme du rayon terrestre du lieu pour lequel elle est donnée.

1611. Et si l'on voulait le logarithme du nombre de toises d'un rayon, on ajouterait log. a, (1556), ou 6,5150345 à celui de la table.

1612. *Tableau du calcul pour trouver la distance apparente des centres de deux astres*, S, L, en supposant connues les parallaxes horizontales équatoriales, et les longitudes et latitudes *vraies*, c'est-à-dire telles qu'on les aurait, si on voyait les

deux astres du centre de la Terre, et en tenant compte de l'aberration et de la nutation. Je suppose de plus que la parallaxe horizontale de l'astre L soit plus grande que celle de l'astre S. On comprendra facilement qu'il est inutile d'indiquer ce que sont les arcs A, B, etc. qui ne sont ici que des arcs subsidiaires. Mais je recommande toujours l'observation des règles des signes (73, 75, 1451).

A = ascens. dr. ⊙ + temps vrai en parties de l'équateur.

B = hauteur du pôle — angle de la verticale.

tang. C = cot. B sin. A.

Si A est > 360°, prenez A — 360°, au lieu de A.

D = C + obliquité apparente de l'écliptique.

$\cos. F = \sin. B \times \frac{\cos. D}{\cos. C}.$

sin. G = tang. D cot. F.

Quand A est entre 80° et 100°, ou entre 250° et 290°, alors au lieu de cette équation employez la suivante :

$\cot. G = \cot. A \times \frac{\sin. C}{\sin. D}.$

Prenez G ou dans les signes ascendans, ou dans les signes descendans, selon que A est ou dans les premiers ou dans les derniers.

H = longitude vraie de l'astre L — G.

Ajoutez 360° au premier terme du second membre, quand ce premier terme est plus petit que G.

K = rayon de la Terre × (par. horiz. équat. L — par. horiz. équat. S).

$M = K \times \frac{\sin. F \sin. (H + M)}{\cos. \mathit{lat.\ vraie}\ L}.$

$N = K(\cos. F \cos. \mathit{lat.\ app.} L - \sin. F \cos.(H + \tfrac{1}{2}M) \sin. \mathit{lat.\ app.} L).$

Longitude apparente de l'astre L = longitude vraie + M.

Latitude apparente de l'astre L = latitude vraie ± N.

Le signe + a lieu si la latitude vraie est australe, le signe — si elle est boréale; c'est l'opposé quand N est négative.

Q = long. app. de l'astre L ∽ long. vraie de l'astre S.

T = lat. app. de l'astre L $\backsim$ lat. vraie de l'astre S.
Y = lat. app. de l'astre L + lat. vraie de l'astre S.

tang. U $= \frac{Q \times \cos. \frac{1}{2} Y}{T}$.

DISTANCE APPARENTE DES CENTRES $= \frac{T}{\cos. U}$.

1613. La promptitude de la méthode précédente a pour causes principales le petit nombre et la simplicité des règles, l'avantage de ne point avoir besoin de construire une figure, et surtout celui de pouvoir faire les calculs des sept premières équations en négligeant les secondes, ou au plus en tenant compte seulement des dixaines de secondes, sans que l'exactitude du dernier résultat en soit nullement altérée : d'où il suit encore qu'on peut de même négliger les secondes, en prenant les lignes trigonométriques contenues dans les équations qui donnent la valeur de M et celle de N.

1614. Appliquons cette méthode à la recherche de la distance apparente d'Antarès au centre de la Lune, au moment de l'immersion observée à Paris par De la Lande, le 6 avril 1749. Je prends les élémens donnés par lui (*Astr.* 1978).

$$A = 15° 58' + 195° 20' = 211° 18'.$$

L'angle de la verticale donné par la table (CC) pour la latitude 48° 50' est 11' 22" ½; et par conséquent

$$B = 48° 50' 10'' - 11' 20'' = 48° 38' 50''.$$

L'obliquité apparente de l'écliptique pour le commencement d'avril 1749, selon mes observations, (*Società Ital.* Tom. V, pag. 277), est 23° 28' 22". Cela posé,

log. cot. B = 9,94456	log. sin. B = 9,87544
log. — sin. A = 9,71560	compl. log. — cos. C = 0,04123
log. — tang. C = 9,66016	log. — cos. D = 9,99992
	log. cos. F = 9,91659
C = 155° 25' 40"	
+ obliqu. = 23° 28' 20"	log. — tang. D = 8,28332
D = 178° 54'	log. cot. F = 0,16472
F = 34° 23' 10"	log. — sin. G = 8,44804

A étant dant les signes descendans, on a donc $G = 181° 36' 30''$. La longitude vraie de la Lune était $245° 31' 42'',4$. Par conséquent

$$H = 245° 31' 40'' - 181° 36' 30'' = 63° 55' 10''.$$

La latitude vraie de la Lune était australe et de $3° 47' 58'',7$; et la parallaxe horizontale dans l'équateur était de $57' 22'',7$. Mais dans ce cas *par. horiz.* $S = 0$, puisqu'Antarès n'a pas de parallaxe. Donc

log. 57′ 22″, 7 = 3, 53690
(CC)..... log. du rayon pour Paris = 9, 99918

log. K = 3, 53608
log sin. F = 9, 75187

log. (K sin. F) = 3, 28795
compl. log. cos. *lat. vr.* ☾ = 0, 00096

Somme, ou log. constant = 3, 28891
log. sin. (H + M, estimé 64° 10′) = 9, 95427

log. M à très-peu-près = 3, 24318 = log. 29′ 11″

log. constant, porté ci-dessus, = 3, 28891
log. sin. (H + M = 64° 24′ 20″) = 9, 95516

log. M = 3, 24407 = log. 29′ 14″, 2

log. cos. F, porté ci-dessus, = 9, 91659
log. K, porté ci-dessus, = 3, 53608

log. N, à très-peu-près, = 3, 45267 = log. 47′ 15″
d'où log. cos. (*lat. app.* ☾ = 4° 35′) = 9, 99861

log. 1° partie de la valeur de N = 3, 45128 = log. 47′ 6″, 7

log. — (K sin. F), porté ci-dessus, = 3, 2879
log. cos. (H + ½ M = 64° 10′) = 9, 6392
log. — sin. (*lat. app.* ☾ = 4° 36′) = 8, 9042

log. + 2° partie de la valeur de N = 1, 8313 = log. 1′ 7″, 8

Donc N = 48′ 14″, 5

long. appar. ☾ $= 245° 31' 42'',4 + 29' 14'',2 = 246° 0' 56'',6$

lat. appar. ☾ $= 3° 47' 58'',7 + 48' 14'',5 = 4° 36' 13'',2$

En prenant le milieu entre les positions d'Antarès, déterminées par Bradley, Mayer et La Caille, et réduites au 6 avril 1749, et en tenant compte de l'aberration et de la nutation, ce qui donne avec exactitude la position apparente (que j'appelle cependant *vraie*, pour indiquer qu'elle est exempte de parallaxe), je trouve *long. vr.* Antarès $= 246° 16' 19'',2$, et *lat. vr.* Antarès $= 4° 32' 10'',5$ *austr.* Donc

$$Q = 246° 0' 56'',6 \backsim 246° 16' 19'',2 = 15' 22'',6$$
$$T = 4° 36' 13'',2 \backsim 4° 32' 10'',5 = 4' 2'',7$$
$$Y = 4° 36' + 4° 32' = 9° 8'$$

$$\text{log. } Q = 2,96501$$
$$\text{log. cos. } (\tfrac{1}{2} Y = 4° 34') = 9,99862$$
$$\text{compl. log. } T = 7,61493$$
$$\text{log. tang. } U = 0,57856$$
$$\text{comp log. cos. } U = 0,59318$$
$$\text{J'ajoute log. } T = 2,38507$$
$$\text{Somme } 2,97825$$

Ce logarithme donne, pour la *distance apparente des centres*, 15' 51'',2.

1615. Le calcul que nous venons de faire exige la recherche de trente logarithmes. Je ne connais point de méthode où il ne soit nécessaire d'en chercher un plus grand nombre, et avec une perte de temps bien plus considérable, attendu qu'il faut tenir compte des dixièmes de seconde dans tout le calcul, si on veut obtenir dans le dernier résultat la précision que j'obtiens par la méthode que je viens d'exposer. On observera de plus, si on compare cette méthode à d'autres, qu'elle ne demande pas que l'on connaisse l'ascension droite et la déclinaison des deux astres, ou de l'un des deux, ni leur hauteur, ni l'angle parallactique, ni celui de position, et qu'elle permet de prendre l'ascension droite du soleil dans des Éphémérides, au lieu de la calculer rigoureusement.

1616. Pour comparer avec l'observation la distance apparente des centres, donnée par le calcul (1612), il faut augmenter le diamètre de la Lune en raison de la hauteur, et de plus, s'il s'agit d'une éclipse de Soleil, tenir compte de l'accourcissement produit par la réfraction sur les phases mesurées avec le micromètre. Pour la première de ces corrections, il suffirait de prendre la hauteur de la Lune au moyen d'un globe : pour la seconde, il est nécessaire de connaître l'angle formé par le cercle vertical avec la ligne des centres. Voyons comment, au moyen des élémens du calcul (1612), nous pourrons trouver une valeur suffisamment approchée soit pour cet angle, soit pour la hauteur de la Lune.

1617. Soit E le pôle de l'écliptique, z le zénith, V le lieu vrai de la Lune, L son lieu apparent, S le lieu vrai de l'autre astre; SL est la distance apparente des centres, donnée par le calcul (1612). Qu'on prolonge zL jusqu'en n; on aura Lm = T, mS = Q × cos. $\frac{1}{2}$ Y, (1607), et mLS = U, (1612). Fig. 97.

Cela posé, on observera que le triangle zVE, en se changeant en zLE, conserve comme constans le côté zE et l'angle z. Donc, en faisant (1223, 1213), A = z, B = E, C = V, on a 1°. $\mathfrak{g}$EV : $\mathfrak{g}$E :: sin. EV : tang. zLE, en mettant par approximation zLE au lieu de V; 2°. $\mathfrak{g}z$V : $\mathfrak{g}$E :: sin. EV : sin. zLE. Mais $\mathfrak{g}z$V = *parall. hauteur* = *parall. horiz.* cos. *haut. appar.*, (1589). En introduisant cette valeur dans la dernière analogie, et $\mathfrak{g}$EV × tang. zLE au lieu de $\mathfrak{g}$E × sin. EV, d'après la première, ces deux analogies donneront

$$\text{tang. } \textit{ang. parallact. appar.} = \frac{\textit{par. long. cos. lat. vr.}}{\textit{par. lat.}} = \frac{M}{N} \times \text{cos. } \textit{lat. vr.}$$

$$\text{cos.} \textit{hauteur appar.} = \frac{\textit{par. lat.}}{\textit{par. horiz. cos. ang. parallac. app.}} = \frac{N}{K \times \textit{cos. ang. par. app.}}.$$

Dans les éclipses de soleil on peut toujours mettre 1 au lieu de cos. lat. ☾. L'angle parallactique apparent (zLE = mLn) soustrait de l'angle (U = mLS), ou ajouté à cet angle, selon les cas, donne l'angle cherché SLn, que fait la ligne des centres avec le cercle vertical.

1618. Quand on n'a pas besoin de cet angle, on peut déduire immédiatement des élémens du calcul (1612) le diamètre de la

Fig. 97. Lune augmenté en raison de la hauteur inconnue. En effet, soit Δ le diamètre horizontal, Δ' le diamètre augmenté : on a (*De la Lande*, 1510), $\Delta : \Delta' :: \sin. zV : \sin. zL$. Or (1051), $\sin. zV = \frac{\sin. zEV \sin. EV}{\sin. z}$, et $\sin. zL = \frac{\sin. zEL \sin. EL}{\sin. z}$. Donc $\sin. zEV \sin. EV : \sin. zEL \sin. EL :: \Delta : \Delta'$; et par conséquent

$$\Delta' = \frac{\Delta \sin. (H + M) \cos. \text{lat. app.} ☾}{\sin. H \cos. \text{lat. } vr. ☾}.$$

1619. Cette formule est de Gertsner. La valeur qu'elle donne n'est ni finie, ni sûre, lorsque la longitude lunaire coïncide, ou à-peu-près, avec la longitude du nonagésime : mais alors la hauteur de la Lune est connue, puisqu'on a $zV = EV - Ez$, $zL = EL - Ez$; et la parallaxe de hauteur est égale à celle de latitude; ensorte qu'on emploie, au lieu de cette formule, la première analogie (1618).

1620. Comme Lévêque a donné des ***Tables générales*** de la longitude et de la hauteur du nonagésime pour tous les pays de la Terre supposée sphérique (à Paris, *chez Laporte*), je crois qu'il n'est pas inutile de faire voir combien il est facile d'introduire dans ces tables la correction relative à l'aplatissement de la Terre.

Fig. 98. Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, M le zénith pour la Terre aplatie, Z le zénith pour la Terre sphérique. Les tables de Lévêque sont construites sur le triangle PZE; elles ont pour argumens la hauteur du pôle ou le complément de PZ, et l'ascension droite du milieu du Ciel ou du zénith Z. Or on peut observer que l'augmentation ZM égale à l'angle de la verticale ne change point l'ascension droite du zénith ou du milieu du Ciel; ainsi cet argument reste constant. Le second argument, c'est-à-dire PZ, varie seul; et par conséquent si l'on fait usage de ces tables en diminuant de l'angle de la verticale l'argument de la hauteur du pôle, elles donneront la hauteur ME du nonagésime, et la longitude du nonagésime ou du zénith M, telles qu'on doit les avoir pour le sphéroïde aplati.

1621. *Trouver la longitude d'un lieu de la Terre.*

Les éclipses de soleil et les occultations d'étoiles par la lune sont les phénomènes les plus sûrs pour déterminer avec précision

les longitudes terrestres. On calculera la distance apparente des centres (1612) pour le moment de l'observation, en supposant la longitude telle qu'on l'estime à peu-près, et prenant dans les tables, d'après cette supposition, les lieux du Soleil et de la Lune. Et si la distance calculée ne se trouve pas égale à la distance observée, je vais démontrer que de cette erreur du calcul on peut déduire, avec autant d'exactitude que de facilité, la vraie longitude cherchée.

1622. Soit E le pôle de l'écliptique, L la Lune, S le Soleil ou l'étoile, LS la distance apparente des centres donnée par le calcul, (1612). Je n'attribue l'erreur sur la distance des centres qu'au lieu de la Lune employé dans ce calcul; car l'étoile est immobile, et le Soleil peut se regarder comme tel si on emploie, lorsque je le prescrirai, le *mouvement relatif*, c'est-à-dire la différence des mouvemens du Soleil et de la Lune. Considérant donc ES comme constant, il s'agit de déterminer dans le triangle LES les erreurs de l'angle E et du côté EL correspondantes à l'erreur du côté LS. Je procède comme il a été dit (687); je suppose d'abord que j'ai de plus comme constant le côté EL, et faisant (1305), $A = E$, $B = S$, $C = L$, j'ai dSL : dE :: sin. EL sin. L : 1. Faisant ensuite l'angle E constant avec le côté ES, j'ai (1233), dSL : dEL :: cos. L : 1. En prenant la somme des deux valeurs partielles que donnent pour dSL ces deux analogies, je trouve dSL $=$ dE sin. L sin. EL $+$ dEL cos. L. Fig. 97.

1623. Je nomme D la distance LS des centres donnée par le calcul (1612), L la longitude apparente de la Lune, l sa latitude apparente, de sorte que dans la dernière formule ci-dessus je substituerai dL à dE, et dl à dEL; l'angle L ou ELS est précisément l'angle U, que l'avant-dernière formule (1612) donne toujours aigu, et dont on doit employer le supplément dans l'équation ci-après, toutes les fois que la distance apparente de la Lune au pôle de l'écliptique sera moindre que la distance de l'étoile ou du Soleil au même pôle. On aura donc

$$dD = dL \text{ sin. U cos. } l + dl \text{ cos. U}$$

1624. Dans cette formule, on doit donner le signe négatif à dL, si le cas auquel on l'applique précède la conjonction appa-

Fig. 97. rente, parce qu'alors l'accroissement de longitude δL diminue l'angle LES, tandis qu'il l'augmente après la conjonction; et ce second cas est celui de la figure. Si donc au lieu de δD on met dans cette équation l'erreur donnée par le calcul sur la distance des centres (1621), δL et δl seront les erreurs sur la longitude et la latitude apparentes de la Lune employées dans le calcul, erreurs qui ont donné lieu à l'erreur δD. Il s'agit de déterminer, par la connaissance de cette erreur, la valeur de δL et celle de δl.

1625. *Si on suppose exact le lieu de la Lune donné par les tables*, les erreurs δL et δl dépendent alors uniquement de l'hypothèse de la longitude terrestre. Ces erreurs, dans ce cas, sont entre elles en raison des mouvemens horaires vrais de la Lune en longitude et en latitude. Je dis des mouvemens horaires *vrais*, parce que le changement de l'hypothèse n'altère en rien l'angle horaire, duquel dépendent essentiellement les parallaxes. Cela posé, si l'on appelle M le mouvement horaire vrai relatif en longitude, m ce mouvement en latitude, r le rapport $\frac{m}{M}$ entre ces mouvemens, on aura $M : m :: \delta L : \delta l = \frac{m \delta L}{M} = r \delta L$. En substituant cette valeur de δl dans l'équation (1623), on en tirera

$$\delta L = \pm \frac{\delta D}{\sin. U \cos. l + r \cos. U},$$

et le signe — sera adopté avant la conjonction apparente (1624). Après avoir déterminé par cette équation l'erreur sur la différence des longitudes des deux astres, on aura par le moyen du mouvement horaire relatif, la correction en temps qu'il faut faire à l'hypothèse de la longitude terrestre, et cette longitude sera ainsi connue et déterminée.

Si l'erreur δD est de plusieurs minutes, l'équation, déduite des analogies infinitésimales, ne donnera pas exactement la valeur de δL; mais par cette valeur on aura toujours une correction approchée de la longitude. Avec cette longitude ainsi corrigée, on recommencera le calcul (1612); on aura une autre erreur δD, mais très-petite, et on tirera de l'équation une seconde correction très-exacte de la longitude.

1626. *Mais quand on veut tenir compte de l'erreur qui peut se trouver dans le lieu de la Lune donné par les tables, et déterminer cette erreur*, une observation ne suffit pas ; il est nécessaire d'en avoir trois, dont une au moins ait été faite d'un lieu duquel on connaisse la longitude. Dans une éclipse de soleil il est facile d'en réunir plusieurs, ce qui donne un résultat moyen d'autant plus sûr qu'on a rassemblé plus d'observations. Je suppose donc qu'on ait trois observations, et que deux de ces observations aient été faites sous le méridien qu'on cherche à déterminer. Pour chacune de ces observations, on aura une équation de la forme (1623). J'appelle E l'erreur des tables sur la longitude de la Lune, e l'erreur en latitude, et j'ai, pour les trois observations,

(N)... $\delta D = E \sin. U \cos. l + e \cos. U.$
(O)... $\delta D' = \delta L \sin. U' \cos. l + \delta l \cos. U'.$
(P)... $\delta D'' = \delta L \sin. U'' \cos. l + \delta l \cos. U''.$

1627. L'équation (N) est visiblement celle qui répond à l'observation faite sous un méridien connu; puisque dans cette équation l'erreur δD dépend uniquement des erreurs des tables. Dans les deux autres équations, chacune des expressions δL et δl contient deux erreurs qu'il faut démêler et distinguer l'une de l'autre, l'erreur des tables, et celle de l'hypothèse pour la longitude terrestre. Ces erreurs sont les mêmes dans les deux équations, parce que l'erreur des tables ne change pas dans le court intervalle entre les deux observations, et parce que les calculs pour l'une et pour l'autre sont faits d'après la même hypothèse pour la longitude terrestre. La quantité cos. l suppose que la latitude apparente de la Lune est la même dans les trois observations; ce qui n'est pas exact : mais le changement de cette latitude ne peut faire varier sensiblement son cosinus. Au surplus il sera facile, lorsqu'on le voudra, d'employer dans chaque équation la latitude correspondante $\frac{1}{2}$ Y, (1612).

1628. Nommons ϵ l'erreur sur la longitude de la Lune, provenant de l'hypothèse : l'erreur que cette hypothèse produira sur la latitude de la Lune sera $r\epsilon$, (1625); et on aura

(Q)... $\delta L = E + \epsilon.$
(R)... $\delta l = e + r\epsilon.$

D'où l'on déduit

$$(S)\ldots\ r\delta L - \delta l = rE - e.$$

Substituant les valeurs (Q), (R) dans les équations (O), (P), et combinant ces équations avec la précédente (N), pour les résoudre toutes trois par les méthodes ordinaires, on trouvera la valeur de chacune des trois inconnues, E, e, ε.

1629. Il sera plus commode de diviser l'opération, comme l'indiquent les équations suivantes :

$$1^{\circ} \qquad \delta L = \frac{\delta D' \cos. U'' - \delta D'' \cos. U'}{\cos. l \sin. (U' \pm U'')}.$$

$$2^{\circ} \qquad \delta l = \frac{\delta D'' \sin. U' \pm \delta D' \sin. U''}{\sin. (U' \pm U'')}.$$

$$3^{\circ} \qquad E = \frac{\delta D + \cos. U\,(r\delta L - \delta l)}{\sin. U \cos. l + r \cos. U}.$$

$$4^{\circ} \qquad e = \frac{r\delta D - \sin. U \cos. l\,(r\delta L - \delta l)}{\sin. U \cos. l + r \cos. U}.$$

$$5^{\circ} \qquad \varepsilon = \delta L - E.$$

1630. Les équations 1° et 2° sont tirées des équations (O), (P). On emploiera les signes supérieurs lorsque les deux observations auront été faites, comme il arrive le plus souvent, l'une avant et l'autre après la conjonction apparente, parce qu'alors l'erreur δL doit être négative (1624) dans l'une ou dans l'autre des équations (O), (P). Quand on emploiera les signes inférieurs, on se souviendra que sin. $(U' - U'')$ devient négatif (75), si $U'' > U'$.

Les équations 3° et 4° sont tirées des équations (N), (S) ; la 5° de l'équation (Q).

1631. Il nous reste à prévenir, relativement aux équations 1°...4°, que lorsque la distance des centres calculée est moindre que la distance observée, on doit faire négative l'erreur correspondante δD ou $\delta D'$, etc. Il faut aussi changer le signe de r, lorsque le mouvement m en latitude, substitué à δl, approche la Lune du pôle de l'écliptique; puisque δEL, expression au lieu de laquelle (1623) nous avons mis δl, suppose que la Lune s'éloigne de ce pôle. Je rappelle de plus la règle (1623) sur l'usage de l'angle U, ou de son supplément. Il est du reste inutile d'indiquer comment on

reconnaîtra en quel sens devront se corriger les erreurs E, e, ϵ, dans les différentes circonstances, puisque cela se distingue à la seule inspection des deux dernières équations (1612), lesquelles, après les corrections faites, doivent donner la distance apparente des centres absolument égale à la distance observée.

1632. Pour donner un essai de l'application de mes formules, je prends les longitude et latitude apparentes de la Lune dans l'exemple que donne De la Lande (*Astron.* 1978), et la position d'Antarès (1614); et par les deux dernières équations (1612), j'ai

pour l'immersion d'Antarès observée à Paris, $D = 15' \, 50'',2$;
pour cette immersion observée à Berlin, $D' = 15' \, 50'',26$;
pour l'émersion observée à Berlin, $D'' = 15' \, 44'',30$.

Ces trois distances sont toutes trop grandes, et par conséquent les erreurs δD, $\delta D'$, $\delta D''$ conservent les signes qu'elles se trouvent avoir dans les équations (1629). En effet ces distances, comparées avec les demi-diamètres apparens respectifs de la Lune, tels qu'ils sont déterminés dans l'*Astronomie* de De la Lande, et diminués de $3'',5$ par l'inflexion, donnent $\delta D = 12'',5$; $\delta D' = 12'',56$; $\delta D'' = 6'',0$. On a de plus $U = 75° \, 16'$, $U' = 59° \, 34'$; $U'' = 58° \, 19'$; $l = 4° \, 36'$ pour valeur moyenne, et $\log. r = -8,7640$. Avec ces élémens, je trouve par les formules (1629), en adoptant les signes supérieurs dans la première et dans la seconde, ainsi que la question l'exige, $\delta L = 4'',04$; $\delta l = 17'' \, 94$; puis $E = 8'',30$; $e = 17'',7$; $\epsilon = -4'',26$. Il est aisé de voir, en examinant le calcul de la distance des centres fait pour Paris, en quel sens doivent s'appliquer les corrections des erreurs E, e, pour faire disparaître l'erreur δD. On reconnaîtra alors que la longitude de la Lune, donnée par les tables, est trop petite de $8'',3$; sa latitude trop grande de $17'',7$; et comme la valeur de ϵ a un signe contraire à celui de E, il en résulte que la longitude de la Lune donnée par l'hypothèse de la longitude de Berlin, est trop grande de $4'',26$. Pour diminuer de cette quantité la longitude de la Lune, on trouve, par le moyen du mouvement horaire, qu'il faut augmenter de $7'',7$ de temps l'hypothèse de $44' \, 4''$; ensorte que l'on a $44' \, 12''$ pour la différence entre les méridiens des Observatoires de Paris et de Berlin, déduite de ces observations.

1633. Si deux observations eussent été faites sous le méridien connu, et la troisième seulement sous le méridien qu'on veut déterminer, on appliquerait alors aux deux premières les équations 1° et 2°. La 1° donnerait la valeur de E, la 2° celle de e. On corrigerait de ces erreurs le lieu de la Lune donné par les tables; puis on calculerait la distance des centres relativement à la troisième observation; et l'erreur de l'hypothèse pour la longitude terrestre se trouverait par le moyen de l'équation (1625).

J'ai eu plus d'une occasion d'éprouver ces méthodes pour conclure de plusieurs observations la longitude de Vérone, qui était très-mal connue (*Società Italiana*, Tom. V).

1634. *Corriger les erreurs auxquelles les observations sont sujettes, à raison de la différence entre le parallèle vrai et le parallèle apparent.*

Il y a trois causes de différence entre le parallèle vrai et le parallèle apparent; 1°. le changement de déclinaison de l'astre; 2°. le changement de la parallaxe de déclinaison; 3°. le changement de la réfraction. Il est à propos d'évaluer séparément l'erreur qui provient de chacune de ces trois causes. On ne doit tenir compte des deux premières que pour les observations qui concernent la Lune.

1635. Quand on observe avec la lunette parallactique la différence d'ascension droite et de déclinaison entre la Lune et une étoile qui la suit, on est obligé de placer le micromètre de manière que le bord de la Lune rase le fil. Soit P le pôle du Monde, Fig. 99. BC le fil horaire du micromètre, FM un autre fil perpendiculaire au fil horaire; et soit LU le mouvement du bord de la Lune, qui, en traversant la lunette, s'approche ou s'éloigne du pôle par l'une des trois causes (1634). Comme il faut mettre le fil MF dans la direction LU, le fil horaire se trouve dans la position CS; et par conséquent, si AN est le parallèle de l'étoile, le passage de cette étoile, qu'on aurait dû observer en B, s'observera en S. Comme il est clair que la route du centre de la Lune est parallèle à celle du bord qui a rasé le fil, et comme les observations des bords de la Lune se réduisent toujours à son centre, supposons maintenant que LU soit la ligne suivie par le centre de la Lune, et l'angle BPS sera l'erreur

sur la différence des passages observés. Or le triangle CPS donne sin. PS : sin. PCS :: sin. CS : sin. CPS, ou :: CS : CPS, vu la petitesse de ces quantités. Mais PCS = MCL est l'angle formé par le parallèle apparent avec le parallèle vrai; CS est la différence observée de déclinaison, entre l'étoile et le centre de la Lune. Donc on aura par l'équation suivante la correction, en temps, du passage observé.

$$\text{La correction cherchée} = \frac{\text{diff. appar. } \textit{décl.} \times \text{sin. } \textit{ang. des parallèles}}{15 \text{ cos. } \textit{décl.} \text{ de l'étoile}}.$$

1636. Cette correction *s'ajoutera* au passage observé de l'étoile, lorsque la Lune, plus éloignée du pôle que l'étoile, s'en rapprochera, ou que, plus voisine du pôle que l'étoile, elle s'en éloignera. Dans les autres cas, la correction se *retranchera*. Mais si, au lieu d'une étoile, on avait observé une tache de la Lune, alors, dans la règle présente, il faut substituer la tache à l'étoile, si on a observé le bord de la Lune qui précède cette tache. On substituera au contraire la tache à la Lune, et la Lune à l'étoile, si on a observé le second bord de la Lune.

1637. L'erreur en déclinaison, ou la différence de CS à BC, peut se négliger dans les deux premiers cas (1634). Au surplus on a BC = CS × cos. PCS.

1638. Pour calculer cette équation, ainsi que la précédente, il faut connaître l'angle que forment entre eux les parallèles. Nous allons le déterminer relativement à chacune des trois causes (1634).

Appelons m le mouvement diurne de la Lune en déclinaison, pris en minutes; la formule suivante que donne De la Lande (*Astr.* 2540) fait connaître promptement, et avec l'exactitude suffisante, la valeur en minutes de *l'angle des parallèles produit par le changement de la Lune en déclinaison :*

$$\text{angle des parallèles} = \frac{\frac{1}{2}m}{\text{cos. } \textit{décl.} \text{ de la Lune}}.$$

1639. Cherchons maintenant *l'angle des parallèles produit par le changement de la parallaxe de la Lune en déclinaison.* Le seul énoncé de cette question fait naître l'idée de différentier la formule qui donne la valeur de la parallaxe en déclinaison.

Fig. 103 Soit Z le zénith, P le pôle, LU le parallèle apparent de la Lune; soit PA = PL; AU sera par conséquent le changement de la parallaxe de déclinaison. Si l'on appelle d cette parallaxe, p' la parallaxe horizontale en minutes, on a par la seconde formule (1602) convertie en infinitésimale, $d = p'$ cos. PZ sin. PU — p cos. PU sin. PZ cos. ZPU. En différentiant cette équation, et observant qu'indépendamment de p et de PZ, PL est encore une quantité constante, parce qu'ici l'on ne considère pas le mouvement de la Lune en déclinaison; on a $\partial d = p'$ cos. PU sin. PZ sin. ZPU ∂ZPU. Mais ∂ZPU = APL, ∂d = AU = AL tang. ALU = APL sin. PL tang. ALU = p' cos. PU sin. PZ sin. ZPU × APL. De cette dernière équation, en écrivant PU au lieu de PL, on déduit tang. ALU = p' cot. PU sin. PZ sin. ZPU. Et par conséquent on aura en minutes l'angle des parallèles par l'équation suivante :

$$\text{angle des parallèles} = p' \times \frac{\text{cos. } haut.\ du\ pôle \text{ sin. } ang.\ hor.\ app. \text{ de la Lune}}{\text{cot. } décl.\ appar. \text{ de la Lune}}.$$

Fig. 101 1640. Il nous reste à chercher *l'angle des parallèles produit par le changement de la réfraction.*

Soit AS le fil qu'un astre a parcouru, AE, FS la quantité de la réfraction dans les deux points A, S. Si on prend FR = AE, RS sera la différence des deux réfractions, et AR le parallèle que l'astre aurait suivi, si l'effet de la réfraction eût été uniforme et constant. L'angle cherché des parallèles est donc RAS.

1641. Comme il suffit de trouver sa valeur en minutes, j'emploierai indifféremment dans cette recherche les angles de variation (1463), ZRP, ZSP, ZAP, que je regarderai comme égaux; et prenant ZB = ZA, ce qui donne BS pour différence des hauteurs apparentes, je considérerai comme droits les angles B et C, parce que dans les cas où ce problème se présente à résoudre, ZA et PA ne diffèrent jamais assez de 90°, pour que l'erreur (1202) puisse être sensible.

1642. Je fais RS = ∂r, BS = ∂h, APR = ∂P sin. PA = cos. *décl.* = cos. D, RAS = a, ZRP = ZSP = ZAP = V.

Or tang. $a = \frac{\text{CS}}{\text{AC}} = \frac{\text{RS cos. ZSP}}{\text{AR} - \text{CR}} = \frac{\partial r \cos. V}{\partial \text{P} \cos. D - \partial r \sin. V}$; et cette dernière valeur de tang. a est celle que donne Lexell. Mais cette

formule ne me paraît pas la plus commode, parce que les tables des réfractions ne contiennent pas le rapport $\frac{\partial r}{\partial P}$, mais le rapport $\frac{\partial r}{\partial h}$.

1643. Pour employer ce dernier rapport qui me semble préférable, je considère que si des angles droits BAZ, RAP je retranche la partie commune RAZ, il reste BAR = PAZ = V. Or AR = $\frac{\text{BR}}{\sin.\text{BAR}}$: donc AR = $\frac{\partial h + \partial r}{\sin. V}$. Mais on a aussi AR = $\frac{\text{SR} \sin. \text{ASR}}{\sin. \text{RAS}}$ = $\frac{\text{SR} \cos. \text{BAS}}{\sin. \text{RAS}} = \frac{\partial r \cos. (V - a)}{\sin. a} = \partial r \cos. V \cot. a + \partial r \sin. V$. Donc $\frac{\partial h + \partial r}{\sin. V} = \partial r \cos. V \cot. a + \partial r \sin. V$; d'où l'on déduit

$$\text{tang.}\, a = \frac{\partial r \sin. V \cos. V}{\partial h + \partial r \cos.^2 V}.$$

1644. Et l'on a enfin, en négligeant le terme insensible $\partial r \cos.^2 V$,

$$\text{tang.}\, a = \frac{\partial r}{\partial h} \times \sin. V \cos. V = \frac{\partial r}{\partial h} \times \tfrac{1}{2} \sin. 2 V.$$

Au lieu de tang. a, on peut sans scrupule mettre sin. a, et substituer la valeur que donne cette formule, au lieu de *sin. ang. des parallèles* dans la formule (1635). Mais du reste il faut observer qu'en construisant cette dernière formule, nous avons supposé sans déviation le chemin apparent de l'un des deux astres, c'est-à-dire de l'étoile qu'il s'agissait de comparer à la Lune : or la réfraction influe sur le chemin apparent de l'un et de l'autre des deux astres; d'où il suit qu'*on doit prendre le double de la correction donnée par la formule* (1635). Alors, et en faisant la substitution dont je viens de parler, la formule (1635) sera la même que celle de De la Lande (*Astr.* 2545).

1645. Il est évident par la fig. 101, qu'à l'occident le changement de la réfraction rapproche les astres du pôle, et qu'à l'orient il les en éloigne. On fera donc usage de la règle que nous avons donnée (1636), en appliquant à l'astre qui passera le premier ce que nous avons dit de la Lune, et faisant la correction sur le passage du second astre.

1646. J'ai dit qu'on doit prendre *le double de la correction* (1635); c'est ce qu'il est à propos de démontrer : car Lexell, suivi

en cela par Trembley, le nie positivement dans les Mémoires de Pétersbourg pour 1774.

De la fig. 101 il est facile de conclure (1645) que dans tous les cas le fil horaire de la lunette est toujours entre le cercle horaire vrai et le vertical. Cela posé, soit NQ le fil horaire de la lunette, P le pôle, Z le zénith; RR′ le fil parcouru par le premier astre, MN le fil parcouru par le second; ZS, CA, deux verticaux; SE la réfraction de l'astre le plus bas, MA la réfraction de l'autre; enfin soient les petits arcs AB, EU perpendiculaires à PU, et le petit arc MF sensiblement perpendiculaire à CA et à ZS.

Fig. 102.

1647. On a PSN $= a$, PSZ $= V =$ PMC sensiblement, NS $=$ diff appar. *décl.*, quantité que je nommerai ∂D; SE $= r$. Je fais MA $= r'$. Par D j'entends toujours la déclinaison, mais de l'un ou de l'autre astre indifféremment. On pourra, si l'on veut, pour plus d'exactitude, employer dans le calcul la quantité moyenne entre les deux déclinaisons, et faire la même chose pour l'angle de variation V.

1648. Lors de l'observation du premier astre en S, son lieu vrai, ou dégagé de la réfraction, était en E. Donc, pour avoir son passage vrai par le cercle horaire vrai PU, il fallait ajouter à son passage apparent un intervalle de temps $\frac{\text{EU}}{15 \cos. D} = \frac{\text{SE sin. ESU}}{15 \cos. D} = \frac{r \sin. V}{15 \cos. D}$. En nommant T le temps du passage observé en S, le moment du passage dégagé de la réfraction sera donc $T + \frac{r \sin. V}{15 \cos. D}$.

1649. Lorsque le passage du second astre a été observé en N, son passage apparent sur le cercle horaire vrai avait déjà eu lieu en M. La différence en temps, entre ces deux passages, est $\frac{\text{MN}}{15 \cos. D}$ $= \frac{\text{NS tang. NSM}}{15 \cos. D} = \frac{\partial D}{15 \cos. D} \times \frac{\partial r}{\partial h} \sin. V \cos. V$, (1644). Cette différence doit se soustraire du passage observé en N, pour avoir le passage en M. Mais lorsqu'on a vu l'astre au point M, son lieu, dégagé de la réfraction, était en A. Pour qu'il atteignît le cercle horaire vrai PU, il s'en fallait donc d'un intervalle de temps $\frac{\text{AB}}{15 \cos. D}$ $= \frac{\text{AM sin. AMB}}{15 \cos. D} = \frac{r' \sin. V}{15 \cos. D}$. Donc, en appelant T' le temps du

passage observé en N, le moment du vrai passage qu'on aurait dû observer en B, sera $T' - \frac{\partial D}{15 \cos. D} \times \frac{\partial r}{\partial h} \sin. V \cos. V + \frac{r' \sin. V}{15 \cos. D}$. La différence d'ascension droite en temps, entre les deux astres, dégagée des effets de la réfraction, sera donc $T' - \frac{\sin. V}{15 \cos. D} \times \left(\frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos. V - r'\right) - T - \frac{r \sin. V}{15 \cos. D}$, ou $T' - T - \frac{\sin. V}{15 \cos. D}\left(\frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos. V + r - r'\right)$. Mais $r - r'$ est la différence de réfraction correspondante à la différence de hauteur des deux astres; de sorte que $r - r' : FS :: \partial r : \partial h$. De plus, $FS = MS \cos. V = \partial D \cos. V$, parce qu'au lieu de MS on peut sans scrupule mettre NS. La dernière analogie donne donc $r - r' = \frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos. V$. Donc l'erreur de la différence $T' - T$ des passages observés se réduit à $\frac{\partial r}{\partial h} \times \frac{2 \partial D \sin. V \cos. V}{15 \cos. D}$; ce qui est précisément le double de la formule (1635), dans laquelle on aurait d'abord substitué la valeur de sin. a prise de la formule (1644).

La fig. 102 supppose l'astre à l'orient; le résultat serait le même en supposant l'astre à l'occident.

1650. La vraie différence de déclinaison est $BU = MS - BM + SU$. En mettant NS au lieu de MS, on aura, pour la correction de la différence observée NS, $SU - BM = SE \cos. ESU - MA \cos. BMA = r \cos. V - r' \cos. V$; et prenant ci-dessus la valeur de $r - r'$, on aura $\frac{\partial r}{\partial h} \times \partial D \cos.^2 V$, pour la *correction de la différence observée de déclinaison*, correction qui dans tous les cas doit s'ajouter.

1651. Pour avoir par les tables de réfraction le rapport $\frac{\partial r}{\partial h}$, il suffit de connaître à-peu-près, par le moyen d'un globe, la hauteur moyenne entre les hauteurs des deux astres. En employant cette hauteur, on aura encore l'angle de variation avec une exactitude suffisante par la formule $\sin. V = \frac{\cos. \textit{haut. du pôle} \sin. \textit{ang. horaire}}{\cos. \textit{hauteur}}$.

1652. *Trouver le moment où le mouvement d'un astre en hauteur est le plus rapide.*

Fig. 83. Soit P le pôle, Z le zénith, RS le parallèle d'un astre. Je fais $PR = PS$; ce qui suppose que l'astre ne change point en déclinaison, parce qu'en effet ce changement, quand il a lieu, est infiniment petit pour l'intervalle d'un instant, du moins en comparaison du mouvement en hauteur. Le triangle PZR, en se convertissant en PZS, conserve donc comme constans les deux côtés PZ, PR; et par conséquent, en appelant Z l'angle PZR, R l'angle PRZ, et faisant (1304, 1305), $A = P$, $B = Z$, $C = R$, on a

$$d ZR = d P \sin. PZ \sin. Z = d P \sin. PR \sin. R.$$

D'où il suit que la plus grande valeur de $d ZR$ ou le plus grand mouvement en hauteur dans l'intervalle d'un instant $d P$, a lieu lorsque sin. Z ou sin. R est le plus grand qu'il soit possible, c'est-à-dire quand l'azimuth, ou l'angle de variation (1463), est de 90°.

1653. Ces deux angles ne peuvent être tous deux droits en même temps, si ce n'est quand RS est l'équateur (1012). Alors ils sont constans (si la déclinaison ne change pas), et par conséquent le mouvement en hauteur est uniforme.

1654. Si RS n'est pas l'équateur, PR sera ou plus grand ou plus petit que 90°; quant à PZ, il ne peut jamais excéder 90°.

Supposons d'abord $PR < 90°$; celui-là seul des deux angles Z, R, pourra être un angle droit, qui sera opposé au plus grand côté, (1095, 3°.; 1005). Donc si la déclinaison boréale de l'astre est moindre que la hauteur du pôle, le mouvement le plus rapide en hauteur aura lieu lorsque l'azimuth sera de 90°; et si la déclinaison boréale est plus grande que la hauteur du pôle, le moment du plus grand mouvement en hauteur sera celui où l'angle de variation sera de 90°.

1655. Soit maintenant $PR > 90°$. Alors ni l'un ni l'autre des angles Z, R, ne peut être droit. En effet, si on avait $Z = 90°$, on aurait $\cos. PR = \cos. PZ \cos. ZR$, (VI. 13°). Mais on a $ZR < 90°$, puisqu'ici l'on considère l'astre au-dessus de l'horizon : donc l'équation précédente donnerait une valeur positive de cos. PR; ce qui serait absurde, puisqu'on suppose $PR > 90°$. De même, si l'on avait $R = 90°$, on aurait $\cos. PZ = \cos. PR \cos. ZR$, équation qui donnerait, contre la vérité, une valeur négative de cos. PZ.

1656. Pour déterminer le moment de la plus grande valeur de sin. Z ou de sin. R, quand PR est $> 90°$; je prends l'équation (VII. 9°) qui donne $\cos. Z = \frac{\cos. PR - \cos. PZ \cos. ZR}{\sin. PZ \sin. ZR}$. Par la supposition, cos. PR est négatif; Z sera donc $> 90°$, et cet angle sera d'autant moindre, c'est-à-dire d'autant plus proche de 90°, que la valeur de cos. Z donnée par cette équation sera plus petite. Or la moindre valeur de cos. Z, pour une valeur donnée de PZ et de PR, a lieu visiblement lorsque $\cos. ZR = 0$.

En raisonnant de même sur l'équation (VII. 11°) qui dans ce cas donne positif le rectangle cos. PR cos. ZR, on trouvera que la moindre valeur de cos. R a lieu dans la même circonstance, c'est-à-dire lorsque $\cos. ZR = 0$.

Donc le mouvement le plus rapide en hauteur, des astres qui ont une déclinaison méridionale, a lieu lorsque $ZR = 90°$, c'est-à-dire au lever de l'astre.

1657. *Déduire la hauteur méridienne, des hauteurs observées près du méridien.*

Soient ZR, ZS deux distances au zénith observées peu avant ou peu après le passage de l'astre au méridien. On demande la distance ZT.

Le triangle PZS, converti en PZR, conserve comme constans les côtés PZ, et $PS = PR$. Par conséquent appelant P l'angle ZPS, on a, en faisant (1303) $A = P$, $B = Z$, $C = S$,

$$\sin. \tfrac{1}{2}\delta ZS = \sin. \tfrac{1}{2}\delta P \times \frac{\sin. PZ \sin. PS \sin. (P + \frac{1}{2}\delta P)}{\sin. (ZS + \frac{1}{2}\delta ZS)}.$$

Or δZS est la différence des deux hauteurs observées; δP est l'intervalle de temps entre les deux observations, compté en parties de l'équateur; $P + \frac{1}{2}\delta P$ et $ZS + \frac{1}{2}\delta ZS$ sont l'angle horaire moyen et la distance au zénith moyenne, entre l'une et l'autre observation. On peut donc par cette formule vérifier très-exactement la différence entre les deux hauteurs observées, et réduire successivement un nombre quelconque d'observations à une seule, en prenant le milieu entre les divers résultats.

1658. Je suppose toutes les observations réduites au point S, c'est-à-dire à l'observation la plus prochaine du méridien. Pour

Fig. 83 appliquer à cette observation la formule ci-dessus, il suffit de faire $dP = ZPS$, et $P = o$; et on a

$$\sin.\tfrac{1}{2}(ZS - ZT) = \sin.^2\tfrac{1}{2}ZPS \times \frac{\sin.PZ\ \sin.PS}{\sin.\frac{1}{2}(ZS + ZT)};$$

et quand on a $ZPS < 2^\circ$, (628),

$$ZS - ZT = \frac{(ZPS)^2}{2R''} \times \frac{\sin.PZ\ \sin.PS}{\sin.\frac{1}{2}(ZS + ZT)}:$$

équations qui font connaître ZT, ou la distance au zénith, que l'on cherche.

1659. Ces équations et la formule (1657) m'ont paru très-commodes pour conclure, avec une grande exactitude, de plusieurs observations, la hauteur méridienne du soleil dans les jours voisins du solstice. Je prenais ordinairement six hauteurs d'un bord avant le midi, et six du bord opposé après le midi; ce qui de plus me faisait connaître avec grande précision le diamètre du Soleil tel que la lunette le donnait. D'autres observations ou la marche réglée de la pendule m'apprenant le moment juste du midi vrai, j'avais les angles horaires correspondans à chacune des observations. J'employais enfin dans le calcul du second membre des équations ci-dessus, la déclinaison et la distance au zénith du bord observé, en négligeant les secondes.

1660. *Réduire au solstice une hauteur méridienne du Soleil, observée dans un jour voisin du solstice.*

Fig. C1. Soit BD un quart de l'écliptique, BE un quart de l'équateur, AC la déclinaison du Soleil observée. On cherche la différence de AC à DE.

Le triangle BAC, rectangle en A, en se changeant en BED, rectangle en E, conserve deux angles constans, savoir l'angle droit et l'angle B. On a donc (1323), $\text{tang.}\tfrac{1}{2}dAC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}dBC :: \text{tang.}(AC + \tfrac{1}{2}dAC) : \text{tang.}(BC + \tfrac{1}{2}dBC)$. Mais $BC + \tfrac{1}{2}dBC = BC + \tfrac{1}{2}CD = BD - \tfrac{1}{2}CD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}CD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}dBC$; donc $\text{tang.}(BC + \tfrac{1}{2}dBC) = \cot.\tfrac{1}{2}dBC$; donc alors $\text{tang.}\tfrac{1}{2}dAC = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}dBC\ \text{tang.}(AC + \tfrac{1}{2}dAC)$. Mais dAC n'étant que de quelques secondes, ou même encore étant de quelques minutes, on peut (628) supposer $\text{tang.}\tfrac{1}{2}dAC = \frac{dAC}{2R''}$. Par conséquent dAC

$= 2\,R'\,\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\delta\,BC\ \text{tang.}\,(AC + \tfrac{1}{2}\,\delta\,AC)$. Maintenant appelons D la déclinaison du Soleil observée; δD la différence de cette déclinaison à la déclinaison solstitiale; et δL la distance du Soleil au solstice, en longitude; et nous aurons enfin

$$\delta D = 2R'\ \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\delta L\ \text{tang.}\,(D + \tfrac{1}{2}\,\delta D).$$

Cette formule, où l'on doit faire $\tfrac{1}{2}\delta D$ négatif dans les observations postérieures au solstice, sera d'un usage très-exact pour dix et même douze jours avant et après le solstice; et elle est très-préférable à la proportion entre les changemens de déclinaison et les quarrés des temps, proportion dont on ne peut se servir que pour quelques heures.

1661. *Ayant trois hauteurs d'un astre, et connaissant le temps où chacune de ces hauteurs a été observée, trouver l'angle horaire et la déclinaison de l'astre, et la hauteur du pôle.*

Ce problème, dont la solution est assez pénible par les méthodes employées jusqu'à présent, se résout immédiatement par mes analogies différentielles finies.

Soient A', A'', A''' les trois hauteurs observées, A' étant la plus petite, A''' la plus grande. Soit T l'intervalle de temps, réduit en parties de l'équateur, entre les observations des deux moindres hauteurs A', A''; T' l'intervalle de temps entre les observations des deux plus grandes A'', A'''; O''' *l'angle horaire* correspondant à la plus grande hauteur A''', L *la latitude terrestre*, D *la déclinaison de l'astre.*

1662. En comparant la 1e et la 3e observation, la formule (1657) donne $\sin.\tfrac{1}{2}(A''' - A') : \sin.\tfrac{1}{2}(T + T') :: \cos. L \cos. D \sin.(O''' + \tfrac{1}{2}T + \tfrac{1}{2}T') : \cos.\tfrac{1}{2}(A''' + A')$, et, en comparant les observations des deux plus grandes hauteurs, $\sin.\tfrac{1}{2}(A''' - A'') : \sin.\tfrac{1}{2}T' :: \cos. L \cos. D \sin.(O''' + \tfrac{1}{2}T') : \cos.\tfrac{1}{2}(A''' + A'')$. Donc $\cos. L \cos. D = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A')}{\sin.\frac{1}{2}(T + T'')\sin.(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T'')} = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\sin.\frac{1}{2}T''\sin(O''' + \frac{1}{2}T'')}$. Mais $\sin.(O''' + \tfrac{1}{2}T + \tfrac{1}{2}T') = \sin.(O''' + \tfrac{1}{2}T')\cos.\tfrac{1}{2}T + \cos.(O''' + \tfrac{1}{2}T')\sin.\tfrac{1}{2}T$. En substituant cette valeur dans l'équation précédente, et multipliant cette équation par $\sin.(O''' + \tfrac{1}{2}T')$, on en déduit

$$\cot.(O''+\tfrac{1}{2}T')=\cot.\tfrac{1}{2}T\left(\frac{\sin.\frac{1}{2}(A''-A')\cos.\frac{1}{2}(A''+A')\sin.\frac{1}{2}T'}{\sin.\frac{1}{2}(A''-A'')\cos.\frac{1}{2}(A''+A'')\sin.\frac{1}{2}(T+T')\cos.\frac{1}{2}T}-1\right);$$

équation qui fait connaître l'angle horaire, puisque O'' est la seule quantité inconnue.

1663. Maintenant, faisons, pour abréger, ...

Fig. 83. $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A''-A'')\cos.\frac{1}{2}(A''+A'')}{\sin.\frac{1}{2}T'\sin.(O''+\frac{1}{2}T')}=m$; nous aurons $\cos. L \cos. D = m$. Mais $\cos. L \cos. D = \sin. PZ \sin. PS = \frac{\cos. ZS - \cos. PZ \cos. PS}{\cos. ZPS}$, (VII. 7°), $= \frac{\sin. A'' - \sin. L \sin. D}{\cos. O''} = m$. Donc $\sin. L \sin. D = \sin. A'' - m \cos. O''$. La somme et la différence de cette équation et de l'équation $\cos. L \cos. D = m$ donneront (II. 4°, 3°)

$$\cos.(L \backsim D) = \sin. A'' + m(1 - \cos. O'')$$
$$\cos.(L + D) = m(1 + \cos. O'') - \sin. A'',$$

ou, (I. 7°, 24°), pour employer les logarithmes plus commodément,

$$\cos.(L \backsim D) = \sin. A''\left(1 + \frac{2m \sin.^2 \frac{1}{2} O''}{\sin. A''}\right)$$
$$\cos.(L + D) = \sin. A''\left(\frac{2m \cos.^2 \frac{1}{2} O''}{\sin. A''} - 1\right).$$

Au moyen de ces deux équations, on aura les valeurs absolues de L et de D, c'est-à-dire de la latitude et de la déclinaison. Il est vrai qu'il faut savoir d'ailleurs quelle est la plus grande de ces deux quantités; mais il est bien rare qu'on ne le sache pas d'avance.

1664. Les équations suivantes, déduites de celles que nous venons de donner, par les méthodes exposées (431, 426), rendent le calcul de cette solution prompt et facile, et n'exigent que des tables trigonométriques en logarithmes.

$$n = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''-A'')\cos.\frac{1}{2}(A''+A'')}{\sin.\frac{1}{2}T'}$$
$$\cos. x = \sqrt{\frac{n \cos.\frac{1}{2}T \sin.\frac{1}{2}(T+T')}{\sin.\frac{1}{2}(A''-A')\cos.\frac{1}{2}(A''+A')}}$$
$$\text{tang.}(O''+\tfrac{1}{2}T') = \text{tang.}\tfrac{1}{2}T \cot.^2 x$$
$$m = \frac{n}{\sin.(O''+\frac{1}{2}T')}$$

$$\text{tang. } y = \text{sin. } \tfrac{1}{2}\, O'' \sqrt{\frac{2m}{\text{sin. } A''}}$$

$$\text{cos. } z = \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, O'' \text{ cot. } y$$

$$\text{cos. } (L \backsim D) = \frac{\text{sin. } A''}{\text{cos.}^2 y}$$

$$\text{cos. } (L + D) = \text{sin. } A'' \text{ tang.}^2 z.$$

1665. Il est facile de reconnaître que plus les intervalles seront grands entre les observations successives, plus on aura d'exactitude dans les résultats ; car il est clair que les erreurs commises dans les observations seront d'autant plus sensibles dans le calcul, que les sinus de $\frac{1}{2}$ (A'' — A') et de $\frac{1}{2}$ T' seront plus petits, et que cot. $\frac{1}{2}$ T sera plus grande.

Cette solution est analogue à celle de Bezout; mais la démonstration en est moins pénible : et quant au calcul numérique, mes formules exigent la recherche de 21 logarithmes, celles de Bezout la recherche de 27. Toutes les solutions qui me sont connues jusqu'à présent demandent encore plus de travail.

1666. *Connaissant la déclinaison et deux hauteurs d'un astre, et les momens des observations des hauteurs, trouver l'angle horaire de l'astre et la hauteur du pôle.*

Dans le triangle isoscèle SPR, les côtés et l'angle vertical étant connus, on trouvera la base RS et les angles sur la base. Dans le triangle RSZ, connaissant les trois côtés, on cherchera l'un des angles adjacens à RS, par exemple ZSR. On aura alors ZSP ou (ZSR — PSR). Enfin dans le triangle PZS, connaissant ZS et PS, et l'angle compris, on trouvera PZ et l'angle ZPS.

Si on connaissait la hauteur du pôle, et qu'on cherchât la déclinaison de l'astre, on suivrait la même méthode; mais on écrirait Z au lieu de R et de S, et S au lieu de Z.

1667 Ce problème sert aussi à déterminer la latitude en mer, en observant au même moment les hauteurs de deux astres dont on connaît l'ascension droite et la déclinaison. Si l'on n'observe qu'un astre, ou que les observations soient faites en des momens différens, il faut tenir compte du chemin parcouru dans l'intervalle par le bâtiment, et réduire les hauteurs à un même instant et à un même zénith.

Fig. 83. 1668. *Ayant la hauteur du pôle, la déclinaison et deux hauteurs d'un astre, et les momens des observations des hauteurs, trouver l'angle horaire de l'astre.*

La formule (1657) donne $\sin.(ZPS + \frac{1}{2} SPR) = \ldots\ldots$ $\frac{\sin.\frac{1}{2}(ZR - ZS) \sin.\frac{1}{2}(ZR + ZS)}{\sin.\frac{1}{2} SPR \sin. PZ \sin. PS}$. Cette formule est celle de M. Douwes, le numérateur se réduisant (II. 24°) à $\frac{1}{2}\cos. ZS - \frac{1}{2}\cos. ZR$, ou à la demi-différence des sinus des deux hauteurs.

1669. Si les observations ont été faites près du méridien, il suffit de connaître la latitude terrestre à quelques degrés près; l'erreur sur cet élément influe peu sur l'angle horaire en pareil cas, sin. PZ étant toujours beaucoup plus grand que $\sin.(ZPS + \frac{1}{2}SPR)$. Au surplus, après avoir déterminé à-peu-près la valeur de l'angle horaire, on pourra l'employer dans la solution (VIII. 3°) pour chercher et connaître plus exactement la latitude, avec laquelle on calculera une seconde fois la formule précédente, qui alors donnera l'angle horaire avec plus de précision.

On voit que les hauteurs prises dans le voisinage du méridien sont très-propres à déterminer la latitude terrestre quand la déclinaison de l'astre est bien connue, et réciproquement à déterminer la déclinaison quand la latitude est bien connue.

1670. En répétant les calculs, comme nous venons de le dire, on peut obtenir de cette solution toute l'exactitude à laquelle les observations permettent d'aspirer : aussi est-elle très-supérieure à la méthode de La Caille (*Traité de Navigation de Bouguer*) fondée sur la variation des distances au zénith, proportionnelle aux quarrés des angles horaires. Cette méthode est sujette à des erreurs considérables, ainsi que l'a démontré d'Alembert (*Opusc. mathém.* Tom. IV, pag. 357).

1671. *Connaissant trois longitudes et trois latitudes héliocentriques ou sélénocentriques d'une tache, trouver l'inclinaison de l'équateur solaire ou lunaire sur l'écliptique, le lieu des nœuds de cet équateur, et la distance de la tache au pôle de rotation.*

Mes analogies différentielles finies donnent de ce problème une solution immédiate, beaucoup plus simple et plus facile que celles qu'on en a trouvées jusqu'à présent.

Soit E le point du globe solaire ou lunaire qui correspond au pôle de l'écliptique; P le pôle de rotation de l'astre, T, A, C les trois lieux de la tache observés. Fig. 103

Les trois distances TE, AE, CE de la tache au pôle de l'écliptique, et les différences de longitude, TEA, AEC, sont données par l'observation.

On cherche PE, distance des deux pôles, la longitude du pôle P qui est à 90° de celle des nœuds, et la distance $TP = AP = CP$ de la tache au même pôle, en la supposant adhérente au disque de l'astre, et dans une même situation pendant l'intervalle des observations.

1672. Je décris trois arcs de grand cercle, TA, AC, TC : j'observe que le triangle PET converti en PEA conserve comme constans les côtés PE, PT; ce qui me donne, en faisant dans l'analogie (1293), $A = P$, $B = E$, $C = T$,

$$-\sin.\tfrac{1}{2}\delta ET : \text{tang}.\tfrac{1}{2}\delta PET :: \sin.(ET+\tfrac{1}{2}\delta ET) : \cot.(PTE+\tfrac{1}{2}\delta PTE).$$

1673. Mais $\delta ET = EA - ET$, $\delta PET = TEA$, $(ET + \tfrac{1}{2}\delta ET) = \tfrac{1}{2}(ET+EA)$, et $PTE + \tfrac{1}{2}\delta PTE = \tfrac{1}{2}(PTE + PAE)$. Donc, en écrivant $ET - EA$, pour faire disparaître le signe négatif du premier sinus (75), on a

$$\sin.\tfrac{1}{2}(ET-EA) : \text{tang}.\tfrac{1}{2}TEA :: \sin.\tfrac{1}{2}(ET+EA) : \cot.\tfrac{1}{2}(PTE+PAE).$$

Dans cette analogie tout est connu, à l'exception du dernier terme. Mais la considération du triangle TPE converti en CPE, fournira de même une analogie qui donnera la valeur de $\cot.\tfrac{1}{2}(PTE+PCE)$; et le triangle APE converti en CPE conduira à une analogie qui donnera la valeur de $\cot.\tfrac{1}{2}(PAE+PCE)$. Connaissant par ces trois analogies les demi-sommes des trois angles de position PTE, PAE, PCE, pris deux à deux, on en déduira la valeur de chacun de ces angles.

1674. Maintenant, l'un quelconque des trois triangles que nous venons de considérer, par exemple le triangle PCE converti en PAE, nous donnera (1288)

$$\text{tang}.\tfrac{1}{2}\delta PEC : \text{tang}.\tfrac{1}{2}\delta PCE :: \text{tang}.(PEC+\tfrac{1}{2}\delta PEC) : \text{tang}.(PCE+\tfrac{1}{2}\delta PCE);$$

Fig. 103 ou (1404),

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{CEA} : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{PAE}-\text{PCE}) :: \text{tang.}(\text{PEC}+\tfrac{1}{2}\text{CEA}) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{PAE}+\text{PCE}).$$

Le troisième terme de cette analogie est le seul inconnu; elle donnera donc la valeur de l'angle PEC, et par conséquent la longitude cherchée du pôle P.

1675. Alors connaissant un côté et les angles adjacens dans l'un quelconque des triangles PEC, PEA, PET, connaissant, par exemple, dans le premier, CE, PEC, PCE, on trouvera à-la-fois, par l'élégante solution de Neper (IX. 4°), les deux côtés cherchés PE, PC.

1676. On n'a que 21 logarithmes à chercher pour résoudre de cette manière le problème dont nous venons de nous occuper. La solution du P. Pezenas, l'une des moins pénibles de celles qu'on a données jusqu'à présent, demande 46 recherches dans deux tables. J'observe de plus que ma méthode a l'avantage de donner dans le calcul la plus grande précision, attendu qu'on détermine toutes les inconnues par les tangentes.

1677. La solution qu'on vient de lire, premier essai de mes études en astronomie, se trouve dans le Tome X des Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris : j'y donne en même temps des règles relatives au cas où le cercle des limites se trouve entre les longitudes observées. Mais si l'on suit exactement les règles des signes, (73, 75), on peut faire usage, dans tous les cas, des analogies ci-dessus, sans qu'il soit besoin ni de figure ni d'aucune attention à la situation du cercle des limites.

Voici le détail du calcul réduit à la simplicité et à la généralité la plus grande.

1678. Soit L′ la première longitude observée de la tache, L″ la seconde, L‴ la troisième; D′, D″, D‴ les trois distances respectives au pôle de l'écliptique; *L* la longitude cherchée du pôle de l'équateur de l'astre; *O* l'obliquité de l'écliptique relativement à cet équateur; *D* la distance de la tache à ce pôle.

$$\text{tang. } a = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(D' - D'') \text{ cot. } \frac{1}{2}(L'' - L')}{\text{sin. } \frac{1}{2}(D' + D'')}$$

$$\text{tang. } b = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(D' - D''') \text{ cot. } \frac{1}{2}(L''' - L')}{\text{sin. } \frac{1}{2}(D' + D''')}$$

$$\text{tang. } c = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(D'' - D''') \text{ cot. } \frac{1}{2}(L''' - L'')}{\text{sin. } \frac{1}{2}(D'' + D''')}$$

$$\text{tang. } x = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(L''' - L'') \text{ tang. } c \text{ cot.}(a - b)$$

$$L = x + \tfrac{1}{2}(L''' + L'')$$

$$m = L \backsim L''' \qquad n = (b + c) \backsim a$$

Si m est $> 180°$, on prendra $360° - m$, au lieu de m. De même, si n est $> 180°$, on prendra $360° - n$, au lieu de n.

$$\text{tang. } y = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} D''' \text{ sin. } \frac{1}{2}(m \backsim n)}{\text{sin. } \frac{1}{2}(m + n)}$$

$$\text{tang. } z = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} D''' \text{ cos. } \frac{1}{2}(m \backsim n)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(m + n)}$$

$$O = z \backsim y \qquad D = z + y.$$

Mais si n est $> 90°$, alors

$$O = 180° - (z + y) \qquad D = 180° - (z \backsim y).$$

1679. Dans le Tom. VIII des Mémoires de la *Société Italienne*; j'ai soigneusement indiqué diverses remarques importantes, sans lesquelles les observations et les calculs préliminaires conduisent fort loin de la vérité dans la recherche des élémens de la rotation solaire ou lunaire.

CHAPITRE XXIV.

Des Projections, et des Planisphères géographiques et astronomiques.

LA Trigonométrie est d'une grande utilité pour la construction des planisphères et pour toute espèce de projections; et nous croyons ne pas devoir terminer cet Ouvrage sans donner au moins une idée de cette application importante de la science dont nous traitons.

1680. On entend par la *projection* d'un objet, la représentation ou l'apparence de cet objet sur le plan de perspective. Si des différens points d'une figure on tire des lignes, suivant une même loi donnée, sur un plan donné autre que celui dans lequel est la figure, les points de ce plan donné auxquels aboutiront ces lignes, formeront la projection de la figure. Les cartes célestes et géographiques, par exemple, ne peuvent être que des projections, puisqu'elles ont pour but de représenter une surface sphérique sur la surface plane du papier, c'est-à-dire de réduire à un seul plan tous les points d'une surface sphérique, lesquels appartiennent, dans cette surface, à une infinité de plans différens.

1681. De ces notions il résulte que l'art des projections n'est pas sans difficulté. Il est d'ailleurs impossible de conserver avec exactitude sur une carte géographique les distances respectives des pays, et de donner aux degrés de longitude et de latitude les grandeurs relatives qu'ils ont sur le globe : on ne peut que se rapprocher plus ou moins de la vérité.

1682. Dans les anciennes cartes on faisait les méridiens parallèles entre eux, et les degrés de longitude tous égaux. Ces cartes se nomment

cartes plates : elles sont absolument défectueuses, si ce n'est pour une très-petite étendue. En effet, soit P le pôle de la Terre, EQ Fig. 102 un arc de l'équateur, de 12° par exemple. Soit A la ville de Paris, D celle de Dublin, M celle de Maroc. Je suppose ces deux dernières villes sous le même méridien, leur différence en longitude étant très-petite et peut-être nulle ; car la longitude de Maroc n'est pas encore déterminée avec précision. Au lieu de faire sur la carte les méridiens PE, PQ convergens, de sorte qu'ils aillent se rencontrer au pôle, conformément à leur position sur le globe et à la vérité, si on les décrit parallèlement, comme FQ, GE, Paris se trouvera sur la carte au point H, Dublin en K, et Maroc en L. C'en est assez pour faire comprendre combien, dans les cartes de cette espèce, on peut errer sur les distances réciproques.

1683. Il est à propos de remarquer avant tout, que les degrés de longitude diffèrent de grandeur sur le globe, suivant les distances au pôle. L'arc de parallèle AR est (985) du même nombre de degrés que l'arc EQ : mais la longueur de AR comparée à celle de EQ, est d'autant moindre que AR est plus voisin du pôle ; parce que la longueur des degrés de longitude diminue (983) en proportion du sinus de leur distance au pôle.

1684. Pour remédier aux inconvéniens et aux difficultés que j'ai exposés, et pour approcher de la vérité dans la construction des cartes géographiques et célestes, on a eu recours à différentes sortes de projections.

La projection la plus simple est celle qu'on nomme *orthographique*. Elle est fondée sur cette loi, que les lignes tirées des divers points de la figure dont on demande la projection, doivent tomber à angle droit sur le plan de projection. Pour avoir, par exemple, la projection orthographique d'une ligne AB sur un plan repré- Fig. 103 senté par la ligne PI, on mènera des différens points de AB les lignes BC, FH, etc. perpendiculaires à PI : la partie AC de la ligne PI, comprise entre les perpendiculaires, sera la projection de AB. Quelque distante du plan de projection que soit la ligne AB, les perpendiculaires BE, FG, etc. donneront de même sur un plan NO la projection DE = AC de la ligne AB. Mais DE ou AC = AB cos. A, (530). Donc *la projection orthographique d'une ligne est*

égale à cette ligne multipliée par le cosinus de son angle d'inclinaison sur le plan de projection.

1685. Si la figure dont on demande la projection est un arc de cercle, et si le plan de l'arc est perpendiculaire au plan de projection, alors le *sinus est la projection orthographique de l'arc*, pourvu que l'origine de cet arc soit le point de circonférence duquel part celle des perpendiculaires qui passe par le centre. Concevons que le demi-cercle DFH soit élevé perpendiculairement sur le plan du papier, le diamètre DH restant seul dans ce même plan. Si l'on abaisse, de tous les points de la circonférence, les perpendiculaires FC, IE, etc., la suite des points auxquels elles aboutiront sur le plan du papier, formera le diamètre DH. Or si le point C est le centre, l'arc FH sera de 90°, et sa projection CH sera égale au rayon, c'est-à-dire au sinus de 90°. De même CE = LI = sin. FI sera la projection de l'arc FI. Donc, etc.

Fig 106

1686. Si le plan du cercle, au lieu d'être perpendiculaire, est incliné au plan de projection; alors les ordonnées FC, IE, etc. qui tombent sur celui des diamètres qui est dans le plan de projection, feront toutes avec leurs projections (1684) respectives CG, EK, etc., un angle égal à l'inclinaison des deux plans, (976). On aura donc (1684), cos. *incl.* $= \frac{CG}{FC} = \frac{EK}{EI}$, etc.; et par conséquent FC : CG :: EI : EK :: etc. Mais une des propriétés de l'ellipse, c'est que ses ordonnées sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes du cercle dont le diamètre est égal à son grand axe. Donc DGKH, ou la projection du demi-cercle DFH, est une demi-ellipse. Mais ce qui se démontre pour une moitié se prouverait de même pour l'autre moitié. *La projection orthographique d'un cercle incliné est donc une ellipse.*

1687. Quelle que soit la distance du cercle au plan de projection, l'effet sera toujours le même. Car on peut toujours concevoir un autre plan parallèle et passant par le centre du cercle, sur lequel plan la projection sera une ellipse, comme nous venons de le voir; or la projection sur ce plan ne peut différer en rien de la projection sur le plan donné : les lignes qui détermineront l'une et l'autre différeront seulement en longueur.

1688. *Un cercle vu obliquement et de quelque distance paraît donc être une ellipse*, parce que les objets inclinés et éloignés se représentent à nos yeux suivant la projection orthographique, c'est-à-dire comme s'ils étaient dans un plan perpendiculaire aux rayons visuels. La ligne BC vue obliquement d'un point O, à une distance telle que l'angle O puisse se considérer comme infiniment petit, paraîtra de la grandeur de $AB = BC \cos. ABC = BC \sin. C$. La première de ces deux valeurs de AB est celle déjà trouvée (1684). La seconde fait voir que la grandeur apparente d'un objet incliné diminue proportionnellement au sinus de l'inclinaison de cet objet au rayon visuel. Si donc on suppose que DGH soit la projection orthographique d'un demi-cercle DFH vu obliquement, toutes les ordonnées CF, EI paraîtront diminuées dans la proportion que nous venons d'indiquer. Ce rapport constant démontre encore que la projection d'un cercle incliné est une ellipse dont le grand axe DH est égal au diamètre du cercle, et dont le petit axe est moindre que ce diamètre suivant le rapport inverse du sinus total au sinus de l'angle d'inclinaison du cercle sur le rayon visuel. Fig. 107 Fig. 108

1689. Tels sont les élémens de la projection orthographique, projection peu en usage pour les cartes géographiques, parce qu'elle donne lieu nécessairement à des erreurs très-graves, lorsque les cartes ont de l'étendue. La différence d'un petit arc FI à sa projection CE est peu importante, et dès-lors la distance FI de deux villes F, I sur le globe terrestre, peut sans une erreur sensible être représentée sur la carte par la distance CE. Mais plus le point I se rapprocherait du point H, plus les accroissemens de l'arc FI surpasseraient les accroissemens correspondans de CE, et les erreurs sur les distances respectives des lieux en deviendraient d'autant plus considérables. Supposons $IH = 60° = 2 FI$: alors CE ou $LI = \sin. 30° = \frac{1}{2} CH$. Donc $CE = EH$; et par conséquent les distances IH, FI, dont la première est double de la seconde sur le globe, seront représentées sur la carte par des lignes égales. Fig. 108

1690. Quelque grave que soit cet inconvénient, les Astronomes se servent utilement de la projection orthographique pour représenter et prédire les circonstances des éclipses, parce que dans ce cas il ne s'agit pas des distances respectives des lieux, mais seule-

ment de décrire sur une carte géographique les courbes et les zônes qui comprennent à-peu-près soit les contrées qui seront plongées dans l'ombre, soit les lieux d'où l'on pourra voir ou les mêmes phases, ou des phases différentes entre elles. Les principes de ces opérations astronomiques n'appartiennent point à ce Traité : on les trouvera exposés avec tous les détails, toute la clarté qu'on peut desirer, dans le Livre X de l'Astronomie de De la Lande.

1691. La projection la plus commode pour les cartes qui embrassent une grande partie du globe, et surtout pour les mappemondes, celle qui défigure le moins la forme naturelle des continens, c'est la projection *stéréographique*. Dans la projection orthographique, la surface d'une demi-sphère, par exemple, est représentée sur le plan du grand cercle qui lui sert de base, et auquel tous les rayons visuels sont censés être perpendiculaires, parce qu'on suppose l'œil à une distance infinie de ce plan : dans la projection stéréographique, la même surface est représentée sur le plan du même cercle, mais en supposant l'œil au pôle de ce cercle ; ensorte qu'un seul rayon visuel, celui qui passe par le centre, est perpendiculaire au cercle.

Fig. 109 1692. Si BFD représente l'hémisphère dont on veut avoir la projection, le diamètre BD représentera le plan de projection, et l'œil sera supposé au point Q, en supposant le rayon CQ perpendiculaire à BD et le centre du globe au point C. La projection de chaque point de la surface de l'hémisphère BFD sera sur le point respectif du plan BCD, par lequel passe le rayon visuel partant du point Q et terminé à la surface de l'hémisphère. Par exemple, le point S est la projection du point H, le point T celle du point U, la ligne ST celle de l'arc HU, et ainsi de suite. Prenons l'origine des arcs au point F dont la projection est au centre; comme $CT = \text{tang.}\, CQT = \text{tang.}\, \frac{1}{2} FU$, il s'ensuit que la *projection stéréographique d'un arc commençant au point dont la projection est au centre, est égale à la tangente de la moitié de cet arc.*

1693. La plus belle propriété de la projection stéréographique est de représenter par des cercles tous les cercles de la sphère, grands ou petits, à l'exception de ceux dans le plan desquels l'œil se trouve (1696, 1706, etc.). Par exemple, le cercle qui a pour

diamètre la corde UH, a pour projection un cercle dont ST est le diamètre. Pour bien comprendre cette assertion, il faut d'abord considérer que les rayons visuels qui vont du point Q à chaque point du cercle ayant pour diamètre la corde UH, forment un cône que coupe le plan BCD de projection. Cela posé, il s'agit de prouver que la section représentée par ST est un cercle.

Or l'angle QST $= \frac{1}{2}$ DQ $+ \frac{1}{2}$ BH $= \frac{1}{2}$ BQ $+ \frac{1}{2}$ BH $= \frac{1}{2}$ QH $=$ QUH. Donc les triangles QST, QUH, qui ont l'angle Q commun, sont semblables. Mais QUH est le triangle par l'axe du cône ayant pour base le cercle auquel appartient la droite UH comme diamètre : donc aussi la base du cône dont le triangle par l'axe est QST, doit être circulaire ; puisque ces deux cônes sont semblables, ayant leurs dimensions homologues proportionnelles, ou, ce qui revient au même, leurs triangles par l'axe étant semblables entre eux.

1694. Si Q est l'un des pôles de la Terre, le plan de projection BCD sera l'équateur. Alors les projections des parallèles sont des cercles concentriques, celles des méridiens sont des lignes droites.

En effet, 1°. que l'on prenne FG $=$ FU ; la projection du parallèle qui passe par les points G, U sera, comme nous venons de le voir, un cercle décrit du centre C et d'un rayon CT $=$ CE. De même la projection du parallèle qui passe par les points K, H, en supposant FK $=$ FH, sera un cercle qui aura CS pour rayon et C pour centre. On voit que le point C, projection du pôle F, est le centre de tous les cercles qui sont les projections des parallèles de l'équateur.

1695. Pour décrire un parallèle sur le plan de projection, on prendra donc pour rayon (1692) la tangente de la demi-distance du parallèle au pôle : ou pour décrire graphiquement les parallèles de degré en degré, ou de cinq en cinq degrés, etc., on divisera le quart de cercle BF en 90 parties, ou en 18 parties, etc. ; par chaque division on mènera une droite au point Q, et les intersections de ces lignes sur BD donneront les points T, S, etc., et par conséquent les rayons CT, CS, etc. des projections respectives des parallèles.

1696. 2°. J'ai dit (1694) que les projections des méridiens sont

Fig. 109 des lignes droites. En effet, puisqu'on suppose l'œil à l'un des pôles, il est dans le plan de tout méridien, le pôle étant un point commun à tous les méridiens. L'œil ne peut donc appercevoir la courbure de ces cercles.

1697. Pour décrire les projections des méridiens, que l'on considère BFDQB comme représentant l'équateur ou le plan de projection. Chacun des diamètres de ce cercle dont le centre C est la projection de l'un des pôles, sera la projection de l'un des méridiens.

1698. Les méridiens et les parallèles décrits, plus de difficulté pour placer les villes ou les étoiles sur un planisphère terrestre ou céleste, selon leurs longitudes et latitudes respectives.

C'est de cette projection *polaire* que Ptolomée a fait usage pour la construction de son Astrolabe, et Robert de Vaugondy pour certaines cartes de la Russie. Elle est adoptée dans les planisphères célestes plus que dans les planisphères terrestres; on s'en sert surtout pour les cartes qui renferment la moitié du Ciel.

1699. Mais cherchons d'une manière générale la projection stéréographique d'un grand cercle, en démontrant le théorème suivant, donné pour la première fois dans la précédente édition de ce Traité.

Dans la projection stéréographique de la sphère, tout grand cercle a pour rayon de projection la sécante de son inclinaison sur le plan de projection.

Représentons le plan de projection par la droite BD; et soit RU le diamètre du grand cercle, de la projection duquel on cherche le rayon. L'inclinaison de ce cercle sur le plan de projection sera BCU, et le diamètre de ce même cercle dans le même plan sera PT. Mais $PT = CT + CP = \text{tang. } CQT + \text{tang. } CQP =$ $\text{tang.} \frac{1}{2} FU + \text{tang.} \frac{1}{2} FR = \text{tang.} \frac{1}{2} FU + \text{cot.} \frac{1}{2} FU = \frac{2}{\text{sin. } FU}$, (I. 9°).
Donc $\frac{1}{2} PT = \text{coséc. } FU = \text{séc. } BU$; ce que j'avais à démontrer.

1700. Ainsi, pour décrire l'écliptique, par exemple, dans la projection polaire, soit BFDQB l'équateur ou le plan de projection, et soient Q, F les points marqués 0° et 180°, c'est-à-dire

ceux où l'écliptique doit couper l'équateur. Si on prend pour centre chacun de ces points successivement, et pour rayon la sécante de l'obliquité, il sera facile de trouver le point m, qui est le centre de l'écliptique qu'il s'agit de décrire.

1701. On raisonnera de la même manière, lorsqu'on voudra tracer sur un planisphère céleste la projection de l'horizon d'un lieu quelconque de la Terre. Soient, par exemple, RU le diamètre de cet horizon, Q et F les pôles de l'équateur, BFDQB le méridien du lieu dont il s'agit; QR ou FU sera la hauteur du pôle ou la latitude de ce lieu. Le rayon du cercle destiné à représenter l'horizon, sera donc la cosécante de la latitude. Ce cercle se fait ordinairement en carton, et sert à déterminer sur les planisphères mobiles le lever et le coucher des astres.

1702. La projection polaire, dont nous venons de donner une idée, est de toutes la plus facile. Mais la plus usitée, surtout pour les mappemondes, est celle qui suppose l'œil dans l'équateur, au point de 270° si l'on veut décrire notre hémisphère; et au point de 90°, s'il est question de décrire l'hémisphère opposé.

1703. Dans cette projection, que je nommerai *équatoriale*, les méridiens sont des cercles ainsi que les parallèles, et leurs rayons sur le plan de projection se déterminent comme il suit.

Soit BFDQB l'équateur, D le point duquel on commence à compter les longitudes terrestres, Q le point de 90° où l'on suppose l'œil placé, et UR le diamètre d'un méridien dont la longitude est DR, et dont on cherche la projection sur le plan représenté par la ligne BD, qui dans ce cas est le plan du premier méridien. On a DR = BU : donc (1699), *dans la projection équatoriale, le rayon d'un méridien est égal à la sécante de la longitude de ce méridien.*

Tout méridien passant par les pôles, il sera toujours facile de trouver sur la carte, de la manière indiquée (1700), le centre d'un méridien quelconque.

1704. Pour trouver la projection des parallèles; soit représenté par la ligne QF le plan de l'équateur, l'œil étant toujours supposé au point Q, à 90° de longitude. Le plan de projection BCD sera

Fig. 109 encore le premier méridien; mais dans la supposition actuelle; B, D seront les pôles de la Terre. Les diamètres des parallèles seront des lignes telles que GR, perpendiculaires à BD. Or la projection stéréographique de GR est PE = CP — CE = tang. $\frac{1}{2}$FR — tang. $\frac{1}{2}$ FG. Mais FR = 180° — QR = 180° — FG, et FG est la latitude du parallèle dont GR est le diamètre. Donc PE = cot. $\frac{1}{2}$ *lat.* — tang $\frac{1}{2}$ *lat.* = 2 cot. *lat.*, (I. 38°). Ainsi, *dans la projection équatoriale, le rayon d'un parallèle est égal à la cotangente de la latitude de ce parallèle.*

Cette règle jointe à la précédente dispense les Géographes de tout calcul. L'une et l'autre sont plus simples que celles qu'on avait données jusqu'à la première édition de ce Traité.

Il y a toujours sur la circonférence du premier méridien deux points par lesquels passe un parallèle quelconque : de sorte que connaissant le rayon d'un parallèle, il sera toujours facile d'en déterminer le centre sur le plan de projection.

1705. Si on veut tracer sur une mappemonde la projection d'un horizon, il suffit de déterminer l'inclinaison de cet horizon sur le premier méridien, (1699). Or soit P le pôle, PH son élévation sur l'horizon proposé MH, PM le premier méridien, et par conséquent l'angle P la longitude du lieu dont on veut projeter l'horizon : l'angle M sera l'inclinaison cherchée. Or dans le triangle PMH rectangle en H, on a (VI. 12°), cos. M = sin. P cos. PH, ou cos. *incl.* = sin. *long.* cos. *lat.* = $\frac{1}{2}$ sin. (*long.* + *lat.*) + $\frac{1}{2}$ sin. (*long.* — *lat.*), (II. 15°). Nous verrons (1709) un exemple de cette projection.

Fig. 110

1706. Pour faire voir combien les règles précédentes sont commodes dans les applications; soit AFR le premier méridien vu du point marqué 270° sur la circonférence de l'équateur, et TCN ce même premier méridien vu du point diamétralement opposé, c'est-à-dire du point marqué 90° sur la circonférence de l'équateur : et soit proposé de tracer et de représenter les deux hémisphères sur les cercles AFR, TCN. Que par le point de contact de ces deux cercles, on mène la droite *mn* formée de leurs diamètres; que l'on conçoive que cette ligne soit la projection de l'équateur, laquelle doit être une ligne droite, puisque l'œil ne peut voir la courbure de ce cercle dans le plan duquel nous le supposons placé.

Fig. 111

Menons ensuite les deux diamètres AR, TN, perpendiculaires à *mn*; ils seront les projections des méridiens de 90° et de 270°, et leurs extrémités seront les pôles de la Terre. Si A est le pôle arctique, T sera le même pôle. Le pôle antarctique sera au point R ou N.

1707. Cela posé, pour placer convenablement les différens pays sur la mappemonde, il faut tracer les cercles de longitude et de latitude. Veut-on, par exemple, décrire le méridien de 50°? le rayon de ce cercle est (1703) la sécante de 50°, qui dans les tables est de 1,5557 : je suppose que le diamètre AR de la projection soit de 400 parties sur une échelle de parties égales ; il faut (59) multiplier par 200 les lignes trigonométriques prises dans les tables, et on aura séc. 50° $= 311\frac{1}{7}$ environ. Cette distance prise sur l'échelle et portée de l'un des pôles A, R, sur l'équateur, donnera le point *r*, qui doit servir de centre pour décrire du rayon $311\frac{1}{7}$ le cercle de projection du méridien de 50°. Dans la figure, ADR est la projection de la moitié de ce méridien. Celle de l'autre moitié s'étendrait du pôle T au pôle N, en coupant l'équateur au point de 230°, et le centre d'où on la décrirait, tomberait dans le prolongement de S*n*. Les tables donneront de la même manière le rayon de tout autre méridien; et on n'aura aucun calcul à faire si on prend pour rayon de la projection une ligne qui sur l'échelle des parties égales soit exprimée par un nombre tel qu'il soit une puissance de 10.

1708. Pour décrire les cercles de latitude, si on veut les avoir par exemple de dix en dix degrés, on divisera en 18 parties égales chaque demi-cercle terminé par les diamètres AR, TN. Je suppose l'arc CN $=$ BN $=$ 30°, c'est-à-dire égal à trois de ces parties; le parallèle qui passera par les points B, C sera le parallèle de 60° de latitude. Le rayon de ce parallèle sur le plan de projection est (1704) la cotangente de 60°, laquelle prise dans les tables et multipliée par 200 (en supposant toujours de 400 parties le diamètre AR de la projection), donne $115\frac{1}{2}$. Cette ouverture de compas prise sur l'échelle, et portée de l'un des points B ou C sur le diamètre TN prolongé, donnera le centre du parallèle BPC de 60° de latitude qu'il s'agissait de décrire.

On décrira de même les projections des autres parallèles.

1709. Nous avons vu comment on peut tracer les mappemondes. Actuellement, soit proposé de marquer sur ces cartes l'horizon de l'hémisphère éclairé par le Soleil à un moment donné, par exemple au moment où Vénus sortit de dessus le disque du Soleil lors de son passage sur cet astre en 1769. Le Soleil était alors dans le plan du méridien de 174°, et il avait 22° 36′ de déclinaison boréale : il s'ensuit (1705) que l'inclinaison de l'horizon demandé, sur le plan de projection, est de 84° 28′; la sécante de 84° 28′ est donc le rayon de projection de cet horizon. De plus, on voit par les données que ce même cercle doit couper l'équateur aux points de 84° et de 264°, et le méridien de 174° à 67° 24′ de latitude australe. La connaissance de ces points aide à savoir de quel côté doit être le centre du cercle à décrire. Mais pour trouver ce centre, la description du méridien de 174° et du parallèle de 67° 24′, placés dans la figure pour plus de clarté, n'est pas nécessaire, et elle n'est pas aussi utile que la détermination des points F, G, ainsi que des points H, I, dans lesquels la projection demandée
Fig. 110 doit couper le premier méridien. Or le triangle PMH (1705) donne (VI. 10°), cot. PM = cos. P cot. PH = cos. *long.* cot. *lat.* = cos. 174° cot. 22° 36′, dans le cas dont il s'agit; d'où résulte PM
Fig. 111 = 157° 17′. Et telle est la mesure des arcs AG, FR, TH, NI; ce qui donne AF = GR = TI = NH = 22° 43′. Puis, ayant les points F, G, et pour rayon la sécante de 84° 28′, on trouvera le point qui doit servir de centre pour décrire l'arc F*s*G, qui représente la moitié de l'horizon cherché. On procèdera de même pour décrire l'arc ISH qui représente l'autre moitié. Il est clair du reste que les points I, H doivent être placés, près de leur pôle respectif, en sens contraire des points F, G, afin qu'ils coïncident lorsqu'on replie la carte de manière à faire joindre ensemble les bords des deux hémisphères, comme ils se joignent en effet dans le Globe de la Terre.

Il suit de tout ce qui vient d'être dit que, dans le cas proposé, l'hémisphère éclairé se compose des deux portions FAG, ITH

1710. Nous avons traité de la projection stéréographique polaire et équatoriale des méridiens, des parallèles et des horizons. Pour avoir la projection stéréographique d'un petit cercle qui ne serait

ni parallèle ni perpendiculaire au plan de projection; comme on a déjà vu (1693) que le petit cercle dont le diamètre est par exemple la corde UH, a pour projection le cercle dont ST est le diamètre, Fig. 109
il ne nous reste qu'à déterminer la valeur de ce diamètre ST. Or $ST = CS - CT = \text{tang.} \frac{1}{2} FH - \text{tang.} \frac{1}{2} FU$. Que l'on mène le rayon CA parallèle à la corde UH; l'angle ACD sera l'inclinaison du petit cercle du diamètre UH sur le plan BCD de projection, et AU sera la latitude de ce petit cercle par rapport au grand cercle qui lui est parallèle. J'appelle λ cette latitude, n l'inclinaison ci-dessus; je divise l'arc HU par le milieu, en L, et j'ai $AL = 90°$. Donc FH, ou $FL + LU$, $= 90° - AF + 90° - AU$. Mais $AF = 90° - n$, et $AU = \lambda$. Donc $FH = n + 90° - \lambda$. De même $FU = AU - AF = \lambda - (90° - n) = \lambda + n - 90°$. Donc (75)

$$ST = \text{tang.}\left(45° + \frac{n - \lambda}{2}\right) + \text{tang.}\left(45° - \frac{n + \lambda}{2}\right).$$

1711. Au moyen des formules (II. 10°, 18°, 2°, 28°) et (I. 6°), on peut, si on le préfère, transformer le second membre de cette équation, comme il suit :

$$ST = \frac{2 \cos. \lambda}{\cos. n + \sin. \lambda}.$$

1712. Pour décrire les cercles qui passent sur tous les points de la Terre desquels on peut voir, à un instant donné, l'entrée ou la sortie de Vénus lors de son passage sur le disque solaire; De la Lande a donné, Liv. XI de son Astronomie, des méthodes fort simples, et il a réuni et exposé très-clairement dans ce même Livre tous les principes nécessaires pour le calcul ou pour la représentation graphique de toutes les circonstances d'un passage.

Comme l'objet de ce Traité n'est pas de former un Astronome ou un Géographe, je me contenterai d'avoir donné quelques notions des deux sortes de projections qui sont les plus connues, dans la seconde desquelles l'application de mes formules contibuera beaucoup à abréger le travail.

1713. Du reste les projections ont toutes, plus ou moins, le

défaut (1681) de ne pouvoir concilier les véritables distances respectives des lieux sur la Terre. Aussi les Géographes ont-ils imaginé à l'envi d'autres pratiques ingéuieuses. Mais aucune jusqu'à présent n'ayant encore atteint ce but (De la Lande, *Astr.* 4075), j'ai fait un essai qui me paraît mériter la préférence pour la plus grande partie des cartes, c'est-à-dire pour celles qui ne comprennent pas plus de 60 degrés de latitude. On peut en prendre connaissance dans le Tome VIII (*Mem. della Società Italiana*).

1714. J'avais dessein de faire voir aussi comment on applique la Trigonométrie à la Gnomonique. Mais tous les problèmes de la Gnomonique penvent se réduire et ont été réduits en effet par divers Auteurs à la résolntion des triangles rectilignes rectangles. Il suffit donc, pour résoudre ces problèmes, d'employer les formules que j'ai données, et il n'en est aucun qui m'ait paru mériter ou exiger la recherche d'une solution particulière.

TABLE (AA).

Valeur des arcs de cercle en parties du rayon, en supposant le rayon égal à l'unité. Voyez (246).

1° =	0,017453	292519	943295	769236908
2	0,034906	585039	886591	538473815
3	0,052359	877559	829887	307710723
4	0,069813	170079	773183	076947631
5	0,087266	462599	716478	846184538
6	0,104719	755119	659774	615421446
7	0,122173	047639	603070	384658354
8	0,139626	340159	546366	153895261
9	0,157079	632679	489661	923132169
10	0,174532	925199	432957	692369077
11	0,191986	217719	376253	461605985
12	0,209439	510239	319549	230842892
13	0,226892	802759	262845	000079800
14	0,244346	095279	206140	769316708
15	0,261799	387799	149436	538553615
16	0,279252	680319	092732	307790523
17	0,296705	972839	036028	077027431
18	0,314159	265358	979323	846264338
19	0,331612	557878	922619	615501246
20	0,349065	850398	865915	384738154
21	0,366519	142918	809211	153975061
22	0,383972	435438	752506	923211969
23	0,401425	727958	695802	692448877
24	0,418879	020478	639098	461685784
25	0,436332	312998	582394	230922692
26	0,453785	605518	525690	000159600
27	0,471238	898038	468985	769396507
28	0,488692	190558	412281	538633415
29	0,506145	483078	355577	307870323
30	0,523598	775598	298873	077107231
31	0,541052	068118	242168	846344138
32	0,558505	360638	185464	615581046
33	0,575958	653158	128760	384817954
34	0,593411	945678	072056	154054861
35	0,610865	238198	015351	923291769
36	0,628318	530717	958647	692528677
37	0,645771	823237	901943	461765584
38	0,663225	115757	845239	231002492
39	0,680678	408277	788535	000239400
40	0,698131	700797	731830	769476307
41	0,715584	993317	675126	538713215
42	0,733038	285837	618422	307950123
43	0,750491	578357	561718	077187030
44	0,767944	870877	505013	846423938
45	0,785398	163397	448309	615660846
46	0,802851	455917	391605	384897754
47	0,820304	748437	334901	154134661
48	0,837758	040957	278196	923371569
49° =	0,855211	333477	221492	692608477
50	0,872664	625997	164788	461845384
51	0,890117	918517	108084	231082292
52	0,907571	211037	051380	000319200
53	0,925024	503556	994675	769556107
54	0,942477	796076	937971	538793015
55	0,959931	088596	881267	308029923
56	0,977384	381116	824563	077266830
57	0,994837	673636	767858	846503738
58	1,012290	966156	711154	615740646
59	1,029744	258676	654450	384977553
60	1,047197	551196	597746	154214461
61	1,064650	843716	541041	923451369
62	1,082104	136236	484337	692688276
63	1,099557	428756	427633	461925184
64	1,117010	721276	370929	231162092
65	1,134464	013796	314225	000399000
66	1,151917	306316	257520	769635907
67	1,169370	598836	200816	538872815
68	1,186823	891356	144112	308109723
69	1,204277	183876	087408	077346630
70	1,221730	476396	030703	846583538
71	1,239183	768915	973999	615820446
72	1,256637	061435	917295	385057353
73	1,274090	353955	860591	154294261
74	1,291543	646475	803886	923531169
75	1,308996	938995	747182	692768076
76	1,326450	231515	690478	462004984
77	1,343903	524035	633774	231241892
78	1,361356	816555	577070	000478799
79	1,378810	109075	520365	769715707
80	1,396263	401595	463661	538952615
81	1,413716	694115	406957	308189522
82	1,431169	986635	350253	077426430
83	1,448623	279155	293548	846663338
84	1,466076	571675	236844	615900246
85	1,483529	864195	180140	385137153
86	1,500983	156715	123436	154374061
87	1,518436	449235	066731	923610969
88	1,535889	741755	010027	692847876
89	1,553343	034275	953323	462084784
90	1,570796	326794	896619	231321692
91	1,588249	619314	839915	000558599
92	1,605702	911834	783210	769795507
93	1,623156	204354	726506	539032415
94	1,640609	496874	669802	308269322
95	1,658062	789394	613098	077506230
96	1,675516	081914	556393	846743138
97	1,692969	374434	499689	615980045
98	1,710422	666954	442985	385216953

99	1,727875	959474	386281	154453861
100	1,745329	251994	329576	923690769
120	2,094395	102393	195492	308428922
150	2,617993	877991	494365	385536153
180	3,141592	653589	793238	462643383
210	3,665191	429188	092111	539750614
240	4,188790	204786	390984	616857844
270	4,712388	980384	689857	693965074
330	5,759586	531581	287603	848179536
360	6,283185	307179	586476	925286767

1′ =	0,000290	888208	665721	596153948
2	0,000581	776417	331443	192307897
3	0,000872	664625	997164	788461845
4	0,001163	552834	662886	384615794
5	0,001454	441043	328607	980769742
6	0,001745	329251	994329	576923691
7	0,002036	217460	660051	173077639
8	0,002327	105669	325772	769231588
9	0,002617	993877	991494	365385536
10	0,002908	882086	657215	961539485
20	0,005817	764173	314431	923078969
30	0,008726	646259	971647	884618454
40	0,011635	528346	628863	846157938
50	0,014544	410433	286079	807697423
60	0,017453	292519	943295	769236908

1″ =	0,000004	848136	811095	359935899
2	0,000009	696273	622190	719871798
3	0,000014	544410	433286	079807697
4	0,000019	392547	244381	439743597
5	0,000024	240684	055476	799679496
6	0,000029	088820	866572	159615395
7	0,000033	936957	677667	519551294
8	0,000038	785094	488762	879487193
9	0,000043	633231	299858	239423092
10	0,000048	481368	110953	599358991
20	0,000096	962736	221907	198717983
30	0,000145	444104	332860	798076974
40	0,000193	925472	443814	397435966
50	0,000242	406840	554767	996794957
60	0,000290	888208	665721	596153948

TABLE (BB).

Logarithmes des nombres premiers, depuis 2 *jusqu'à* 1297. (Voyez 413).

Dans cette Table, les caractéristiques des Logarithmes sont omises.

Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
2	30102	99956	63981	19521	241	38201	70425	74868	38408
3	47712	12547	19662	43730	251	39967	37214	81038	13934
5	69897	00043	36018	80479	257	40993	31233	31294	53716
7	84509	80400	14256	83071	263	41995	57484	89757	86897
11	04139	26851	58225	04075	269	42975	22800	02407	98009
13	11394	33523	06836	76921	271	43296	92908	74406	72952
17	23044	89213	78273	92854	277	44247	97690	64448	55378
19	27875	36009	52828	96154	281	44870	63199	05079	89286
23	36172	78360	17592	87887	283	45178	64355	24290	23556
29	46239	79978	98956	08733	293	46686	76203	54109	45624
31	49136	16938	34272	67967	307	48713	83754	77186	48475
37	56820	17240	66994	99681	311	49276	03890	26837	50555
41	61278	38567	19735	49451	313	49554	43375	46448	48481
43	63346	84555	79586	52641	317	50105	92622	17751	49455
47	67209	78579	35717	46441	331	51982	79937	75718	73861
53	72427	58696	00789	04563	337	52762	99008	71338	62619
59	77085	20116	42144	19026	347	54032	94747	90873	71854
61	78532	98350	10767	03189	349	54282	54269	59179	80654
67	82607	48027	00826	43415	353	54777	47053	87822	56550
71	85125	83487	19075	28609	359	55509	44485	78319	14782
73	86332	28601	20455	92107	367	56466	60642	52089	33799
79	89762	70912	90441	42799	373	57170	88318	08687	60551
83	91907	80923	76073	90383	379	57863	92099	68072	34193
89	94939	00066	44912	78472	383	58319	87739	68022	74038
97	98677	17342	66244	85178	389	58994	96013	25707	73624
101	00432	13737	82642	57428	397	59879	05067	63115	06588
103	01283	72247	05172	20517	401	60314	43726	20182	30654
107	02938	37776	85209	64083	409	61172	33080	07341	80361
109	03742	64979	40623	63520	419	62221	40229	66295	30985
113	05307	84434	83419	72280	421	62428	20958	35668	30744
127	10380	37209	55956	86425	431	63447	72701	60731	60075
131	11727	12956	55764	26081	433	63648	78963	53365	44270
137	13672	05671	56406	76856	439	64246	45202	42121	37063
139	14301	48002	54095	08046	443	64640	37262	23069	56023
149	17318	62684	12274	03826	449	65224	63410	03323	17492
151	17897	69472	93169	43687	457	65991	62000	69350	22235
157	19589	96524	09233	73676	461	66370	09253	89658	14507
163	21218	76044	03957	80764	463	66558	09910	17953	13567
167	22271	64711	47583	27098	467	66931	68805	66112	16309
173	23804	61031	28795	41456	479	68033	55134	14563	22010
179	25285	30309	79893	16957	487	68752	89612	14634	33246
181	25767	85748	69184	51029	491	69108	14921	22968	47275
191	28103	33672	47727	53764	499	69810	05456	23389	91417
193	28555	73090	07773	76060	503	70156	79850	55927	39710
197	29446	62261	61592	92737	509	70671	77823	36758	74657
199	29885	30764	09776	65110	521	71683	77232	30524	47424
211	32428	24552	97692	66508	523	71850	16888	67274	23926
223	34830	48630	48160	67348	541	73319	72651	06569	43088
227	35602	58571	93122	72010	547	73798	73263	33430	77381
229	35983	54823	39887	99413	557	74585	51951	73728	90044
233	36735	59210	26018	95219	563	75050	83948	51346	22909
239	37839	79009	48137	68500	569	75511	22663	95071	17229

Nomb.	Logarithmes.			
571	75663	61082	45848	05004
577	76117	58131	55731	41849
587	76863	81012	47614	47606
593	77305	46933	64262	60640
599	77742	68223	89311	37983
601	77887	44720	02739	52189
607	78318	86910	75257	58096
613	78746	04745	18415	03774
617	79028	51640	33241	68205
619	79169	06490	20117	97680
631	80002	03592	44134	31302
641	80685	80295	18817	42225
643	80821	00729	24222	07240
647	81090	42806	68700	38[illegible]
653	81491	31812	75073	92141
659	81888	54145	94009	86128
661	82020	14594	85640	23665
673	82801	50042	23076	84148
677	83058	80686	87144	31601
683	83442	07036	81532	50340
691	83947	80473	74198	40758
701	84571	80179	66058	65706
709	85064	62351	83000	54285
719	85672	88903	82882	6[illegible]777
727	86153	44108	59037	81021
733	86510	39746	41127	94117
739	86864	44383	94825	73649
743	87098	88137	60575	29242
751	87563	90370	04168	38975
757	87909	58095	00072	75209
761	88138	46667	70572	82037
769	88592	63398	01431	03960
773	88817	94039	18324	90807
787	89597	47123	59064	55847
797	90145	83213	96112	34727
809	90794	85216	12272	30432
811	90902	08542	11156	03069
821	91434	31571	19440	77180
823	91539	98352	12249	83977
827	91750	55095	52646	67071
829	91855	47305	50273	55312
839	92376	19608	28700	27500
853	93095	90311	67523	03000
857	93298	08219	23198	16429
859	93399	31638	31242	30263
863	93601	07957	15209	59266
877	94299	95933	66040	51823
881	94497	59084	12047	91274
883	94596	07035	77568	58562
887	94792	36198	31726	39220
907	95760	72870	60095	25585
911	95951	83769	72998	24763
919	96331	55113	86111	26520
929	96801	57139	93641	76318
937	97173	95908	87778	26303

Nomb.	Logarithmes.			
941	97358	96234	27257	90834
947	97634	99700	01273	41875
953	97909	20006	35336	40853
967	98542	64740	83101	67360
971	98721	92299	08014	86280
977	98989	45637	18773	07091
983	99255	35178	32135	62275
991	99607	36544	85275	32836
997	99869	51583	11655	71088
1009	00389	11662	37910	[illegible]
1013	00560	94453	[illegible]	[illegible]
1019	00817	41840	06126	3[illegible]
1021	00902	57420	[illegible]	24125
1031	01325	87652	[illegible]	57691
1033	01410	03215	[illegible]	57014
1039	01661	55475	57177	41240
1049	02077	54881	93557	85091
1051	02160	27160	28242	22008
1061	02571	53839	01340	66612
1063	02653	32645	23296	75697
1069	02897	77052	08778	01749
1087	03612	95440	86204	53093
1091	03782	47505	88341	85761
1093	03862	01619	49702	79227
1097	04020	66275	74711	13222
1103	04257	55114	40190	59866
1109	04493	15461	49160	06471
1117	04805	31731	15609	05702
1123	05037	97562	61457	78469
1129	05269	39419	24967	86114
1151	06107	51236	29791	80185
1153	06182	93072	94699	02164
1163	06557	97147	28448	41138
1171	06855	68950	72363	12901
1181	07224	98976	13514	79908
1187	07445	07189	54591	22046
1193	07664	04436	70341	87278
1201	07954	30074	02976	04493
1213	08386	08008	66572	97420
1217	08529	05782	30064	98836
1223	08742	64570	36285	46333
1229	08955	18828	86454	08564
1231	09025	80529	31316	30782
1237	09236	96995	29120	65363
1249	09656	24383	74135	51203
1259	10002	57301	07862	59776
1277	10619	08972	63415	28661
1279	10687	05444	78053	92264
1283	10822	66563	74928	50365
1289	11025	29173	53103	02417
1291	11092	62412	66123	30880
1297	11293	90700	84080	08149

Facteurs des nombres composés, depuis 49 jusqu'à 1273, qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.
49	= 7 . 7	377	= 13 . 29	637	= 7 . 7 . 13	871	= 13 . 67	1111	= 11 . 101
77	= 7 . 11	391	= 17 . 23	649	= 11 . 59	889	= 7 . 127	1121	= 19 . 59
91	= 7 . 13	403	= 13 . 31	667	= 23 . 29	893	= 19 . 47	1127	= 7 . 7 . 23
119	= 7 . 17	407	= 11 . 37	671	= 11 . 61	899	= 29 . 31	1133	= 11 . 103
121	= 11 . 11	413	= 7 . 59	679	= 7 . 97	901	= 17 . 53	1139	= 17 . 67
133	= 7 . 19	427	= 7 . 61	689	= 13 . 53	913	= 11 . 83	1141	= 7 . 163
143	= 11 . 13	437	= 19 . 23	697	= 17 . 41	917	= 7 . 131	1147	= 31 . 37
161	= 7 . 23	451	= 11 . 41	703	= 19 . 37	923	= 13 . 71	1157	= 13 . 89
169	= 13 . 13	469	= 7 . 67	707	= 7 . 101	931	= 7 . 7 . 19	1159	= 19 . 61
187	= 11 . 17	473	= 11 . 43	713	= 23 . 31	943	= 23 . 41	1169	= 7 . 167
203	= 7 . 29	481	= 13 . 37	721	= 7 . 103	949	= 13 . 73	1177	= 11 . 107
209	= 11 . 19	493	= 17 . 29	731	= 17 . 43	959	= 7 . 137	1183	= 7 . 13 . 13
217	= 7 . 31	497	= 7 . 71	737	= 11 . 67	961	= 31 . 31	1189	= 29 . 41
221	= 13 . 17	511	= 7 . 73	749	= 7 . 107	973	= 7 . 139	1199	= 11 . 109
247	= 13 . 19	517	= 11 . 47	763	= 7 . 109	979	= 11 . 89	1207	= 17 . 71
253	= 11 . 23	527	= 17 . 31	767	= 13 . 59	989	= 23 . 43	1211	= 7 . 173
259	= 7 . 37	529	= 23 . 23	779	= 19 . 41	1001	= 7 . 11 . 13	1219	= 23 . 53
287	= 7 . 41	533	= 13 . 41	781	= 11 . 71	1003	= 17 . 59	1241	= 17 . 73
289	= 17 . 17	539	= 7 . 7 . 11	791	= 7 . 113	1007	= 19 . 53	1243	= 11 . 113
299	= 13 . 23	551	= 19 . 29	793	= 13 . 61	1027	= 13 . 79	1247	= 29 . 43
301	= 7 . 43	553	= 7 . 79	799	= 17 . 47	1037	= 17 . 61	1253	= 7 . 179
319	= 11 . 29	559	= 13 . 43	803	= 11 . 73	1043	= 7 . 149	1261	= 13 . 97
323	= 17 . 19	581	= 7 . 83	817	= 19 . 43	1057	= 7 . 151	1267	= 7 . 181
329	= 7 . 47	583	= 11 . 53	833	= 7 . 7 . 17	1067	= 11 . 97	1271	= 31 . 41
								1273	= 19 . 67
341	= 11 . 31	589	= 19 . 31	841	= 29 . 29	1073	= 29 . 37		
343	= 7 . 7 . 7	611	= 13 . 47	847	= 7 . 11 . 11	1079	= 13 . 83		
361	= 19 . 19	623	= 7 . 89	851	= 23 . 37	1081	= 23 . 47		
371	= 7 . 53	629	= 17 . 37	869	= 11 . 79	1099	= 7 . 157		

TABLE (CC), (1557).

Angles de la verticale, et Logarithmes des rayons de la Terre.

Hauteur du pôle.	Angle de la vertic.	Logarithme du rayon de la Terre.	Différ. des logarit.
0°	0′ 0″	0,0000000	4
1	0 24	9,9999996	13
2	0 48	9,9999983	22
3	1 12	9,9999961	31
4	1 36	9,9999930	39
5	1 59	9,9999891	48
6	2 23	9,9999843	56
7	2 46	9,9999787	65
8	3 9	9,9999722	73
9	3 32	9,9999649	82
10	3 55	9,9999567	90
11	4 17	9,9999477	98
12	4 39	9,9999379	106
13	5 1	9,9999273	114
14	5 22	9,9999159	121
15	5 43	9,9999038	130
16	6 4	9,9998908	136
17	6 24	9,9998772	144
18	6 44	9,9998628	151
19	7 3	9,9998477	158
20	7 22	9,9998319	165
21	7 40	9,9998154	171
22	7 57	9,9997983	178
23	8 14	9,9997805	184
24	8 31	9,9997621	190
25	8 46	9,9997431	195
26	9 2	9,9997236	201
27	9 16	9,9997035	206
28	9 30	9,9996829	211
29	9 43	9,9996618	216
30	9 55	9,9996402	220
31	10 7	9,9996182	225
32	10 18	9,9995957	228
33	10 28	9,9995729	232
34	10 38	9,9995497	236
35	10 46	9,9995261	238
36	10 54	9,9995023	241
37	11 1	9,9994782	244
38	11 8	9,9994538	246
39	11 13	9,9994292	
39°	11′ 13″	9,9994292	248
40	11 18	9,9994044	250
41	11 22	9,9993794	251
42	11 25	9,9993543	252
43	11 27	9,9993291	252
44	11 28	9,9993039	253
45	11 29	9,9992786	254
46	11 28	9,9992532	252
47	11 27	9,9992280	252
48	11 25	9,9992028	252
49	11 22	9,9991776	250
50	11 19	9,9991526	249
51	11 14	9,9991277	247
52	11 9	9,9991030	245
53	11 3	9,9990785	243
54	10 56	9,9990542	240
55	10 48	9,9990302	237
56	10 39	9,9990065	234
57	10 30	9,9989831	230
58	10 20	9,9989601	227
59	10 9	9,9989374	222
60	9 57	9,9989152	218
61	9 45	9,9988934	214
62	9 32	9,9988720	209
63	9 18	9,9988511	203
64	9 4	9,9988308	197
65	8 49	9,9988111	193
66	8 33	9,9987918	186
67	8 17	9,9987732	180
68	8 0	9,9987552	174
69	7 42	9,9987378	167
70	7 24	9,9987211	161
71	7 5	9,9987050	153
72	6 46	9,9986897	147
73	6 26	9,9986750	139
74	6 6	9,9986611	131
75	5 45	9,9986480	
80	3 56	9,9985941	
85	2 0	9,9985611	
90	0 0	9,9985409	

TABLE (DD).

Degrés de latitude et de longitude, en toises, (1562).

Latit.	Degrés de latitude.	Diff.	Degrés de longitude.	Différ.
0°	56756		57136	
1	56756	0	57128	8
2	56757	1	57102	26
3	56758	1	57058	44
4	56759	1	56998	60
5	56760	1	56920	78
6	56762	2	56825	95
7	56764	2	56713	112
8	56767	3	56584	129
9	56770	3	56437	147
10	56773	3	56274	163
11	56777	4	56093	181
12	56781	4	55896	197
13	56785	4	55681	215
14	56789	4	55450	231
15	56794	5	55202	248
16	56799	5	54937	265
17	56804	5	54655	282
18	56810	6	54357	298
19	56816	6	54043	314
20	56822	6	53712	331
21	56829	7	53365	347
22	56836	7	53002	363
23	56843	7	52622	380
24	56850	7	52226	396
25	56857	7	51814	412
26	56865	8	51387	427
27	56873	8	50944	443
28	56881	8	50485	459
29	56889	8	50012	473
30	56898	9	49523	489
31	56906	8	49019	504
32	56915	9	48500	519
33	56924	9	47966	534
34	56934	10	47418	548
35	56943	9	46855	563
36	56952	9	46277	578
37	56962	10	45686	591
38	56971	9	45081	605
39	56981	10	44462	619
40	56991	10	43829	633
41	57001	10	43183	646
42	57011	10	42524	659
43	57021	10	41852	672
44	57030	9	41167	685
45	57040	10	40469	698
46	57050	10	39759	710
47	57060	10	39036	723

Latit.	Degrés de latitude.	Diff.	Degrés de longitude.	Diff.
47°	57060		39036	
48	57070	10	38302	734
49	57080	10	37556	746
50	57090	10	36799	757
51	57100	10	36030	769
52	57110	10	35250	780
53	57119	9	34459	791
54	57129	10	33657	801
55	57138	9	32845	812
56	57148	10	32024	821
57	57157	9	31192	832
58	57166	9	30350	842
59	57175	9	29499	851
60	57184	9	28640	859
61	57192	8	27772	868
62	57201	9	26894	878
63	57209	8	26009	885
64	57217	8	25115	894
65	57225	8	24213	902
66	57232	7	23305	908
67	57239	7	22389	916
68	57246	7	21466	923
69	57253	7	20536	930
70	57260	7	19599	937
71	57266	6	18657	942
72	57272	6	17709	948
73	57278	6	16756	953
74	57284	6	15798	958
75	57289	5	14835	963
76	57294	5	13866	969
77	57298	4	12893	973
78	57302	4	11917	976
79	57306	4	10937	980
80	57310	4	9953	984
81	57313	3	8967	986
82	57316	3	7978	989
83	57319	3	6986	992
84	57321	2	5992	994
85	57323	2	4996	996
86	57324	1	3999	997
87	57326	2	3000	999
88	57326	0	2000	1000
89	57327	1	1000	1000
90	57327	0	0	1000

FIN.



S TRIGONOMÉTRIQUES. *Voyez l'Explication* (175 à 178).

:os. A.

).

).

, (115).

).

).

17).

29).

(133).

$(45^\circ + \frac{1}{2}A)$, (171).

$45^\circ - \frac{1}{2}A)$, (172).

$(60^\circ - A)$, (158).

Valeurs de TANG. A.

51° $\frac{\sin. A}{\cos. A}$, (34).

52° $\frac{1}{\cot. A}$, (35).

53° $\sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 A} - 1\right)}$, (43).

54° $\frac{\sin. A}{\sqrt{(1 - \sin.^2 A)}}$, (47).

55° $\frac{\sqrt{(1 - \cos.^2 A)}}{\cos. A}$, (47).

56° $\frac{2 \,\text{tang.}\, \frac{1}{2} A}{1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2} A}$, (116).

57° $\frac{2 \cot. \frac{1}{2} A}{\cot.^2 \frac{1}{2} A - 1}$, (116).

58° $\frac{2}{\cot. \frac{1}{2} A - \text{tang.}\, \frac{1}{2} A}$, (122).

59° $\cot. A - 2 \cot. 2 A$, (123).

40° $\frac{1 - \cos. 2 A}{\sin. 2 A}$, (124).



41° $\frac{\sin. 2 A}{1 + \cos. 2 A}$, (125).

42° $\sqrt{\frac{1 - \cos. 2 A}{1 + \cos. 2 A}}$, (126).

43° $\frac{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2} A) - \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2} A)}{2}$, (165).

(175 à 177).	DIFFERENTIELLES FINIES DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.
-B), (136).	31° $\partial \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} \partial B \cos. (B + \frac{1}{2} \partial B)$, (212).
-B), (137).	32° $-\partial \cos. B = 2 \sin. \frac{1}{2} \partial B \sin. (B + \frac{1}{2} \partial B)$, (213).
-B), (139).	33° $\partial \text{tang}. B = \frac{\sin. \partial B}{\cos. B \cos. (B + \partial B)}$, (214).
-B), (138).	
-B), (140).	34° $-\partial \cot. B = \frac{\sin. \partial B}{\sin. B \sin. (B + \partial B)}$, (215).
-B), (142).	35° $\left\{ \begin{matrix} \partial (\sin.^2 B) = \\ -\partial (\cos.^2 B) = \end{matrix} \right\} \sin. \partial B \sin. (2B + \partial B)$, (231).
).	36° $\partial (\text{tang}.^2 B) = \frac{\sin. \partial B \sin. (2B + \partial B)}{\cos.^2 B \cos.^2 (B + \partial B)}$, (232).
	37° $-\partial (\cot.^2 B) = \frac{\sin. \partial B \sin. (2B + \partial B)}{\sin.^2 B \sin.^2 (B + \partial B)}$, (233).
-B), (141).	*Différentielles infiniment petites, dans la forme ordinaire.*
-B), (143).	
	38° $\partial \sin. B = \partial B \cos. B$, (220).
	39° $-\partial \cos. B = \partial B \sin. B$, (221).
	40° $\partial \text{tang}. B = \frac{\partial B}{\cos.^2 B}$, (223).
), (134).	41° $-\partial \cot. B = \frac{\partial B}{\sin.^2 B}$, (224).
B), (135).	42° $\left\{ \begin{matrix} \partial (\sin.^2 B) = \\ -\partial (\cos.^2 B) = \end{matrix} \right\} 2 \partial B \sin. B \cos. B$, (235).
-B), (152).	43° $\partial (\text{tang}.^2 B) = \frac{2 \partial B \text{tang}. B}{\cos.^2 B}$, (237).
, (153).	44° $-\partial (\cot.^2 B) = \frac{2 \partial B \cot. B}{\sin.^2 B}$, (238).



iangle rectiligne ABC, dont trois parties sont données.
émonstrations (580).

; AC.	*Valeurs de* BC.
	19° $\frac{AC \sin. A}{\sin. B}$
	20° $\frac{AB \sin. A}{\sin. C}$
	21° $\frac{AC}{\cos. C + \sin. C \cot. A}$
	22° $\frac{AB}{\cos. B + \sin. B \cot. A}$
$. A \cot. C$	23° $AC \cos. C + AC \sin. C \cot. B$
$. C \cot. A$	24° $AB \cos. B + AB \sin. B \cot. C$
$BC \times AB \cos. B)$	25° $\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos. A)}$
$^2 - AB^2 \sin.^2 A)$	26° $AC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}$
$^2 - BC^2 \sin.^2 C)$	27° $AB \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}$
:os. A.	*Valeurs de* TANG. A.
	46° $\frac{BC \sin. C}{\pm \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}$
	47° $\frac{BC \sin. B}{\pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}$
	48° $-\text{tang.} (B + C)$
$3 \cos. C$	49° $\frac{\text{tang.} B + \text{tang.} C}{\text{tang.} B \,\text{tang.} C - 1}$
$\frac{C}{AC \cos. C)}$	50° $\frac{BC \sin. C}{AC - BC \cos. C}$
$\frac{B}{AB \cos. B)}$	51° $\frac{BC \sin. B}{AB - BC \cos B}$
	52° $\pm \sqrt{\left(\frac{2 AB \times AC}{AB^2 + AC^2 - BC^2}\right)^2 - 1}$
$^2 - AC^2 \sin.^2 C)$	53° $\frac{AC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}{AC \sin. C \mp \cot. C \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}$
$- AB^2 \sin.^2 B)$	54° $\frac{AB \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}{AB \sin. B \mp \cot. B \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}$

Voyez ci-après la suite de la Table III.

défaut (1681) de ne pouvoir concilier les véritables distances respectives des lieux sur la Terre. Aussi les Géographes ont-ils imaginé à l'envi d'autres pratiques ingénieuses. Mais aucune jusqu'à présent n'ayant encore atteint ce but (De la Lande, *Astr.* 4075), j'ai fait un essai qui me paraît mériter la préférence pour la plus grande partie des cartes, c'est-à-dire pour celles qui ne comprennent pas plus de 60 degrés de latitude. On peut en prendre connaissance dans le Tome VIII (*Mem. della Società Italiana*).

1714. J'avais dessein de faire voir aussi comment on applique la Trigonométrie à la Gnomonique. Mais tous les problèmes de la Gnomonique peuvent se réduire et ont été réduits en effet par divers Auteurs à la résolution des triangles rectilignes rectangles. Il suffit donc, pour résoudre ces problèmes, d'employer les formules que j'ai données, et il n'en est aucun qui m'ait paru mériter ou exiger la recherche d'une solution particulière.

T A B L E (AA).

Valeur des arcs de cercle en parties du rayon, en supposant le rayon égal à l'unité. Voyez (246).

1° =	0,017453	292519	943295	769236908
2	0,034906	585039	886591	538473815
3	0,052359	877559	829887	307710723
4	0,069813	170079	773183	076947631
5	0,087266	462599	716478	846184538
6	0,104719	755119	659774	615421446
7	0,122173	047639	603070	384658354
8	0,139626	340159	546366	153895261
9	0,157079	632679	489661	923132169
10	0,174532	925199	432957	692369077
11	0,191986	217719	376253	461605985
12	0,209439	510239	319549	230842892
13	0,226892	802759	262845	000079800
14	0,244346	095279	206140	769316708
15	0,261799	387799	149436	538553615
16	0,279252	680319	092732	307790523
17	0,296705	972839	036028	077027431
18	0,314159	265358	979323	846264338
19	0,331612	557878	922619	615501246
20	0,349065	850398	865915	384738154
21	0,366519	142918	809211	153975061
22	0,383972	435438	752506	923211969
23	0,401425	727958	695802	692448877
24	0,418879	020478	639098	461685784
25	0,436332	312998	582394	230922692
26	0,453785	605518	525690	000159600
27	0,471238	898038	468985	769396507
28	0,488692	190558	412281	538633415
29	0,506145	483078	355577	307870323
30	0,523598	775598	298873	077107231
31	0,541052	068118	242168	846344138
32	0,558505	360638	185464	615581046
33	0,575958	653158	128760	384817954
34	0,593411	945678	072056	154054861
35	0,610865	238198	015351	923291769
36	0,628318	530717	958647	692528677
37	0,645771	823237	901943	461765584
38	0,663225	115757	845239	231002492
39	0,680678	408277	788535	000239400
40	0,698131	700797	731830	769476307
41	0,715584	993317	675126	538713215
42	0,733038	285837	618422	307950123
43	0,750491	578357	561718	077187030
44	0,767944	870877	505013	846423938
45	0,785398	163397	448309	615660846
46	0,802851	455917	391605	384897754
47	0,820304	748437	334901	154134661
48	0,837758	040957	278196	923371569
49° =	0,855211	333477	221492	692608477
50	0,872664	625997	164788	461845384
51	0,890117	918517	108084	231082292
52	0,907571	211037	051380	000319200
53	0,925024	503556	994675	769556107
54	0,942477	796076	937971	538793015
55	0,959931	088596	881267	308029923
56	0,977384	381116	824563	077266830
57	0,994837	673636	767858	846503738
58	1,012290	966156	711154	615740646
59	1,029744	258676	654450	384977553
60	1,047197	551196	597746	154214461
61	1,064650	843716	541041	923451369
62	1,082104	136236	484337	692688276
63	1,099557	428756	427633	461925184
64	1,117010	721276	370929	231162092
65	1,134464	013796	314225	000399000
66	1,151917	306316	257520	769635907
67	1,169370	598836	200816	538872815
68	1,186823	891356	144112	308109723
69	1,204277	183876	087408	077346630
70	1,221730	476396	030703	846583538
71	1,239183	768915	973999	615820446
72	1,256637	061435	917295	385057353
73	1,274090	353955	860591	154294261
74	1,291543	646475	803886	923531169
75	1,308996	938995	747182	692768076
76	1,326450	231515	690478	462004984
77	1,343903	524035	633774	231241892
78	1,361356	816555	577070	000478799
79	1,378810	109075	520365	769715707
80	1,396263	401595	463661	538952615
81	1,413716	694115	406957	308189522
82	1,431169	986635	350253	077426430
83	1,448623	279155	293548	846663338
84	1,466076	571675	236844	615900246
85	1,483529	864195	180140	385137153
86	1,500983	156715	123436	154374061
87	1,518436	449235	066731	923610969
88	1,535889	741755	010027	692847876
89	1,553343	034274	953323	462084784
90	1,570796	326794	896619	231321692
91	1,588249	619314	839915	000558599
92	1,605702	911834	783210	769795507
93	1,623156	204354	726506	539032415
94	1,640609	496874	669802	308269322
95	1,658062	789394	613098	077506230
96	1,675516	081914	556393	846743138
97	1,692969	374434	499689	615980045
98	1,710422	666954	442985	385216953

99	1,727875	959474	386281	154453861	210	3,665191	429188	092111	539750614
100	1,745329	251994	329576	923690769	240	4,188790	204786	390984	616857844
120	2,094395	102393	195492	308428922	270	4,712388	980384	689857	693965074
150	2,617993	877991	494365	385536153	330	5,759586	531581	287603	848179536
180	3,141592	653589	793238	462643383	360	6,283185	307179	586476	925286767

1′ =	0,000290	888208	665721	596153948	1″ =	0,000004	848136	811095	359935899
2	0,000581	776417	331443	192307897	2	0,000009	696273	622190	719871798
3	0,000872	664625	997164	788461845	3	0,000014	544410	433286	079807697
4	0,001163	552834	662886	384615794	4	0,000019	392547	244381	439743597
5	0,001454	441043	328607	980769742	5	0,000024	240684	055476	799679496
6	0,001745	329251	994329	576923691	6	0,000029	088820	866572	159615395
7	0,002036	217460	660051	173077639	7	0,000033	936957	677667	519551294
8	0,002327	105669	325772	769231588	8	0,000038	785094	488762	879487193
9	0,002617	993877	991494	365385536	9	0,000043	633231	299858	239423092
10	0,002908	882086	657215	961539485	10	0,000048	481368	110953	599358991
20	0,005817	764173	314431	923078969	20	0,000096	962736	221907	198717983
30	0,008726	646259	971647	884618454	30	0,000145	444104	332860	798076974
40	0,011635	528346	628863	846157938	40	0,000193	925472	443814	397435966
50	0,014544	410433	286079	807697423	50	0,000242	406840	554767	996794957
60	0,017453	292519	943295	769236908	60	0,000290	888208	665721	596153948

TABLE (BB).

Logarithmes des nombres premiers, depuis 2 jusqu'à 1297. (Voyez 413).

Dans cette Table, les caractéristiques des Logarithmes sont omises.

Nomb.	Logarithmes.			
2	30102	99956	63981	19521
3	47712	12547	19662	43730
5	69897	00043	36018	80479
7	84509	80400	14256	83071
11	04139	26851	58225	04075
13	11394	33523	06836	76921
17	23044	89213	78273	92854
19	27875	36009	52828	96154
23	36172	78360	17592	87887
29	46239	79978	98956	08733
31	49136	16938	34272	67967
37	56820	17240	66994	99681
41	61278	38567	19735	49451
43	63346	84555	79586	52641
47	67209	78579	35717	46441
53	72427	58696	00789	04563
59	77085	20116	42144	19026
61	78532	98350	10767	03389
67	82607	48027	00826	43415
71	85125	83487	19075	28609
73	86332	28601	20455	90107
79	89762	70912	90441	42799
83	91907	80923	76073	90383
89	94939	00066	44912	78472
97	98677	17342	66244	85178
101	00432	13737	82642	57428
103	01283	72247	05172	20517
107	02938	37776	85209	64083
109	03742	64979	40623	63520
113	05307	84434	83419	72280
127	10380	37209	55956	86425
131	11727	12956	55764	26081
137	13672	05671	56406	76856
139	14301	48002	54095	08046
149	17318	62684	12274	03826
151	17897	69472	93169	41687
157	19589	96524	09233	73676
163	21218	76044	03957	80764
167	22271	64711	47583	27998
173	23804	61031	28795	41456
179	25285	30309	79893	16957
181	25767	85748	69184	51029
191	28103	33672	47727	53764
193	28555	73090	07773	76060
197	29446	62261	61592	92737
199	29885	30764	09706	65110
211	32428	24552	97692	66508
223	34830	48630	48160	67348
227	35602	68577	93122	72010
229	35983	54823	39887	99413
233	36735	59210	26018	95219
239	37839	79009	48137	68500

Nomb.	Logarithmes.			
241	38201	70425	74868	38408
251	39967	37214	81038	13034
257	40993	31233	31294	53716
263	41995	57484	89757	86897
269	42975	22800	02407	98009
271	43296	92908	74406	72052
277	44247	97690	64448	55378
281	44870	63199	05079	89286
283	45178	64355	24290	23556
293	46686	76203	54109	45624
307	48713	83754	77186	38475
311	49276	03890	26837	50555
313	49554	43375	46448	48481
317	50105	92622	17751	49455
331	51982	79937	75718	73861
337	52762	99008	71338	62619
347	54032	94747	90873	71854
349	54282	54269	59179	80654
353	54777	47053	87822	56550
359	55509	44485	78319	14782
367	56466	60642	52089	33799
373	57170	88318	08687	60551
379	57863	92099	68072	34193
383	58319	87739	68622	74038
389	58994	96013	25707	73624
397	59879	05067	63115	06588
401	60314	43726	20182	30654
409	61172	33080	07341	80361
419	62221	40229	66295	30985
421	62428	20958	35668	30744
431	63447	72701	60731	60075
433	63648	78963	53365	44270
439	64246	45202	42121	37063
443	64640	37262	23069	56023
449	65224	63410	03323	17492
457	65991	62000	69850	22235
461	66370	09253	89648	14507
463	66558	09910	17953	13567
467	66931	68805	60112	16309
479	68033	55134	14563	22010
487	68752	89612	14634	33246
491	69108	14921	22968	47275
499	69810	05456	21389	91417
503	70156	79850	55927	39710
509	70671	77823	36758	74657
521	71683	77232	39524	47424
523	71850	16888	67274	23926
541	73319	72651	06569	41088
547	73798	73263	33430	77381
557	74585	51951	73728	90044
563	75050	83948	51346	22909
569	75511	22663	95071	17229

Nomb.	Logarithmes.			
571	75663	61082	45848	05004
577	76117	58131	55731	42849
587	76863	81012	47615	47608
593	77305	46933	64262	60640
599	77742	68223	89311	37983
601	77887	44720	02739	52289
607	78318	86910	75257	58026
613	78746	04745	18415	03774
617	79028	51640	33241	68205
619	79169	06490	20117	97680
631	80002	03592	41134	31302
641	80685	80295	18817	42225
643	80821	00729	24222	07240
647	81090	42806	68719	38416
653	81491	31812	75073	92141
659	81888	54145	94009	86128
661	82020	14594	85640	23665
673	82801	50042	23976	85448
677	83059	80686	81144	31601
683	83442	07036	81532	50340
691	83947	80473	74108	40758
701	84571	80179	60058	65706
709	85064	62351	83066	54285
719	85672	88903	82882	[illegible]
727	86153	44108	59037	83021
733	86510	39746	41127	94417
739	86864	44383	94825	[illegible]
743	87098	88137	60575	29242
751	87563	99370	04168	38975
757	87909	58795	00072	75709
761	88138	46567	70572	82437
769	88592	63398	01431	03960
773	88817	96039	18324	90817
787	89597	47723	59064	53847
797	90145	85213	69112	34727
809	90794	85216	12272	30432
811	90902	08542	11156	03069
821	91434	31571	19440	77180
823	91540	98352	12279	83977
827	91750	55095	52546	67071
829	91855	47305	50273	55312
839	92376	19608	28700	27500
853	93094	90311	67523	03000
857	93298	08219	23198	16429
859	93399	31638	31242	30263
863	93601	07957	15209	59266
877	94299	95933	66040	51823
881	94497	59084	12047	91274
883	94596	07035	77568	58562
887	94792	36198	31726	39220
907	95760	72870	60095	25585
911	95951	83769	72998	24763
919	96331	55113	86111	26520
929	96801	57139	93641	76318
937	97173	95908	82778	26303

Nomb.	Logarithmes.			
941	97358	96234	27255	90834
947	97634	99790	01773	41875
953	97909	29006	38316	40853
967	98542	64740	83001	67760
971	98721	92299	08014	86280
977	98989	45637	18773	07091
983	99255	35178	32135	62275
991	99607	36544	85275	32836
997	99869	51583	11655	71088
1009	00389	11662	31910	[illegible]
1013	00560	94473	[illegible]	[illegible]
1019	00817	41840	06426	[illegible]
1021	00902	57490	[illegible]	[illegible]
1031	01325	87652	[illegible]	54491
1033	01410	03215	[illegible]	57094
1039	01661	55475	57177	41240
1049	02077	54881	97557	85091
1051	02160	27160	28242	22008
1061	02571	53839	01340	60612
1063	02653	32645	23296	75697
1069	02897	77052	08778	01749
1087	03622	95440	86204	53993
1091	03782	47505	88341	87761
1093	03862	01619	49702	79227
1097	04020	66275	74711	13222
1103	04257	55124	40100	59866
1109	04493	15461	49160	06471
1117	04805	31731	15609	05702
1123	05037	97562	61457	78469
1129	05269	39419	24967	86114
1151	06107	51236	29791	80185
1153	06182	93072	94699	02164
1163	06557	97147	28448	41138
1171	06855	68940	72163	12901
1181	07224	98976	13514	79908
1187	07445	07189	54591	22046
1193	07664	04436	70341	87278
1201	07954	30074	02906	04893
1213	08386	08008	66572	97420
1217	08529	05782	30064	98886
1223	08743	64570	36285	46333
1229	08955	18828	86454	08564
1231	09025	80529	31316	30782
1237	09236	96996	29120	65363
1249	09656	24383	74135	51203
1259	10002	57301	07862	59776
1277	10619	08072	63415	28661
1279	10687	05444	78053	92264
1283	10822	66563	74928	51365
1289	11025	29173	53403	02417
1291	11092	62412	66420	30880
1297	11293	99700	84080	08149

Facteurs des nombres composés, depuis 49 jusqu'à 1273, qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.
49	= 7 . 7	377	= 13 . 29	637	= 7 . 7 . 13	871	= 13 . 67	1111	= 11 . 101
77	= 7 . 11	391	= 17 . 23	649	= 11 . 59	889	= 7 . 127	1121	= 19 . 59
91	= 7 . 13	403	= 13 . 31	667	= 23 . 29	893	= 19 . 47	1127	= 7 . 7 . 23
119	= 7 . 17	407	= 11 . 37	671	= 11 . 61	899	= 29 . 31	1133	= 11 . 103
121	= 11 . 11	413	= 7 . 59	679	= 7 . 97	901	= 17 . 53	1139	= 17 . 67
133	= 7 . 19	427	= 7 . 61	689	= 13 . 53	913	= 11 . 83	1141	= 7 . 163
143	= 11 . 13	437	= 19 . 23	697	= 17 . 41	917	= 7 . 131	1147	= 31 . 37
161	= 7 . 23	451	= 11 . 41	703	= 19 . 37	923	= 13 . 71	1157	= 13 . 89
169	= 13 . 13	469	= 7 . 67	707	= 7 . 101	931	= 7 . 7 . 19	1159	= 19 . 61
187	= 11 . 17	473	= 11 . 43	713	= 23 . 31	943	= 23 . 41	1169	= 7 . 167
203	= 7 . 29	481	= 13 . 37	721	= 7 . 103	949	= 13 . 73	1177	= 11 . 107
209	= 11 . 19	493	= 17 . 29	731	= 17 . 43	959	= 7 . 137	1183	= 7 . 13 . 13
217	= 7 . 31	497	= 7 . 71	737	= 11 . 67	961	= 31 . 31	1189	= 29 . 41
221	= 13 . 17	511	= 7 . 73	749	= 7 . 107	973	= 7 . 139	1199	= 11 . 109
247	= 13 . 19	517	= 11 . 47	763	= 7 . 109	979	= 11 . 89	1207	= 17 . 71
253	= 11 . 23	527	= 17 . 31	767	= 13 . 59	989	= 23 . 43	1211	= 7 . 173
259	= 7 . 37	529	= 23 . 23	779	= 19 . 41	1001	= 7 . 11 . 13	1219	= 23 . 53
287	= 7 . 41	533	= 13 . 41	781	= 11 . 71	1003	= 17 . 59	1241	= 17 . 73
289	= 17 . 17	539	= 7 . 7 . 11	791	= 7 . 113	1007	= 19 . 53	1243	= 11 . 113
299	= 13 . 23	551	= 19 . 29	793	= 13 . 61	1027	= 13 . 79	1247	= 29 . 43
301	= 7 . 43	553	= 7 . 79	799	= 17 . 47	1037	= 17 . 61	1253	= 7 . 179
319	= 11 . 29	559	= 13 . 43	803	= 11 . 73	1043	= 7 . 149	1261	= 13 . 97
323	= 17 . 19	581	= 7 . 83	817	= 19 . 43	1057	= 7 . 151	1267	= 7 . 181
329	= 7 . 47	583	= 11 . 53	833	= 7 . 7 . 17	1067	= 11 . 97	1271	= 31 . 41
341	= 11 . 31	589	= 19 . 31	841	= 29 . 29	1073	= 29 . 37	1273	= 19 . 67
343	= 7 . 7 . 7	611	= 13 . 47	847	= 7 . 11 . 11	1079	= 13 . 83		
361	= 19 . 19	623	= 7 . 89	851	= 23 . 37	1081	= 23 . 47		
371	= 7 . 53	629	= 17 . 37	869	= 11 . 79	1099	= 7 . 157		

TABLE (CC), (1557).

Angles de la verticale, et Logarithmes des rayons de la Terre.

Hauteur du pôle.	Angle de la vertic.	Logarithme du rayon de la Terre.	Différ. des logarit.
0°	0′ 0″	0,0000000	
1	0 24	9,9999996	4
2	0 48	9,9999983	13
3	1 12	9,9999961	22
4	1 36	9,9999930	31
5	1 59	9,9999891	39
6	2 23	9,9999843	48
7	2 46	9,9999787	56
8	3 9	9,9999722	65
9	3 32	9,9999649	73
10	3 55	9,9999567	82
11	4 17	9,9999477	90
12	4 39	9,9999379	98
13	5 1	9,9999273	106
14	5 22	9,9999159	114
15	5 43	9,9999038	121
16	6 4	9,9998908	130
17	6 24	9,9998772	136
18	6 44	9,9998628	144
19	7 3	9,9998477	151
20	7 22	9,9998319	158
21	7 40	9,9998154	165
22	7 57	9,9997983	171
23	8 14	9,9997805	178
24	8 31	9,9997621	184
25	8 46	9,9997431	190
26	9 2	9,9997236	195
27	9 16	9,9997035	201
28	9 30	9,9996829	206
29	9 43	9,9996618	211
30	9 55	9,9996402	215
31	10 7	9,9996182	220
32	10 18	9,9995957	225
33	10 28	9,9995729	228
34	10 38	9,9995497	232
35	10 46	9,9995261	236
36	10 54	9,9995023	238
37	11 1	9,9994782	241
38	11 8	9,9994538	244
39	11 13	9,9994292	246
39°	11′ 13″	9,9994292	
40	11 18	9,9994044	248
41	11 22	9,9993794	250
42	11 25	9,9993543	251
43	11 27	9,9993291	252
44	11 28	9,9993039	252
45	11 29	9,9992786	253
46	11 28	9,9992532	254
47	11 27	9,9992280	252
48	11 25	9,9992028	252
49	11 22	9,9991776	252
50	11 19	9,9991526	250
51	11 14	9,9991277	249
52	11 9	9,9991030	247
53	11 3	9,9990785	245
54	10 56	9,9990542	243
55	10 48	9,9990302	240
56	10 39	9,9990065	237
57	10 30	9,9989831	234
58	10 20	9,9989601	230
59	10 9	9,9989374	227
60	9 57	9,9989152	222
61	9 45	9,9988934	218
62	9 32	9,9988720	214
63	9 18	9,9988511	209
64	9 4	9,9988308	203
65	8 49	9,9988111	197
66	8 33	9,9987918	193
67	8 17	9,9987732	186
68	8 0	9,9987552	180
69	7 42	9,9987378	174
70	7 24	9,9987211	167
71	7 5	9,9987050	161
72	6 46	9,9986897	153
73	6 26	9,9986750	147
74	6 6	9,9986611	139
75	5 45	9,9986480	131
80	3 56	9,9985941	
85	2 0	9,9985611	
90	0 0	9,9985499	

TABLE (DD).

Degrés de latitude et de longitude, en toises, (1562).

Latit.	Degrés de latitude.	Diff.	Degrés de longitude.	Différ.
0°	56756		57136	
1	56756	0	57128	8
2	56757	1	57102	26
3	56758	1	57058	44
4	56759	1	56998	60
5	56760	1	56920	78
6	56762	2	56825	95
7	56764	2	56713	112
8	56767	3	56584	129
9	56770	3	56437	147
10	56773	3	56274	163
11	56777	4	56093	181
12	56781	4	55896	197
13	56785	4	55681	215
14	56789	4	55450	231
15	56794	5	55202	248
16	56799	5	54937	265
17	56804	5	54655	282
18	56810	6	54357	298
19	56816	6	54043	314
20	56822	6	53712	331
21	56829	7	53365	347
22	56836	7	53002	363
23	56843	7	52622	380
24	56850	7	52226	396
25	56857	7	51814	412
26	56865	8	51387	427
27	56873	8	50944	443
28	56881	8	50485	459
29	56889	8	50012	473
30	56898	9	49523	489
31	56906	8	49019	504
32	56915	9	48500	519
33	56924	9	47966	534
34	56934	10	47418	548
35	56943	9	46855	563
36	56952	9	46277	578
37	56962	10	45686	591
38	56971	9	45081	605
39	56981	10	44462	619
40	56991	10	43829	633
41	57001	10	43183	646
42	57011	10	42524	659
43	57021	10	41852	672
44	57030	9	41167	685
45	57040	10	40469	698
46	57050	10	39759	710
47	57060	10	39036	723

Latit.	Degrés de latitude.	Diff.	Degrés de longitude.	Diff.
47°	57060		39036	
48	57070	10	38302	734
49	57080	10	37556	746
50	57090	10	36799	757
51	57100	10	36030	769
52	57110	10	35250	780
53	57119	9	34459	791
54	57129	10	33657	801
55	57138	9	32845	812
56	57148	10	32024	821
57	57157	9	31192	832
58	57166	9	30350	842
59	57175	9	29499	851
60	57184	9	28640	859
61	57192	8	27772	868
62	57201	9	26894	878
63	57209	8	26009	885
64	57217	8	25115	894
65	57225	8	24213	902
66	57232	7	23305	908
67	57239	7	22389	916
68	57246	7	21466	923
69	57253	7	20536	930
70	57260	7	19599	937
71	57266	6	18657	942
72	57272	6	17709	948
73	57278	6	16756	953
74	57284	6	15798	958
75	57289	5	14835	963
76	57294	5	13866	969
77	57298	4	12893	973
78	57302	4	11917	976
79	57306	4	10937	980
80	57310	4	9953	984
81	57313	3	8967	986
82	57316	3	7978	989
83	57319	3	6986	992
84	57321	2	5992	994
85	57323	2	4996	996
86	57324	1	3999	997
87	57326	2	3000	999
88	57326	0	2000	1000
89	57327	1	1000	1000
90	57327	0	0	1000

FIN.



…S TRIGONOMÉTRIQUES. *Voyez l'Explication* (175 à 178).

…OS. A.

).

).

, (115).

).

).

17).

29).

(133).

$(45° + \frac{1}{2} A)$, (171).

$45° - \frac{1}{2} A)$, (172).

$(60° - A)$, (158).

Valeurs de TANG. A.

51° $\frac{\sin. A}{\cos. A}$, (34).

52° $\frac{1}{\cot. A}$, (35).

53° $\sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 A} - 1\right)}$, (43).

54° $\frac{\sin. A}{\sqrt{(1 - \sin.^2 A)}}$, (47).

55° $\frac{\sqrt{(1 - \cos.^2 A)}}{\cos. A}$, (47).

56° $\frac{2 \tang. \frac{1}{2} A}{1 - \tang.^2 \frac{1}{2} A}$, (116).

57° $\frac{2 \cot. \frac{1}{2} A}{\cot.^2 \frac{1}{2} A - 1}$, (116).

58° $\frac{2}{\cot. \frac{1}{2} A - \tang. \frac{1}{2} A}$, (122).

59° $\cot. A - 2 \cot. 2 A$, (123).

40° $\frac{1 - \cos. 2 A}{\sin. 2 A}$, (124).

41° $\frac{\sin. 2 A}{1 + \cos. 2 A}$, (125).

42° $\sqrt{\frac{1 - \cos. 2 A}{1 + \cos. 2 A}}$, (126).

43° $\frac{\tang. (45° + \frac{1}{2} A) - \tang. (45° - \frac{1}{2} A)}{2}$, (165).

(175 à 177).

-B), (136).

-B), (137).

-B), (139).

-B), (138).

-B), (140).

-B), (142).

).

⊦B), (141).

⊦B), (143).

), (134).

B), (135).

-B), (152).

, (153).

DIFFÉRENTIELLES FINIES DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

31° $\partial \sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2}\partial B \cos. (B + \frac{1}{2}\partial B)$, (212).

32° $-\partial \cos. B = 2 \sin. \frac{1}{2}\partial B \sin. (B + \frac{1}{2}\partial B)$, (213).

33° $\partial \text{tang}. B = \frac{\sin. \partial B}{\cos. B \cos. (B + \partial B)}$, (214).

34° $-\partial \cot. B = \frac{\sin. \partial B}{\sin. B \sin. (B + \partial B)}$, (215).

35° $\left\{ \begin{matrix} \partial (\sin.^2 B) = \\ -\partial (\cos.^2 B) = \end{matrix} \right\} \sin. \partial B \sin. (2B + \partial B)$, (231).

36° $\partial (\text{tang}.^2 B) = \frac{\sin. \partial B \sin. (2B + \partial B)}{\cos.^2 B \cos.^2 (B + \partial B)}$, (232).

37° $-\partial (\cot.^2 B) = \frac{\sin. \partial B \sin. (2B + \partial B)}{\sin.^2 B \sin.^2 (B + \partial B)}$, (233).

Différentielles infiniment petites, dans la forme ordinaire.

38° $\partial \sin. B = \partial B \cos. B$, (220).

39° $-\partial \cos. B = \partial B \sin. B$, (221).

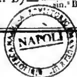
40° $\partial \text{tang}. B = \frac{\partial B}{\cos.^2 B}$, (223).

41° $-\partial \cot. B = \frac{\partial B}{\sin.^2 B}$, (224).

42° $\left\{ \begin{matrix} \partial (\sin.^2 B) = \\ -\partial (\cos.^2 B) = \end{matrix} \right\} 2\partial B \sin. B \cos. B$, (235).

43° $\partial (\text{tang}.^2 B) = \frac{2\partial B \,\text{tang}. B}{\cos.^2 B}$, (237).

44° $-\partial (\cot.^2 B) = \frac{2\partial B \cot. B}{\sin.^2 B}$, (238).



·iangle rectiligne ABC, dont trois parties sont données.

émonstrations (580).

ː AC.	*Valeurs de* BC.
	19° $\frac{AC \sin. A}{\sin. B}$
	20° $\frac{AB \sin. A}{\sin. C}$
	21° $\frac{AC}{\cos. C + \sin. C \cot. A}$
	22° $\frac{AB}{\cos. B + \sin. B \cot. A}$
ı. A cot. C	23° $AC \cos. C + AC \sin. C \cot. B$
. C cot. A	24° $AB \cos. B + AB \sin. B \cot. C$
BC × AB cos. B)	25° $\sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos. A)}$
² — AB² sin.² A)	26° $AC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}$
² — BC² sin.² C)	27° $AB \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}$
ːos. A.	*Valeurs de* TANG. A.
	46° $\frac{BC \sin. C}{\pm\sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}$
	47° $\frac{BC \sin. B}{\pm.\ (AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}$
	48° $-\text{tang.}\,(B + C)$
3 cos. C	49° $\frac{\text{tang. } B + \text{tang. } C}{\text{tang. } B \text{ tang. } C - 1}$
ː / AC cos. C)	50° $\frac{BC \sin. C}{AC - BC \cos. C}$
3 / AB cos. B)	51° $\frac{BC \sin. B}{AB - BC \cos B}$
	52° $\pm\sqrt{\left(\frac{2 AB \times AC}{AB^2 + AC^2 - BC^2}\right)^2 - 1}$
²— AC² sin.² C)	53° $\frac{AC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}{AC \sin. C \mp \cot. C \sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}$
— AB² sin.² B)	54° $\frac{AB \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}{AB \sin. B \mp \cot. B \sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}$

Voyez ci-après la suite de la Table III.

)s. B.	*Valeurs de* TANG. B.
	73^e $\frac{AC \sin. A}{\pm\sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}$
	74^e $\frac{AC \sin. C}{\pm\sqrt{(AB^2 - AC^2 \sin.^2 C)}}$
	75^e $-\text{tang.}(A + C)$
cos. C	76^e $\frac{\text{tang.} A + \text{tang.} C}{\text{tang.} A \text{ tang.} C - 1}$
AC cos. A)	77^e $\frac{AC \sin. A}{AB - AC \cos. A}$
ACcos. C)	78^e $\frac{AC \sin. C}{BC - AC \cos. C}$
	79^e $\pm\sqrt{\left(\frac{2 BC \times AB}{BC^2 + AB^2 - AC^2}\right)^2 - 1}$
— AB² sin.²A)	80^e $\frac{AB \cos. A \pm \sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}{AB \sin. A \mp \cot. A \sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}$
— BC² sin.²C)	81^e $\frac{BC \cos. C \pm \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}{BC \sin. C \mp \cot. C \sqrt{(AB^2 - BC^2 \sin.^2 C)}}$
)s. C.	*Valeurs de* TANG. C.
	100^e $\frac{AB \sin. B}{\pm\sqrt{(AC^2 - AB^2 \sin.^2 B)}}$
	101^e $\frac{AB \sin. A}{\pm\sqrt{(BC^2 - AB^2 \sin.^2 A)}}$
	102^e $-\text{tang.}(A + B)$
cos. B	103^e $\frac{\text{tang.} A + \text{tang.} B}{\text{tang.} A \text{ tang.} B - 1}$
B cos. B)	104^e $\frac{AB \sin. B}{BC - AB \cos. B}$
cos. A)	105^e $\frac{AB \sin. A}{AC - AB \cos. A}$
	106^e $\pm\sqrt{\left(\frac{2 BC \times AC}{BC^2 + AC^2 - AB^2}\right)^2 - 1}$
BC² sin². B)	107^e $\frac{BC \cos. B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}{BC \sin. B \mp \cot. B \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}}$
— AC² sin.² A)	108^e $\frac{AC \cos. A \pm \sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}{AC \sin. A \mp \cot. A \sqrt{(BC^2 - AC^2 \sin.^2 A)}}$



RIANGLES OBLIQUANGLES, *démontrées* (559 à 579).

SOLUTIONS.

IULE... côté cherché $= \frac{\textit{sin.}\text{ ang. opposé} \times \text{côté donné}}{\textit{sin.}\text{ ang. opposé au côté donné}}$

ngle cherché $= \frac{\text{côté opposé} \times \textit{sin.}\text{ ang. donné}}{\text{côté opposé à l'angle donné}}$

:hez par la 2ᵉ formule l'angle opposé, et le 3ᵉ vous sera aussi connu.

:hez par la 2ᵉ l'angle opposé, et ensuite par la 1ᵉ le troisième côté.

$g.\,a = \frac{2\,\textit{sin.}\,\frac{1}{2}\text{ ang. donné}}{\text{diff. des côtés donnés}} \sqrt{\text{du rectangle des côtés donnés}}$

é cherché $= \frac{\text{diff. des côtés donnés}}{\textit{cos.}\ a}$, (429).

différence des côtés donnés est petite, on aura recours à la solution (568).

$\frac{1}{2}$ diff. des ang. inconnus $= \textit{cot.}\,\frac{1}{2}$ ang. donné $\times \frac{\text{diff. des côtés donnés}}{\text{som. des côtés donnés}}$

Soit S la demi-somme des trois côtés.

$\frac{1}{2}$ angle $= \sqrt{\frac{S(S - \text{côté opposé à l'angle cherché})}{\text{rectangle des côtés adjacens à l'angle cherché}}}$

; angle $= \sqrt{\frac{(S - \text{un des côtés adjac. à l'ang. cherché})(S - \text{l'autre côté adjac.})}{\text{rectangle des côtés adjacens à l'angle cherché}}}$



ME DEGRÉ, *par le moyen de la Trigonométrie.*

ATRIÈME DEGRÉ, voyez la solution (850).

$x^3 + px = - q.$	$x^3 - px = - q.$
Si $p^3 < 4q$, x est imaginaire.	Si $p^3 < 4q$, x est imaginaire.
SOLUTION.	SOLUTION.
n. $A = \frac{2}{p}\sqrt{q}.$	sin. $A = \frac{2}{p}\sqrt{q}.$
$= -$ tang. $\frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x =$ tang. $\frac{1}{2} A \sqrt{q}.$
$= -$ cot. $\frac{1}{2} A \sqrt{q}.$	$x =$ cot. $\frac{1}{2} A \sqrt{q}.$
$x^3 - px + q = 0.$	$x^3 - px - q = 0.$
On suppose $4p^3 < 27q^2$.	On suppose $4p^3 < 27q^2$.
SOLUTION.	SOLUTION.
n. $B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	sin. $B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$
ng. $A = \sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B}.$	tang. $A = \sqrt[3]{\text{tang.} \frac{1}{2} B}.$
$= - \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\text{sin. } 2A}.$	$x = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\text{sin. } 2A}.$
$x^3 - px + q = 0.$	$x^3 - px - q = 0.$
SOLUTION.	SOLUTION.
n. $3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$	sin. $3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}.$
$=$ sin. $A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = -$ sin. $A \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$
$=$ sin. $(60° - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x = -$ sin. $(60° - A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$
$= -$ sin. $(60° + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$	$x =$ sin. $(60° + A) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}.$



la Résolution des Triangles sphériques rectangles,

démontrées (1014 à 1027).

CHÉES.	FORMULES.
* opposé * donné.	1° FORMULE... $sin.x = sin.$ hypot. $\times$ $sin.$ ang. donné
adjacent.	2° $tang.x = tang.$hypoténuse $\times$ $cos.$ angle donné
angle.	3° $cot.x = cos.$hypoténuse $\times$ $tang.$ angle donné
côté.	4° $cos.x = \frac{cos.\text{hypoténuse}}{cos.\text{cote donné}}$
adjacent donné.	5° $cos.x = tang.$côté donné $\times$ $cot.$hypoténuse
* opposé.	6° $sin.x = \frac{sin.\text{ côté * donné}}{sin.\text{hypoténuse}}$
ênuse.	7° $sin.x = \frac{sin.\text{ côté donné}}{sin.\text{ angle donné}}$
côté.	8° $sin.x = tang.$côté donné $\times$ $cot.$ angle donné
angle.	9° $sin.x = \frac{cos.\text{angle donné}}{cos.\text{côté donné}}$
ênuse.	10° $cot.x = cos.$angle donné $\times$ $cot.$côté donné
côté.	11° $tang.x = tang.$angle donné $\times$ $sin.$côté donné
angle.	12° $cos.x = sin.$angle donné $\times$ $cos.$côté donné
nuse.	13° $cos.x =$ rectangle $cos.$côtés donnés
:.	14° $cot.x = sin.$côté adjacent $\times$ $cot.$côté opposé
nuse.	15° $cos.x =$ rectangle $cot.$angles donnés
	16° $cos.x = \frac{cos.\text{angle opposé}}{sin.\text{angleadjacent}}$

e sont de même espèce entre eux (1016) : le signe (73) détermine l'espèce de tous les
iuteux.
cherchés étaient très-grands, on aurait recours aux formules (1029 à 1035) pour

des lignes trigonométriques d'un Triangle sphérique ABC.

Voyez (1136).

$\frac{\ldots \sin.C}{AB}$	19ᵉ $\sin.BC = \frac{\sin.AB \sin.A}{\sin.C}$
	20ᵉ $\sin.BC = \frac{\sin.AC \sin.A}{\sin.B}$
	21ᵉ $\sin.AC = \frac{\sin.BC \sin.B}{\sin.A}$
	22ᵉ $\sin.AC = \frac{\sin.AB \sin.B}{\sin.C}$
	23ᵉ $\sin.AB = \frac{\sin.AC \sin.C}{\sin.B}$
	24ᵉ $\sin.AB = \frac{\sin.BC \sin.C}{\sin.A}$
$\frac{\ldots}{}$	25ᵉ $\cos.BC = \frac{\cos.A + \cos.B \cos.C}{\sin.B \sin.C}$
$- \cos.B \cos.C$	26ᵉ $\cos.BC = \cos.A \sin.AB \sin.AC + \cos.AB \cos.AC$
$\frac{\ldots}{}$	27ᵉ $\cos.AC = \frac{\cos.B + \cos.A \cos.C}{\sin.A \sin.C}$
$- \cos.A \cos.C$	28ᵉ $\cos.AC = \cos.B \sin.BC \sin.AB + \cos.BC \cos.AB$
$\frac{\ldots}{}$	29ᵉ $\cos.AB = \frac{\cos.C + \cos.A \cos.B}{\sin.A \sin.B}$
$- \cos.A \cos.B$	30ᵉ $\cos.AB = \cos.C \sin.BC \sin.AC + \cos.BC \cos.AC$
$\overline{B \cos.B}$	31ᵉ $tang.BC = \frac{\sin.AB}{\sin.B \cot.A + \cos.B \cos.AB}$
$\overline{\ldots \cos.C}$	32ᵉ $tang.BC = \frac{\sin.AC}{\sin.C \cot.A + \cos.C \cos.AC}$
$\overline{\ldots \cos.C}$	33ᵉ $tang.AC = \frac{\sin.BC}{\sin.C \cot.B + \cos.C \cos.BC}$
$\overline{3 \cos.A}$	34ᵉ $tang.AC = \frac{\sin.AB}{\sin.A \cot.B + \cos.A \cos.AB}$
$\overline{\ldots \cos.A}$	35ᵉ $tang.AB = \frac{\sin.AC}{\sin.A \cot.C + \cos.A \cos.AC}$
$\overline{\ldots \cos.B}$	36ᵉ $tang.AB = \frac{\sin.BC}{\sin.B \cot.C + \cos.B \cos.BC}$



s pour la résolution des triangles sphériques obliquangles.

Voyez (1140).

SOLUTIONS.

1ᵉ SOLUTION... *sin*.angle cherché $=\frac{\textit{sin}.\text{côté opposé } \textit{sin}.\text{angle donné}}{\textit{sin}.\text{cote opposé à l'angle donné}}$, (1120).

L'espèce de l'angle cherché est *douteuse*, quand les règles suivantes ne la déterminent pas.
I. L'angle opposé au plus petit côté est $< 90°$, si la somme des côtés donnés est $< 180°$.
II. L'angle opposé au plus grand coté est $> 90°$, si la somme des côtés donnés est $> 180°$.

2ᵉ
cot.I segment = *tang*.angle donné *cos*.côté adjacent.
cos.II segment $=\frac{\textit{cos}.\text{I segment } \textit{tang}.\text{côté adjacent à l'angle donné}}{\textit{tang}.\text{cote opposé à l'angle donne}}$.
I segment ± II segment = angle cherché, (1124).

3ᵉ
tang.I segment = *cos*.angle donné *tang*.côté adjacent.
cos.II segment $=\frac{\textit{cos}.\text{I segment } \textit{cos}.\text{côté opposé à l'angle donné}}{\textit{cos}.\text{cote adjacent à l'angle donné}}$.
I segment ± II segment = côté cherché, (1126).

Dans les 2ᵉ et 3ᵉ sulutinns on doit prendre *la somme des segmens*, quand les angles opposés aux côtés donnés sont de même espèce; sinon, *la différence*. Et par conséquent ces deux cas sont douteux, quand le précédent l'est.

4ᵉ *sin*.côté cherché $=\frac{\textit{sin}.\text{ang. opposé } \textit{sin}.\text{côté donné}}{\textit{sin}.\text{ang. opposé au cote donné}}$, (1128).

L'espèce du côté cherché est *douteuse*, quand les règles suivantes ne la déterminent pas.
I. Le côté opposé au plus petit angle est $< 90°$, si la somme des angles donnés est $< 180°$.
II. Le côté opposé au plus grand angle est $> 90°$, si la somme des angles donnés est $> 180°$.

5ᵉ
tang.I segment = *tang*.côté donné *cos*.angle adjacent.
sin.II segment $=\frac{\textit{sin}.\text{I segment } \textit{tang}\text{ angle adjacent au côté donné}}{\textit{tang}.\text{angle opposé au cote donne}}$.
I segment ± II segment = côté cherché, (1132).

6ᵉ
cot.I segment = *cos*.côté donné *tang*.angle adjacent.
sin.II segment $=\frac{\textit{sin}.\text{I segment } \textit{cos}.\text{angle opposé au côté donné}}{\textit{cos}.\text{angle adjacent au cote donne}}$.
I segment ± II segment = angle cherché, (1134).

Dans les 5ᵉ et 6ᵉ solutions, si les angles donnés sont de même espèce, prenez *la somme de segmens;* sinon *la différence*. Mais le II segment peut avoir deux valeurs. En général *les espèces des segmens sont entre elles, comme les espèces des côtés opposés aux angles donnés sont entre elles* (1133). Et par conséquent ces deux cas sont douteux, quand le précédent l'est.



Voyez ci-après la suite de la Table VIII.

SOLUTIONS.

7° On nommera *côté donné* le côté opposé à l'angle cherché ; l'autre côté connu, *base.*

$tang.$ I segment $=$ $cos.$ angle donné $tang.$ côté donné.

II segment $=$ base $-$ I segment.

$tang.$ angle cherché $=$ $tang.$ angle donné $\times \frac{sin. \text{I segm.}}{sin. \text{II segm.}}$, (1086).

Si I segment est $>$ base, $sin.$ II segment sera négatif.

8° On nommera *base* l'un, à volonté, des côtés donnés ; l'autre, *côté donné.*

$tang.$ I segment $=$ $cos.$ angle donné $tang.$ côté donné.

II segment $=$ base $\backsim$ I segment.

$cos.$ côté cherché $=$ $cos.$ côté donné $\times \frac{cos. \text{II segm.}}{cos. \text{I segm.}}$, (1097).

Si le côté cherché est petit ; pour l'avoir avec exactitude, on aura recours aux solutions (1099 à 1102).

9° On nommera *angle donné* l'angle opposé au côté cherché ; l'autre angle connu, *angle vertical.*

$cot.$ I segment $=$ $tang.$ angle donné $cos.$ côté donné.

II segment $=$ angle vertical $\backsim$ I segment.

$tang.$ côté cherché $=$ $tang.$ côté donné $\times \frac{cos. \text{I segm.}}{cos. \text{II segm.}}$, (1106).

10° On nommera *angle vertical* l'un, à volonté, des angles connus ; l'autre, *angle donné.*

$cot.$ I segment $=$ $tang.$ angle donné $cos.$ côté donné.

II segment $=$ angle vertical $-$ I segment.

$cos.$ angle cherché $=$ $cos.$ angle donné $\times \frac{sin. \text{II segm.}}{sin. \text{I segm.}}$, (1117).

Lorsque I segment est $>$ angle vertical, $sin.$ II segment est négatif.
Si l'angle cherché est petit, on aura recours à la solution (1119).

11° Je nomme a, b, c les trois côtés ; s, leur demi-somme : a est le côté opposé à l'angle cherché.

$sin. \frac{1}{2}$ angle cherché $= \sqrt{\frac{sin.(s-b)\, sin.(s-c)}{sin.b \times sin.c}}$, (1067).

ou

$cos\ \frac{1}{2}$ angle cherché $= \sqrt{\frac{sin.s \times sin.(s-a)}{sin.b \times sin.c}}$, (1069).

12° A, B, C sont les trois angles ; S, leur demi-somme : A est l'angle opposé au côté cherché.

$sin. \frac{1}{2}$ côté cherché $= \sqrt{-\frac{cos.S\, cos.(S \backsim A)}{sin.B\, sin.C}}$, (1077).

ou

$cos. \frac{1}{2}$ côté cherché $= \sqrt{\frac{cos.(S \backsim B)\, cos.(S \backsim C)}{sin.B\, sin.C}}$, (1078).



s sphériques obliquangles, par les analogies de Neper.

Voyez (1141).

SOLUTIONS.

1° SOLUTION.

$tang.\frac{1}{2}a = cot.\frac{1}{2}$ angle donné $\times \frac{sin.\text{differ. côtés donnés}}{sin.\text{somme cotés donnés}}$.

grand segment $= \frac{1}{2}$ angle donné $+ \frac{1}{2}a$.

petit segment $= \frac{1}{2}$ angle donné $- \frac{1}{2}a$.

$cot.$angle cherché $= cos.$côté adj.$tang.$segm.adj., (1088).

Dans cette dernière équation on emploiera le grand segment avec le plus grand des côtés connus, le petit segment avec le plus petit : et si le petit segment se trouve être négatif et $<90°$, on fera négative la *tang.* de ce segment.

2°

$tang.\frac{1}{2}$ diff. angles cherchés $= \frac{cot.\frac{1}{2}\text{ang. don. } sin.\frac{1}{2}\text{diff. côtés don.}}{sin.\frac{1}{2}\text{somme cotes donnés}}$, (1093).

$tang.\frac{1}{2}$ som. angles cherchés $= \frac{cot.\frac{1}{2}\text{ang. don. } cos.\frac{1}{2}\text{diff. côtés don.}}{cos.\frac{1}{2}\text{somme cotes donnés}}$, (1094).

3°

$tang.\frac{1}{2}a = tang.\frac{1}{2}$ côté donné $\times \frac{sin.\text{ differ. angles donnés}}{sin.\text{ somme angles donnés}}$.

grand segment $= \frac{1}{2}$ côté donné $+ \frac{1}{2}a$.

petit segment $= \frac{1}{2}$ côté donné $- \frac{1}{2}a$.

$cot.$ côté cherché $= cos.$ angle adjacent $cot.$ segm. adjacent, (1108).

Dans cette dernière équation on emploiera le plus petit des deux angles connus avec le grand segment, le plus grand avec le petit segment : et si le petit segment se trouve être négatif et $<90°$, on fera négative la *cot.* de ce segment.

4°

$tang.\frac{1}{2}$ diff. côtés inconnus $= \frac{tang.\frac{1}{2}\text{côté don. } sin.\frac{1}{2}\text{diff. angles don.}}{sin.\frac{1}{2}\text{somme angles donnés}}$, (1113).

$tang.\frac{1}{2}$ som. côtés inconnus $= \frac{tang.\frac{1}{2}\text{côté don. } cos.\frac{1}{2}\text{diff. angles don.}}{cos.\frac{1}{2}\text{somme angles donnés}}$, (1114).



Voyez ci-après la suite de la Table IX.

SOLUTIONS.

$\textit{ıng.}\,\frac{1}{2}\,\text{côté cherché} = \textit{tang.}\,\frac{1}{2}\,\text{diff. côtés don.} \times \frac{\textit{sin.}\,\frac{1}{2}\,\text{somme angles don.}}{\textit{sin.}\,\frac{1}{2}\,\text{differ. angles don.}}$.

ou

$\textit{ıng.}\,\frac{1}{2}\,\text{côté cherché} = \textit{tang.}\,\frac{1}{2}\,\text{som. côtés don.} \times \frac{\textit{cos.}\,\frac{1}{2}\,\text{som. ang. don.}}{\textit{cos.}\,\frac{1}{2}\,\text{diff. ang. don.}}$, (1115).

$\textit{ıng.}\,\frac{1}{2}\,\text{angle cherché} = \textit{cot.}\,\frac{1}{2}\,\text{diff. angles donnés} \times \frac{\textit{sin.}\,\frac{1}{2}\,\text{diff. côtés donnés}}{\textit{sin.}\,\frac{1}{2}\,\text{som. côtés donnés}}$.

ou

$\textit{ıng.}\,\frac{1}{2}\,\text{ang. cherché} = \textit{cot.}\,\frac{1}{2}\,\text{som. ang. don.} \times \frac{\textit{cos.}\,\frac{1}{2}\,\text{diff. côtés don.}}{\textit{cos.}\,\frac{1}{2}\,\text{som. côtés don.}}$, (1095, 2°.).

On nommera *base* l'un, à volonté, des côtés adjacens à l'angle cherché, *côtés* les deux autres.

$\textit{ıng.}\,\frac{1}{2}a = \textit{tang.}\,\frac{1}{2}\,\text{somme côtés}\ \textit{tang.}\,\frac{1}{2}\,\text{différence côtés}\ \textit{cot.}\,\frac{1}{2}\,\text{base}$.

rand segment $= \frac{1}{2}\,\text{base} + \frac{1}{2}a$.

etit segment $= \frac{1}{2}\,\text{base} - \frac{1}{2}a$.

os. angle cherché = *tang.* segment adjacent *cot.* côté adjac., (1070).

Dans cette dernière équation on emploiera le grand segment avec le plus grand côté, le petit vec le plus petit côté : et si le petit segment se trouve être négatif et $< 90°$, on fera négative la *ıng.* de ce segment.

On nommera *angle vertical* l'un, à volonté, des angles adjacens au côté cherché ; *angles* mplement, les deux autres.

$\textit{ang.}\,\frac{1}{2}a = \textit{tang.}\,\frac{1}{2}\,\text{som. angles}\ \textit{tang.}\,\frac{1}{2}\,\text{diff. angles}\ \textit{tang.}\,\frac{1}{2}\,\text{ang. vertical}$.

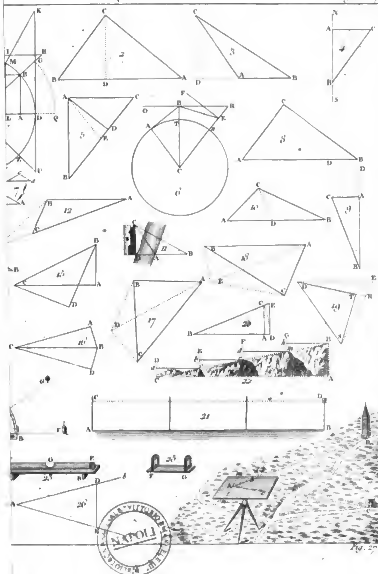
rand segment $= \frac{1}{2}\,\text{angle vertical} + \frac{1}{2}a$.

etit segment $= \frac{1}{2}\,\text{angle vertical} - \frac{1}{2}a$.

os. côté cherché = *cot.* segment adjacent *cot.* angle adjacent, (1079).

Dans cette dernière équation on emploiera le grand segment avec le plus petit angle, le petit egment avec le plus grand angle : et si le petit segment se trouve être négatif et $< 90°$, on fera égative la *cot.* de ce segment.





Trigonométrie.

Fig. 28 à 42.

Fig. 42.

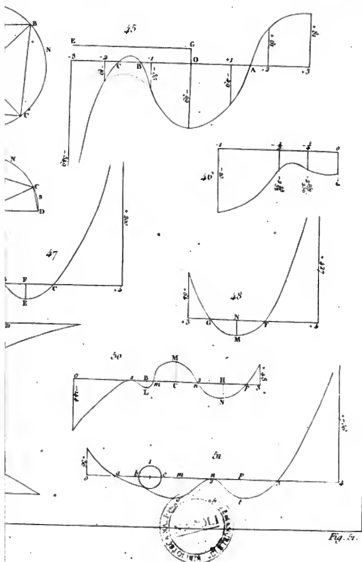
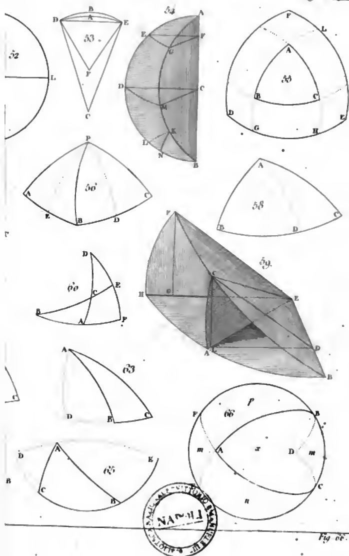
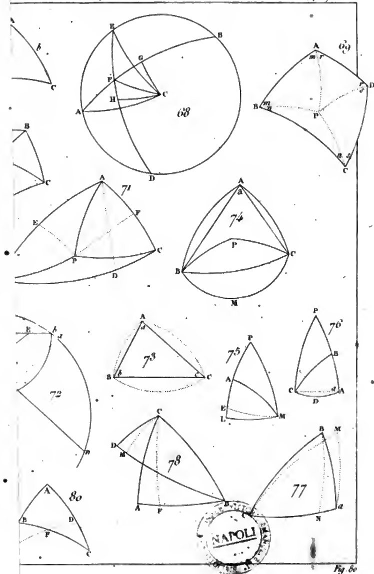
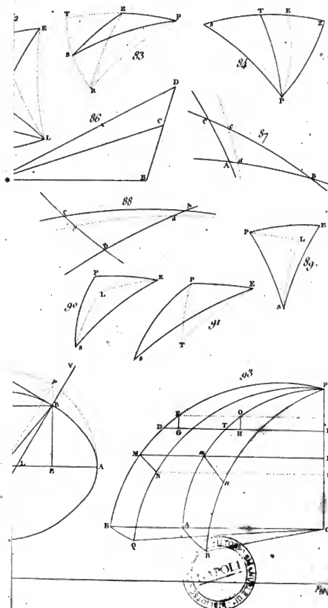
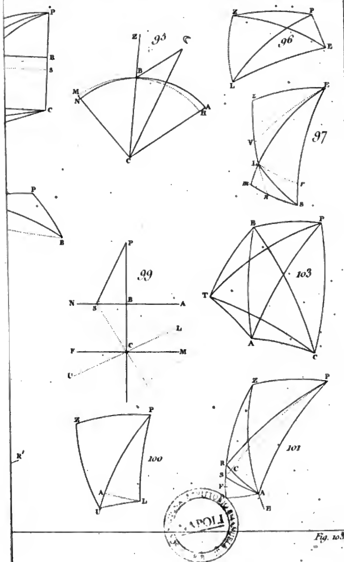


Fig. 51.






83
84
86
87
88
89
90
91
93
Fig. 93.


95
96
97
99
103
100
101

